

همس يوسف (الدرويشي)

# العناصر لتحليل حقيقه

الطبعة الثانية

همس يوسف (الدرويشي)

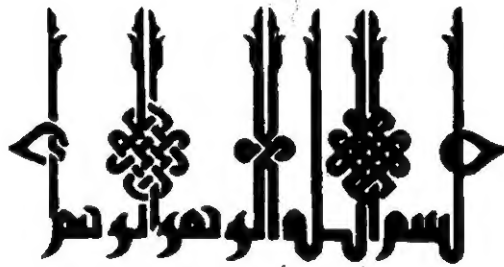
الدكتور روبرت ج. يارسل

همس يوسف (الدرويشي)



A Wiley Arabook

هنا يوسف الكويش



متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة  
مكتبتي الخاصة  
على موقع ارشيف الانترنت  
الرابط

[https://archive.org/details/@hassan\\_ibrahem](https://archive.org/details/@hassan_ibrahem)

# العناصر لتحليل حقيقى

الطبعة الثانية

تأليف

الدكتور روبرت ج. بارتل  
أستاذ الرياضيات  
جامعة الينوى . أربانا . شامبين

مترجم من قبل  
محمود يوسف الدويش

ترجمة

الأستاذ الدكتور محمد على اسمى  
رئيس قسم العلوم الرياضية بجامعة حلوان  
جمهورية مصر العربية

مراجعة

الأستاذ الدكتور فؤاد محمد حبيب  
أستاذ الرياضيات - كلية الهندسة  
جامعة القاهرة - جمهورية مصر العربية

جون وايلى وأولاده

نيويورك شيشستر بريس تورتو

جون وايلي والابن

Copyright © 1981 by John Wiley & Sons Inc. All Rights Reserved.

Published simultaneously in England by John Wiley & Sons Ltd.

No part of this book may be reproduced by any means, nor transmitted, nor translated into a machine language without the written permission of the publisher.

حقوق النشر © ١٩٨١ محفوظة لدار جون وايلي واولاده .

جميع الحقوق محفوظة

يتم نشر هذا الكتاب في ذات الوقت في انجلترا بواسطة دار جون وايلي واولاده ليمتد .

لا يجوز اعادة طبع او نقل او ترجمة اى جزء من اجزاء هذا الكتاب بآية وسيلة دون اذن كتابى من الناشر .

ISBN 0-471-06391-6

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1



## مقدمة

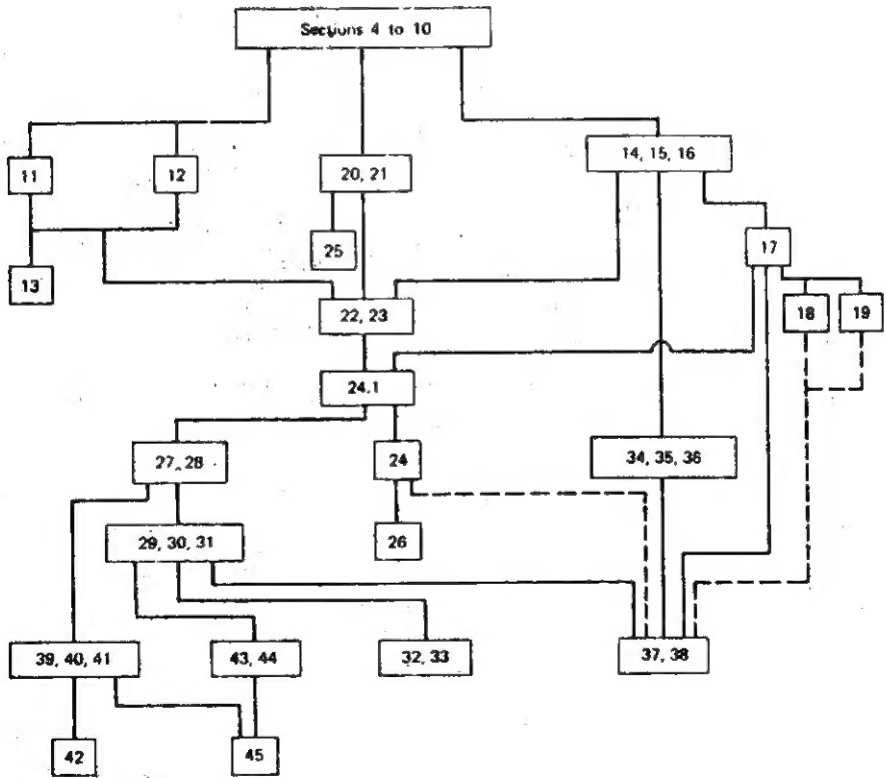
في وقت ما توقع طالب الجامعة الذي يدرس رياضيات متقدمة في مرحلة البكالوريوس تطوير قدرته الفنية في حل مسائل تحتوي على حساب عظيم الأهمية ، لكن ، لم يتوقع سيادة « الاحتمالات النظرية » مثل تقارب منتظم أو اتصال منتظم . وكان مطلوباً منه أن يكون قادراً على استخدام نظرية الدالة الضمنية ، لكن بدون معرفة فروضها . قد تغير هذا الحال ، ويعتبر الآن من الأهمية أن كل طلبة الرياضيات المتقدمة - الرياضيات المستقبلية ، علماء الكمبيوتر ، الفيزيائيون ، المهندسون ، أو الاقتصاديون - يفهمون الطبيعة الأساسية النظرية للموضوع . هم حينئذ سوف يفهمون كلا من قوة تحديد النظرية العامة بدرجة أكثر تماماً .

نشأ هذا الكتاب المدرسي من خبرتي بتدريس التحليل الحقيقي في جامعة الينوي منذ عام ١٩٥٥ . جمهور المستمعين لي غالباً من أشخاص جدد مجهزين جيداً عادة إلى خريجي الجامعة . معظمهم عادة لا يدرسون الرياضيات كعلم أساسي ، لكنهم درسوا على الأقل ما يكافئ ثلاثة فصول دراسية في دراسة ( ليست عنيفة ) التفاضل والتكامل ، المحتوى على تفاضلات جزئية ، تكاملات مضاعفة ، تكاملات خطية ، ومتسلسلات لانهائية . من المرغوب فيه لكل الدارسين أن يدرسوا فصلاً دراسياً في الجبر الخطي أو الجبر الحديث لكي يمهّدوا الطريق لهذا المقرر الذي نبرهن فيه نظريات تحليلية . لكن حيث أن كثيراً من الطلبة الذين ألتقي بهم ليس عندهم هذه الخلفية . فأبدأ دراسة التحليل بإبراهيم جبرية قليلة ، لكي أضعهم على بداية طريقهم .

أقدم في هذه الطبعة ، الخواص المرتبة والجبرية لنظام الأعداد الحقيقية في باب ٤ ، ٥ ، بطريقة أسهل من تلك التي استخدمتها في الطبعة الأولى . وبالإضافة إلى ذلك أقدم التمارين لفراغ متجه وفراغ عمودي في باب ٨ ، حيث أن هذه المفاهيم تحدث كثيراً في الرياضيات الحديثة . قصرت أيضاً أبواباً كثيرة لسهولة وسرعة الحصول على المادة العلمية وتقديم قابلية ثني إضافية عند استخدام هذا الكتاب ككتاب مدرسي . أضفت تمارينات ومشروعات جديدة وكثيرة ، لكنني حاولت أن أجعل الكتاب في نفس المستوى كالطبعة الأولى . يوجد فقط تغييرات طفيفة في الجزء الأول من الكتاب لكن ، بما أن الخبرة قد أثبتت أن النقاش

للتفاضل والتكامل في الفراغ كان مختصراً جداً في الطبعة الأولى . فإنني جمعت نظرية الدوال المتغير واحد في فصل واحد وأسببت بعناية فائقة في معالجة دوال متغيرات متعددة .

قدمت في باب ١ إلى ٣ ، المصطلحات العلمية للفئات النظرية ومفهوماً استخدم فيما بعد ويقدم أفكاراً أساسية قليلة . لكن ، هذه الأبواب لا تعطي تمثيلاً نظامياً لنظرية الفئة . ( لا تحتاج إلى مثل هذا التمثيل ، أو نرغب فيه في هذه المرحلة ) . يجب فحص هذه الأبواب بإيجاز والرجوع إليها فيما بعد إذا كان ذلك ضرورياً . في الحقيقة نبدأ الكتاب بالباب الرابع ، ويقدم الباب السادس « تحليلاً » ومن الممكن دراسة الأبواب من ٤ إلى ١٢ ومن ١٤ إلى ١٧ ومن ٢٠ إلى ٢٤-١ ومعلم ٢٧ إلى ٣١ في فصل دراسي واحد . ينبغي أن أستعمل حق امتياز المعلم . وباختصار أقدم بعض موضوعات خاصة أخرى ( مثل المتسلسلات ) على حساب نتائج مختلفة سهلة المواقع ( أو حتى حذف بعض النتائج ) التي ليست ضرورية للمادة السابقة . حيث أن الكتاب بأكمله يعطي مادة أكثر قليلاً عما يمكن دراسته عادة وعما نقدر لتغطيته في عام واحد لهذا المستوى ، فسوف يتحصر المعلم بمادة نقاش بعض الأبواب . لكن من المفيد



للدارس أن يحفظ المادة الإضافية كرجع في المستقبل . درسنا هنا معظم الموضوعات المرتبطة عموماً مع مقررات في « التفاضل والتكامل المتقدم » الاستثناء الأساسي هو موضوع تكاملات خطية وتكاملات على سطح ونظرية استوكس ؛ لم يناقش هذا الموضوع ، حيث أن معالجة بديهية هي بالأصح جزء من التفاضل والتكامل وتحتاج معالجة قوية إلى نقاش شامل نوعاً ما لكي يكون مثمراً .

الاعتماد المنطقي للأبواب المختلفة في هذا الكتاب المدرسي موضح بالشكل المجاور يوضح خط جامد في هذا الشكل اعتماداً على الباب السابق ويدل خط منقطع على اعتماد بسيط فمثلاً كل التعريفات ، النظريات ، النتائج ، المفترضات ، بالتتالي حسب رقم الباب ، خصصت اسمه للنظريات الأكثر أهمية طالما بدا راسم مناسب . تنطلق البراهين من الكتاب برأس البرهان وتنتهي بعبارة وهو المطلوب إثباته .

ليس من الممكن زيادة تأكيد أهمية التمارين والمشروعات باستخدام مجهودات جدية ومتفق عليها لحلها يمكن للشخص أن يأمل في أن يسيطر على مادة هذا الكتاب . تنمى المشروعات موضوعاً معيناً لمتابعة متصلة ، نعتقد أنها تنقل الطالب على الأقل مذاق اللذة ( أو العذاب ! ) عند عمل بحث في الرياضيات أمل في أنه سوف لا يفشل طالب في أن يمرن يده على كثير من هذه المشروعات لأنني أعتقد أنها بوجه خاص ملامح قيمة لهذا الكتاب .

جلبت عند كتابة هذا الكتاب ، من خبرتي في الفصل الدراسي وتأثرت بمصادر كثيرة . استفدت من نقاشي مع الطلبة والزملاء ، ومنذ نشر الطبعة الأولى ، أجريت مكاتبات شاملة مع الطلاب والمدرسين في معاهد أخرى . أقدم شكرى لكل من قدم تفسيرات واقتراحات . شغفهم لتحسين الكتاب شجعتني على تدبير هذا التنقيح . قرأ الأستاذة أندرسون ، باد ، برسني بروفة الطبعة الأولى وقدموا اقتراحات مفيدة . أخص بالشكر زميلي ، الأستاذ برنردت ، لأجل تعليقاته وتصحيحاته الكثيرة والصارمة . أقدم شكرى إلى كارولين ج . بلومكر لصبرها وكتابتها المتقنة للبروفة المصححة تحت ظروف متنوعة . أخيراً أقدم تقديري العظيم لمساعدة وتعاون إدارة ويل .

روبرت ج. بارنل

٢٢ يونيو ١٩٧٥  
أريانا - شامبين ، إلينوى

جسار يوسف الدويهي



## ملخصات فصول

الموضوع	الصفحة
مقدمة : نظرة على الفئة	١
باب (١) - جبر الفئات	١
الفئة الجزئية الفعلية للفئة - تقاطع واتحاد فئتين - حاصل الضرب الكارتيزي	
باب (٢) دوال	١٢
تمثيل جدول - قيود الدوال وامتداداتها - تركيب الدوال - الدوال الإدخالية والدوال العكسية - الدوال الفوقية والدوال التناظر أحادية - الصور المباشرة والعكسية	
باب (٣) فئات محدودة وفئات غير محدودة	٢٥
- عدم قابلية العد للمقدارين $R$ و $I$	
الفصل الأول : الأعداد الحقيقية	٣١
باب (٤) الخواص الجبرية للمقدار $R$	٣١
الخواص الجبرية للفئة $R$ - الأعداد الجذرية (المنقطة)	
باب (٥) الخواص المرتبة للفئة $R$	٣٧
الخواص المرتبة للمقدار $R$ - خواص الرتبة - القيمة المطلقة	
باب (٦) خاصية الإتمام أو الإكمال للمقدار $R$	٤٣
الأعلى والأدنى - خاصية أرشيدس - وجود العدد $\sqrt{2}$	
باب (٧) القواطع ، الفترات والفئة المائلة	٥٣
خاصية القطع ( القص ) - الخلايا والفترات - خاصية الخلايا المتداخلة - فئة كانتور - نماذج من $R$	

٦١	الفصل الثاني : توبولوجيا الفراغات الكارتيكية
٦١	باب ( ٨ ) متجه وفراغات كارتيزية
	حواصل الضرب العددي والأعمدة العددية - الفراغ الكارتيكي $R^p$
٧٣	باب ( ٩ ) الفئات المغلقة والمفتوحة
	خواص الفئة المفتوحة - الفئات المغلقة - خواص الفئات المغلقة
	مناخات ( الجيرة أو الجوار ) - فئات مفتوحة في $R$
٨١	باب ( ١٠ ) نظريات الخلايا المتشابكة ( الوكرية ) وبولزانو - فيرشراس
	نظرية الخلايا المتداخلة - نقط العنقود أو السبابة ونظرية
	وبولزانو - فيرشراس
٨٦	باب ( ١١ ) نظرية هاين - بوريل
	نظرية تقاطع كانتور - نظرية غطاء لبسيج - نظرية أقرب نقطة -
	نظرية الكونتور المحيط
٩٦	باب ( ١٢ ) الفئات المتصلة
	الفئات المفتوحة المتصلة - فئات متصلة في $R$
١٠٢	باب ( ١٣ ) نظام الأعداد المركبة
١٠٧	الفصل الثالث : تقارب
١٠٧	باب ( ١٤ ) مقدمة إلى المتتابعات
	انفرادية النهاية
١١٦	باب ( ١٥ ) متتابعات جزئية وتوافق
	توافق المتتابعات - تطبيقات
١٢٤	باب ( ١٦ ) ميران أو مقياسان للتقارب
	نظرية تقارب باطراد - نظرية بولزانو - فيرشراس - متابعات كوشي
١٣٥	باب ( ١٧ ) متتابعات الدوال
	العمود المنتظم - معيار كوشي لتقارب منتظم
١٤٧	باب ( ١٨ ) العلو النهائي



متتابعات غير محدودة - نهايات لانهائية

- باب (١٩) بعض امتدادات ... .. ١٥٣  
مجموع سيزارو - متتابعات مزدوجة ومكررة - معيار كوشى -  
نظرية نهاية مزدوجة - نظرية نهاية مكررة

الفصل الرابع : دوال متصلة ... .. ١٦٢

- باب (٢٠) خواص محلية للدوال متصلة ... .. ١٦٢  
مقياس عدم الاتصال - محصلة دوال

- باب (٢١) دوال خطية ... .. ١٧٥

- باب (٢٢) خواص كروية للدوال متصلة ... .. ١٧٩  
نظرية الاتصال الكروى - حفظ الاتصال أو الارتباط - حفظ  
الإدماج ( الدموج ) - نظرية القيمة العظمى والصغرى -  
اتصال الدالة العكسية

- باب (٢٣) اتصال منتظم ونقط ثابتة ... .. ١٨٩  
نظرية الاتصال المنتظم - نظرية نقطة ثابتة - نظرية النقطة الثابتة  
للانكشاشات - نظرية نقطة ثابتة لبروور

- باب (٢٤) متتابعات دوال متصلة ... .. ١٩٧  
تبادل نهاية واتصال - نظريات تقريب - تقريب بكثيرات الحدود  
- نظرية تقريب برنشتين - نظرية تقريب فيراشتراس

- باب (٢٥) نهايات دوال ... .. ٢٠٧  
نهايات أعلى عند نقطة

- باب (٢٦) بعض نتائج أبعد ... .. ٢١٧  
نظرية ستون - فيراشتراس - نظرية تقريب ستون -  
امتداد دوال متصلة - نظرية امتداد تيتز - تساوى الاتصال -  
نظرية ارتزिला - أسكولى

الفصل الخامس : دوال لمتغير واحد ... .. ٢٢٩

- باب (٢٧) نظرية القيمة المتوسطة ... .. ٢٢٩  
نظرية النهاية العظمى الداخلية - نظرية القيمة المتوسطة -  
نظرية كوشى للقيمة المتوسطة

- باب (٢٨) تطبيقات أبعد لنظرية القيمة المتوسطة ..... ٢٣٩  
تطبيقات - تبادل نهاية ومشتقة - نظرية تايلور
- باب (٢٩) تكامل ريمان - اشتيلتجز ..... ٢٥٢  
مقياس كوشي للقابلية للتكامل - بعض خواص التكامل - تكامل بالتجزئ - تعديل التكامل
- باب (٣٠) وجود التكامل ..... ٢٧١  
مقياس ريمان لقابلية التكامل - نظرية القابلية للتكامل - حساب التكامل - النظرية الأولى للقيمة المتوسطة - نظرية أساسية لحساب التفاضل والتكامل - تكامل بالتجزئ - النظرية الثانية للقيمة المتوسطة - نظرية تغيير متغير - تعديل التكامل
- باب (٣١) خواص أبعد للتكامل ..... ٢٨٦  
نظرية تقارب محدود - نظرية تقارب اطرادية - صيغة تكامل لباقي - نظرية تايلور - تكاملات تتوقف على بارامتر (كيفية متغيرة القيمة) - صيغة ليبنز - نظرية تبادل - نظرية التمثيل لريز
- باب (٣٢) تكاملات غير معينة ولا نهائية ..... ٣٠٦  
دوال غير محدودة - تكاملات لانهائية - وجود التكامل اللانهائي - مقياس كوشي - اختبار مقارنة - اختبار مقارنة للنهائية - اختبار ديرشلت - تقارب مطلق
- باب (٣٣) تقارب منتظم وتكاملات لانهائية ..... ٣١٧  
مقياس كوشي - اختبار  $M$  لفيرشتراس - اختبار ديرشلت - تكاملات لانهائية تتوقف على بارامتر - تكاملات لانهائية لمتتابعات - نظرية تقارب اطرادية - تكاملات لانهائية مكررة
- الفصل السادس: المتسلسلات اللانهائية ..... ٣٣٨
- باب (٣٤) تقارب متسلسلات لانهائية ..... ٣٣٨  
مقياس كوشي للمتسلسلات - إعادة تنظيمات متسلسلات - نظرية إعادة تنظيم

## الصفحة

باب (٣٥) اختبارات لتقارب مطلق ... ٣٤٧

اختبار المقارنة - نهاية اختبار مقارنة - اختبار جلد - اختبار  
نسبة - اختبار راب - اختبار التكامل

باب (٣٦) نتائج أبعد للمتسلسلات ... ٣٦٠

مفترض آبل - اختبار درشلت - اختبار آبل - متسلسلات متعاقبة  
(أو متناوبة) - اختبار متسلسلة متناوبة - متسلسلات مزدوجة -  
حاصل ضرب كوشي

باب (٣٧) متسلسلات دوال ... ٣٧١

اختبارات لتقارب منتظم - معيار كوشي - اختبار  $M$  لفيشر اشتراش  
- اختبار درشلت - اختبار آبل - متسلسلات قوى - نظرية  
كوشي - هادامارد - نظرية تفاضل - نظرية الانفرادية - نظرية  
حاصل ضرب - نظرية برنشتين - نظرية آبل - نظرية توير

باب (٣٨) - متسلسلة فوريير ... ٣٨٧

متباينة بسل - مفترض ريمان - ليج - نظرية تقارب نقطية  
- نظرية تقارب منتظمة - نظرية تفاضل عمودية - نظرية فيجر -  
نظرية تقريب لفيشر اشتراش

الفصل السابع : تفاضل في  $R^n$  ... ٤٠٦

باب (٣٩) المشتقة في  $R^p$  ... ٤٠٧

وجود المشتقة

باب (٤٠) نظريتا قاعدة السلسلة والقيمة المتوسطة ... ٤٢٢

قاعدة السلسلة - نظرية القيمة المتوسطة - تبادل ترتيب التفاضل -  
مشتقات أعلى - نظرية تايلور

باب (٤١) نظريات الراسم والدوال الضمنية ... ٤٤٠

الصنف  $C^1(\Omega)$  - مفترض تقريب - نظرية الراسم الإدخال -  
نظرية الراسم الفوق - نظرية راسم مفتوح - النظرية العكسية -  
نظرية دالة ضمنية - نظريتا البارامترية والرتبة - نظرية التمثيل  
البارامترى - نظرية رتبة

٤٦٥	باب (٤٢) مسائل إضافية
	اختبار المشتقة الثانية - مسائل نهايات بقيود - نظرية لاجرانج - قيود متباينة
٤٨٣	الفصل الثامن : تكامل في $R^p$
٤٨٣	باب (٤٣) التكامل في $R^p$
	محتوى صفر - تعريف التكامل - معيار كوشي - خواص التكامل وجود التكامل - نظرية القابلية للتكامل
٤٩٥	باب (٤٤) محتوى التكامل
	فئات مع محتوى - تمييز للدالة المحتوية - خواص إضافية للتكامل - نظرية قيمة متوسطة - التكامل كتكامل مكرر
٥١٤	باب (٤٥) تحويلات لفئات وتكاملات
	تحويلات برواسم خطية - تحويل برواسم ليست خطية - نظرية جاكوبيان - تغيير المتغيرات - نظرية تغيير المتغيرات - الأحداثيات القعلية والكروية - تطبيقات
٥٣٧	مراجع
٥٣٩	إرشادات لتمرينات مختارة
٥٦٥	قائمة المصطلحات العلمية
٥٧٧	فهرس

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة

مكتبتي الخاصة

على موقع ارشيف الانترنت

الرابط

[https://archive.org/details/@hassan\\_ibrahem](https://archive.org/details/@hassan_ibrahem)

## لمحة عن نظرية الفئة

فكرة الفئة هي الأساس لكل الرياضيات ، وجميع الموضوعات والتراكيب الرياضية ترجع أخيراً إلى نظرية الفئة ونظراً للأهمية الأساسية لنظرية الفئة سنقدم هنا مجملًا قصيراً للرموز والمصطلحات الخاصة بنظرية الفئة والتي ستشتمل كثيراً في هذا المرجع . لكن ، حيث أن الغرض من هذا الكتاب هو تقديم العناصر ( دون الأساسيات ) للتحليل الحقيقي ، لذلك سنختار من وجهة نظرنا أساليب بسيطة نوعاً ما . وسنكتفي بالمناقشة العادية وسنعتبر أن الكلمة « فئة » كفهومها وكرادف للكلمات « رتبة ومجموعة ، وفصل وطقم » . ولا يوجد محاولات لتعريف هذه المصطلحات لتعريفها في قائمة بديهيات لنظرية الفئة . القارئ الذي عنده دراية كافية والملم بتطور الموضوع يجب أن يسترشد بالمراجع على نظرية الفئات في نهاية هذا الكتاب . ومنها سيتعلم كيف يمكن وضع هذه المادة في بديهيات أساسية . وسيجد أن هذه البديهيات ستكون تطويراً قاطعاً لأساسيات الرياضة . لكن بما أننا سنعتبر أن هذا بعيداً عن رقعة هذا العلم في الكتاب الحالي لذلك سوف لا نتمسك في التفاصيل . وننصح بشدة القارئ بقراءة هذه المقدمة سريعاً لمعرفة وحفظ الرموز والعلامات التي سوف نستخدمها . وباستثناء الأبواب الأخيرة التي يجب دراستها يمكن اعتبار هذه المقدمة مادة أساسية يرجع إليها . ويجب على القارئ ألا يضيع وقتاً كبيراً فيها .

## الباب الأول — جبر الفئات :

إذا كانت  $A$  تدل على فئة وكانت  $x$  عنصراً فيها ، فن المناسب أن يكتب

$$x \in A$$

كاختصار لقولنا إن  $x$  عنصر من عناصر الفئة  $A$  ، أو  $x$  عضو في الفئة  $A$  ، أو الفئة  $A$  تحتوي العنصر  $x$  ، أو أن  $x$  تكون في  $A$  . نحن لا نفحص طبيعة خاصة عنصر من فئة أكثر من هذا ولأغراض أكثر يمكن استخدام المعنى البسيط للعضوية حيث الميزة البديهية لهذه العلاقة غير ضرورية .

إذا كانت  $A$  فئة والعنصر  $x$  ينتمى إلى الفئة  $A$  ، فإننا نكتب غالباً  $x \in A$

وطبقاً لفكرتنا البسيطة عن الفئة سنتطلب واحدة تماماً من الإمكانيتين

$$x \in A, \quad x \notin A$$

لعنصر  $x$  وفئة  $A$  .

إذا كانت  $A$  ،  $B$  فئتين ،  $x$  عنصر ، حينئذ سيوجد في الأصل أربع إمكانيات  
(انظر شكل ١-١)

$$x \in B \text{ و } x \in A \text{ (٢) ، } x \in B \text{ و } x \notin A \text{ (١)}$$

$$x \notin B \text{ و } x \in A \text{ (٤) ، } x \notin B \text{ و } x \notin A \text{ (٣)}$$

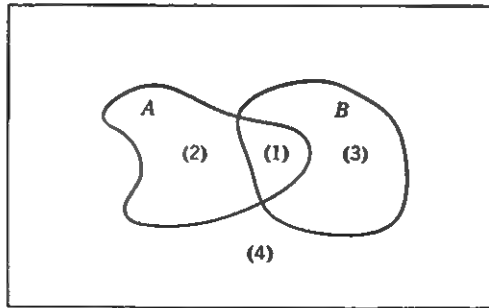
إذا كانت الحالة الثانية لا تحدث ( أى إنه إذا كان كل عنصر من الفئة  $A$  هو أيضاً  
عنصر من الفئة  $B$  ) ، حينئذ سنقول إن الفئة  $A$  تكون محتوية في الفئة  $B$  أو أن الفئة  
 $B$  تحتوى  $A$  أو أن الفئة  $A$  هي فئة جزئية من  $B$  ويعبر عن ذلك كما يلي :

$$A \subseteq B \quad \text{أو} \quad B \supseteq A$$

إذا كانت  $A \subseteq B$  وأيضاً يوجد عنصر في  $B$  غير موجود في  $A$  ، فنقول إن  $A$  هي  
الفئة الجزئية الفعلية للفئة  $B$  .

ويجب ملاحظة أن التعبير  $A \subseteq B$  لا يمنع تلقائياً إمكانية الفئة  $A$  احتواء كل عناصر  
الفئة  $B$  . وعندما يكون ذلك صحيحاً فالفئتان  $A$  ،  $B$  تكونان متساويتين بالمعنى الذى  
سنعرفه الآن .

١-١ تعريف . الفئتان تكونان متساويتان إذا كانتا تحتويان على نفس العناصر إذا  
كانت الفئتان  $A$  ،  $B$  متساويتين فنكتب  $A = B$  .



( شكل ١ - ١ )



أى إنه لى نوضح أن الفئتين  $A$  و  $B$  متساويتان يجب أن نوضح أن الإمكانيتين (2)، (3) المشار إليهما لا يمكن أن تحدث . وتحقيقاً للتكافؤ يجب توضيح أن كلا  $B \subseteq A$  و  $A \subseteq B$  . إن كلمة خاصة ليس من السهل أن تعرف بالضبط ، ولكننا لن نتردد في استخدامها بالتصور العادى لها وهو أنه إذا كانت  $P$  تبين خاصية معرفة لمجموعة من العناصر ، فإننا سنتفق على كتابة

$$\{x : P(x)\}$$

لفئة جميع العناصر  $x$  التى تحقق الخاصية  $P$  . وعادة نقرأها مثل « الفئة لكل العناصر  $x$  حيث  $P(x)$  » . ومن الأهمية غالباً أن نحدد أى العناصر التى نختبرها للخاصية  $P$  . حينئذ غالباً ستكتب

$$\{x \in S : P(x)\}$$

للفئة الجزئية من  $S$  التى تحقق الخاصية  $P$  .

### أمثلة :

( ١ ) إذا كانت  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$  تعين فئة الأعداد الطبيعية ، حينئذ الفئة :

$$\{x \in N : x^2 - 3x + 2 = 0\}$$

تحتوى تلك الأعداد الطبيعية التى تحقق المعادلة المذكورة . الآن الحلان الوحيدان لمعادلة الدرجة الثانية  $x^2 - 3x + 2 = 0$  هما  $x = 1$  و  $x = 2$  . وبالتالي بدلا من كتابة التعبير السابق ( حيث يوجد عندنا معلومات مفصلة خاصة بجميع عناصر الفئة المختبرة ) فإننا نرمز عادة لهذه الفئة بالرمز  $\{1, 2\}$  مسجلين بذلك عناصر الفئة .

(ب) ويستعمل أحيانا قانون الاختصار وصف فئة . مثال ذلك : فئة كل الأعداد الطبيعية الزوجية يمكن كتابتها على الصورة  $\{2x : x \in N\}$  بدلا من كتابتها على الصورة المعقدة  $\{y \in N : y = 2x, x \in N\}$  .

(ج) الفئة  $\{x \in N : 6 < x < 9\}$  يمكن كتابتها ببساطة مثل  $\{7, 8\}$  ومن ثم عرض لعناصر الفئة . طبعاً توجد أوصاف أخرى ممكنة كثيرة لهذه الفئة . مثال ذلك :

$$\{x \in N : 40 < x^2 < 80\},$$

$$\{x \in N : x^2 - 15x + 56 = 0\},$$

$$\{7 + x : x = 0 \text{ أو } x = 1\}$$

(د) وبالإضافة إلى فئة الأعداد الطبيعية ( المحتوية على العناصر المعرفة بواسطة

... 3, 2, 1 والتي س نرمز لها بالتمائل بالرمز  $N$  فإنه يوجد فئات أخرى قليلة سنقدم لها دلالة موحدة كما يتضح من الأمثلة الآتية :

فئة الأعداد الصحيحة هي :

$$Z = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$$

فئة الأعداد القياسية هي :

$$Q = \{m/n : m, n \in Z \text{ and } n \neq 0\}$$

سنعالج الفئات  $Q$  و  $Z$  و  $N$  كما إذا كانت مفهومة جيداً وسوف لا نختبر ثانياً خواصها بتفصيلات أكثر . ومن الفئات التي لها أهمية أساسية لدراستنا القادمة هي الفئة  $R$  لجميع الأعداد الحقيقية التي ستختبر في الأبواب ٤ - ٦ . الفئة الجزئية الخاصة للفئة  $R$  التي لها فائدة هي فترة الوحدة .

$$I = \{x \in R : 0 \leq x \leq 1\}$$

أخيراً س نرمز لفئة الأعداد المركبة بالرمز  $C$  حيث سنعطى في الباب الثالث عشر تعريفاً مفصلاً للفئة  $C$  ووصفاً مختصراً لبعض خواصها .

## عمليات الفئة :

سنقدم بعض الطرق لتكوين فئات جديدة من فئات معطاة :

١ - ٢ تعريف . إذا كانت  $A$  و  $B$  فئتين ، فإن تقاطعهما هي الفئة التي كل عناصرها تنتمي إلى كل من  $A$  ،  $B$  وس نرمز لتقاطع الفئتين  $B$  و  $A$  بالرمز  $A \cap B$  الذي يقرأ «  $B$  تقاطع  $A$  » . ( انظر شكل ١ - ٢ ) .

١ - ٣ تعريف . إذا كانت  $A$  ،  $B$  فئتين ، فإن اتحادهما هي الفئة التي كل عناصرها تنتمي إلى الفئة  $A$  أو إلى الفئة  $B$  أو إلى كل من  $A$  ،  $B$  وس نرمز لاتحاد الفئتين  $B$  ،  $A$  بالرمز  $A \cup B$  الذي يقرأ « اتحاد  $B$  » . ( انظر شكل ١ - ٣ ) .

ويمكننا أيضاً تعريف

$$A \cap B , A \cup B \text{ كالآتي}$$

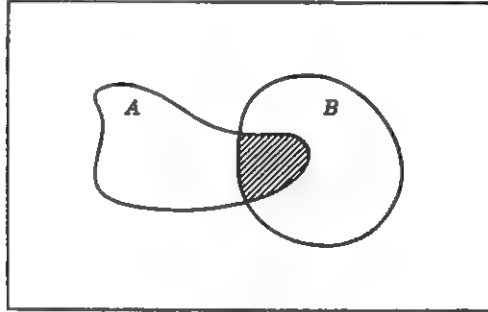
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ و } x \in B\}$$


$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ أو } x \in B\}$$

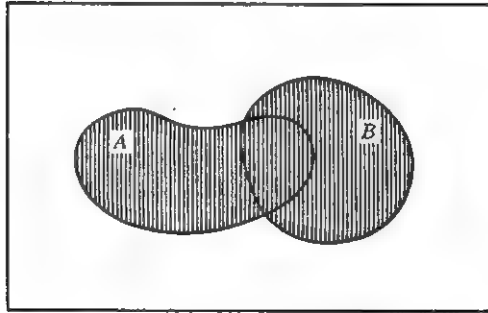
بالرجوع إلى ما سبق ، نجد أنه من المهم أن نحقق أن الكلمة « أو » مستعملة بمعنى شامل مألوف استعماله في الرياضيات والمنطق . يرمز لهذا المعنى الشامل في قانون المصطلحات العلمية بالرمز « و / أو » .

سنفترض ضمناً أن تقاطع واتحاد فئتين هو أيضاً فئة . ومن بين أشياء أخرى هذا يتطلب أن هناك يجب أن توجد فئة ليس لها عناصر بالمرة ( لأنه إذا كانت  $B$  ،  $A$  ليس لها عناصر مشتركة فتقاطعهما لا يحتوي عناصر ) .

١ - تعريف . الفئة التي ليس لها عناصر تسمى فئة خالية أو فئة شاغرة وسنعيها بالرمز  $\emptyset$  . إذا كانت  $A$  و  $B$  فئتين ليس بينهما عناصر مشتركة ( أى إنه إذا كانت  $A \cap B = \emptyset$  ) فحينئذ نقول إن  $A$  و  $B$  غير مربوطة أو إنهما غير متقاطعين .



$A \cap B$  



$A \cup B$  

(شكل ١ - ٢) تقاطع واتحاد فئتين

النتيجة الثانية تغطي بعض الخواص الجبرية للعمليات على الفئات التي سبق عرفناها . وحيث إن البراهين لتلك الفروض دارجة وروتينية فسوف نترك معظمها كتمارين للقارئ .

١ - ٥ نظرية . إذا كانت  $A, B, C$  أى ثلاث فئات ، فإن

$$A \cap A = A, \quad A \cup A = A \quad (1)$$

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A \quad (ب)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (ج)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (د)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

هذه التساويات تسمى أحياناً بخاصية المماثلة وخاصية التبديل وخاصية الترافق وخاصية التوزيع على الترتيب لعمليات تقاطع واتحاد الفئات .

ولكى نعطى برهاناً كمينة ، سنبرهن المعادلة الأولى في (د) . ففرض  $x$  عنصر من  $A \cap (B \cup C)$  ، حينئذ  $x \in A$  و  $x \in B \cup C$  . هذا معناه أن  $x \in A$  ، وأما  $x \in B$  أو  $x \in C$  . ومن ذلك يكون لدينا إما  $x \in A$  (i) و  $x \in B$  أو يكون لدينا  $x \in A$  (ii) و  $x \in C$  . لذلك إما  $x \in A \cap B$  أو  $x \in A \cap C$  ، إذن  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$  . وهذا يوضح أن  $A \cap (B \cup C)$  هي فئة جزئية من  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

بالمعكس ، بفرض  $y$  عنصر من  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$  فلما  $y \in A \cap B$  (iii) أو  $y \in A \cap C$  (iv) . ومن ذلك يتبع  $y \in A$  وإما  $y \in B$  أو  $y \in C$  ولذلك  $y \in A \cap (B \cup C)$  . إذن  $y \in A \cap (B \cup C)$  بحيث  $y \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$  هي فئة جزئية من  $A \cap (B \cup C)$  . بالنظر إلى تعريف ١ - ١ نختتم أن الفئتين  $A \cap (B \cup C)$  و  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$  متساويتان .

وكإشارة إلى طريقة التغير ، نلاحظ أن هناك في الأصل مجموع  $(2^3 = 8)$  من الإمكانات لعنصر  $x$  بالنسبة إلى ثلاث فئات  $A$  و  $B$  و  $C$  (انظر شكل ١ - ٣) وهم :

$$x \in A, x \in B, x \in C \quad (٢) \quad x \in A, x \in B, x \in C \quad (١)$$

$$x \in A, x \notin B, x \notin C \quad (٤) \quad x \in A, x \notin B, x \in C \quad (٣)$$

$$x \notin A, x \in B, x \notin C \quad (٦) \quad x \notin A, x \in B, x \in C \quad (٥)$$

$$x \notin A, x \notin B, x \notin C \quad (٨) \quad x \notin A, x \notin B, x \in C \quad (٧)$$

البرهان يتكون بتوضيح كل من الطرفين للمعادلة الأولى في (د) تحتوى هذه فقط هذه العناصر  $x$  المنتهية إلى الحالات (١) ، (٢) أو (٣) .

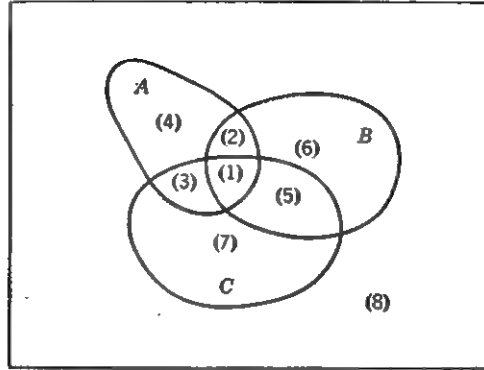
وبخصوص العلاقات الموجودة في نظرية ١ - ٥ (ج) فإننا عادة نحذف الأقواس

$$A \cap B \cap C, \quad A \cup B \cup C$$

من الممكن أن نوضح أنه إذا كانت  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  مجموعة من الفئات ، فعينئذ يوجد فئة معرفة وحيدة  $A$  تحتوى كل العناصر المنتهية على الأقل لواحدة من هذه الفئات

$A_j, j = 1, 2, \dots, n$ : وتوجد فئة معرفة وحيدة تحتوى كل العناصر المنتمية لكل الفئات  
 $A_j, j = 1, 2, \dots, n$  وبدون استبعاد الأقواس ، نكتب

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n, \quad B = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$



(شكل ١ - ٣)

أحياناً - لتوفير الفراغ ، نقلد الرمز المستعمل في حساب التفاضل والتكامل للمجموع ونستخدم رمزاً أكثر كثافة مثل

$$A = \bigcup_{j=1}^n A_j = \bigcup \{A_j : j = 1, 2, \dots, n\}$$

$$B = \bigcap_{j=1}^n A_j = \bigcap \{A_j : j = 1, 2, \dots, n\}$$

بالمثل إذا كان لكل عنصر  $j$  في الفئة  $J$  توجد فئة  $A_j$  فإن  $\bigcup \{A_j : j \in J\}$  تبين فئة كل العناصر المنتمية على الأقل لواحدة من الفئات  $A_j$ . بنفس الطريقة  $\bigcap \{A_j : j \in J\}$  تمثل فئة كل العناصر المنتمية إلى جميع الفئات  $A_j$  حيث  $j \in J$ .

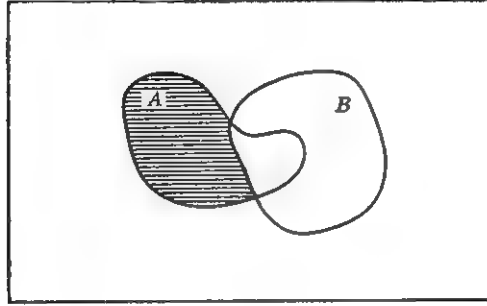
سنقدم الآن طريقة أخرى لتكوين فئة جديدة من فئتين معلومتين :


١ - ٦ تعريف . إذا كانت  $B$  ،  $A$  فئتين فإن الفئة المتممة للفئة  $B$  بالنسبة للفئة  $A$  هي الفئة التي كل عناصرها من  $A$  لا تنتمي إلى  $B$  . سنرمز لهذه الفئة بالرمز  $A \setminus B$  (تقرأ «  $A$  ناقص  $B$  » ) ، مع أن الرموز المرتبطة  $A - B$  و  $A \sim B$  أحياناً يستعملها مؤلفون آخرون ( انظر شكل ١ - ٤ ) .

وباستخدام الرمز السابق ، يكون

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$$

أحياناً الفئة  $A$  تفهم ولا تحتاج إلى أن تذكر بوضوح وفي هذه الحالة ننوه إلى أن متممة الفئة  $B$  هي  $A \setminus B$  ويرمز لها  $\mathcal{C}(B)$ . بالرجوع إلى شكل ١ - ١ نلاحظ أن العناصر  $x$  التي تحقق (١) تنتمي إلى  $A \cap B$ ، وتلك التي تحقق (٢) تنتمي إلى  $A \setminus B$ ، وتلك التي تحقق (٣) تنتمي إلى  $B \setminus A$ . سنوضح الآن أن  $A$  هو اتحاد الفئتين  $A \cap B$  و  $A \setminus B$



$A \setminus B$    
(شكل ١ - ٤) المتمم النسبي

١ - ٧ نظرية. الفئات  $A \cap B$ ،  $A \setminus B$  غير متقاطعة ويكون :

$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$$

البرهان. بفرض  $x \in A \cap B$  و  $x \in A \setminus B$ . وبما سبق يتبين أن  $x \in A$ ،  $x \notin B$ ، وهذا يناقض العلاقة  $x \in A \cap B$ . إذن الفئتان مفصولتان إذا كان  $x \in A$  فحينئذ إما  $x \in B$  أو  $x \notin B$ . في الحالة السابقة  $x \in A$ ،  $x \in B$  أي أن  $x \in A \cap B$ . وأخيراً  $x \in A$  و  $x \notin B$  أي أن  $x \in A \setminus B$ . وهذا يوضح أن  $A$  هي فئة جزئية من  $(A \cap B) \cup (A \setminus B)$ . وبالعكس، إذا كان  $y \in (A \cap B) \cup (A \setminus B)$  فإن إما  $y \in A \cap B$  أو  $y \in A \setminus B$ . في أي حالة يكون  $y \in A$ ، مما يثبت أن  $(A \cap B) \cup (A \setminus B)$  هي فئة جزئية من  $A$ . وهو المطلوب إثباته.

الآن سنذكر نص قوانين دي مورجان (\*) لثلاث فئات وصيغة أكثر تعميماً ستعطى في التمارين.

(\*) أجسطس دي مورجان (١٨٠٦ - ١٨٧٢) تعلم في كلية جامعية، لندن. كان رياضياً وعالمًا من علماء المنطق الرياضي وقد مهد الطريق لعلم المنطق الرياضي الحديث.



٨ - ١ نظرية . إذا كان  $A, B, C$  أى ثلاث فئات فإن :

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

البرهان . سنوضح العلاقة الأولى وسنترك العلاقة الثانية كتمرين للقارئ .

ولإثبات تساوى الفئات سنبين أن كل عنصر في  $A \setminus (B \cup C)$  يكون محتوياً في كل من  $(A \setminus B)$  و  $(A \setminus C)$  وبالعكس .

إذا كانت  $x$  في  $A \setminus (B \cup C)$  ، فإن  $x$  تكون في  $A$  . لكن  $x$  لا تكون في  $B \cup C$  . إذن  $x$  تكون في  $A$  ، لكن  $x$  لا تكون إما في  $B$  وإما في  $C$  ( لماذا ؟ ) . لذلك  $x$  تكون في  $A$  لكن لا تكون في  $B$  و  $x$  تكون في  $A$  ولا تكون في  $C$  . أى إن  $x \in A \setminus B$  ،  $x \in A \setminus C$  مما يثبت أن  $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$  .

وبالعكس ، إذا كانت  $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$  ، فإن  $x \in (A \setminus B)$  و  $x \in (A \setminus C)$  أى  $x \in A$  وكلا من  $x \notin B$  ،  $x \notin C$  ومن ذلك ينتج أن  $x \in A$  و  $x \notin (B \cup C)$  مما يثبت أن  $x \in A \setminus (B \cup C)$  .

بما أن الفئتين  $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$  و  $A \setminus (B \cup C)$  تحتويان نفس العناصر فيكونان متساويين من التعريف ١ - ١ .

## حاصل الضرب الكارتيزي :

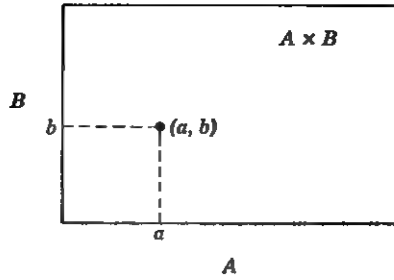
الآن سنعرف حاصل الضرب الكارتيزي (\*\*) لفئتين

٩ - ١ تعريف . إذا كانت  $A$  و  $B$  فئتين غير خاليتين فإن حاصل الضرب الكارتيزي للفئتين  $A$  و  $B$  هي فئة جميع الأزواج المرتبة  $(a, b)$  حيث  $a \in A$  ،  $b \in B$  ( انظر شكل ١ - ٥ ) .

( التعريف المعطى حالياً غير مثالى أو غير كاف ما لم تعرف ما المقصود بالأزواج المرتبة ) ونحن سوف لا نفحص الموضوع أكثر من ذلك باستثناء الإشارة إلى أن الزوج المرتب  $(a, b)$  يمكن تعريفه كقائمة عناصرها المنفردة هي  $\{a\}$  ،  $\{a, b\}$  . ويمكن إثبات أن الزوج المرتب  $(a, b)$  ، الزوج المرتب  $(a', b')$  يكونان متساويين إذا وإذا فقط كان  $a = a'$  ،  $b = b'$  . هذه هي الخاصية الأساسية للأزواج المرتبة .

---

(\*\*) رينيه ديكارت ( ١٥٦٦ - ١٦٥٠ ) مؤسس علم الهندسة التحليلية ، وكان رجلاً فرنسياً مهذباً / جندياً ورياضياً وكان من أعظم فلاسفة عصره .



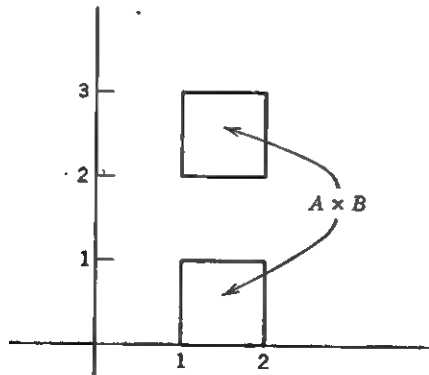
(شكل ٥ - ١) حاصل الضرب الكارتيبي

أى إنه إذا كانت  $B = \{4, 5\}$  و  $A = \{1, 2, 3\}$  ، فإن الفئة  $A \times B$  هي الفئة التى عناصرها هي الأزواج المرتبة .

$(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)$

يمكننا رؤية الفئة  $A \times B$  كقائمة مكونة من ست نقط فى المستوى إحداثياتها هي التى دونناها حالا .

نحن غالباً نرسم شكلاً توضيحياً (مثل شكل ٥ - ١) لنوضح حاصل الضرب الكارتيبي للفئتين  $A$  و  $B$  . كيفما كان فن المؤكد أن الشكل التوضيحي يمكن أن يكون للتبسيط تقريباً . مثال ذلك ، إذا كان  $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\}$  ،  $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$  أو  $2 \leq x \leq 3$  فحينئذ بدلا من مستطيل ، نرسم تخطيطاً مثل شكل ٦ - ١ .



(شكل ٦ - ١) حاصل الضرب الكارتيبي

## تمريعات :

- ١- ( ا ) ارسم شكلا لتمثيل كل فئة مشار إليها في نظرية ١ - ٥ .
- ١- ( ب ) أثبت الجزء ( ج ) من نظرية ١ - ٥ .
- ١- ( ج ) أثبت الجزء الثاني من ( د ) من نظرية ١ - ٥ .
- ١- ( د ) أثبت أن  $A \subseteq B$  إذا وإذا فقط  $A \cap B = A$  .
- ١- ( هـ ) بين أن الفئة  $D$  التي كل عناصرها تنتمي إما إلى  $A$  أو إلى  $B$  ولكن لا تنتمي إلى كليهما هي

$$D = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

- هذه الفئة  $D$  غالباً تسمى اختلافاً ماثلاً للفئتين  $B$  و  $A$  . مثلها بشكل توضيحي
- ١- ( و ) وضع أن الاختلاف المتماثل  $D$  ، المعروف في التمرين السابق هو أيضاً :

$$D = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

- ١- ( ز ) إذا كانت  $B \subseteq A$  ، فبين أن  $B = A \setminus (A \setminus B)$  .
- ١- ( ح ) إذا كانت  $B$  و  $A$  أي فئتين ، فبين أن  $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$  .
- ١- ( ط ) إذا كانت  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  مجموعة من الفئات ، وإذا كانت  $E$  أي فئة فبين أن

$$E \cap \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n (E \cap A_i), \quad E \cup \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n (E \cup A_i)$$

- ١- ( ي ) إذا كانت  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  مجموعة من الفئات ، وإذا كانت  $E$  أي فئة فبين أن

$$E \cap \bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n (E \cap A_i), \quad E \cup \bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n (E \cup A_i)$$

- ١- ( ك ) بفرض أن  $E$  فئة ،  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  مجموعة من الفئات فحقق قوانين دي مورجان

$$E \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n (E \setminus A_i), \quad E \setminus \bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n (E \setminus A_i)$$

- لاحظ أنه إذا كان  $E \setminus A_i$  يعبر عنها بالمقدار  $\mathcal{G}(A_i)$  فإن هذه العلاقات تأخذ الصورة

$$\mathcal{G}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{G}(A_i), \quad \mathcal{G}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{G}(A_i)$$

- ١- ( ل ) بفرض  $J$  هي أي فئة ولكل عنصر  $j \in J$  ، وبفرض  $A_j$  محتوية في  $X$  . فبين أن

$$\mathcal{C}(\cap\{A_j : j \in J\}) = \cup\{\mathcal{C}(A_j) : j \in J\}$$

$$\mathcal{C}(\cup\{A_j : j \in J\}) = \cap\{\mathcal{C}(A_j) : j \in J\}$$

١ - (م) إذا كانت  $B_1$  ،  $B_2$  فئتين جزئيتين من  $B$  وكانت  $B = B_1 \cup B_2$  فحينئذ :

$$A \times B = (A \times B_1) \cup (A \times B_2)$$

## الباب الثاني — دوال :

سنعود إلى مناقشة المفهوم الأساسي للدالة أو الراسم . وسنبين أن الدالة نوع خاص من الفئة . مع إن وجود تصورات أخرى وهي غالباً افتراضية . كل الأبواب الآتية ستختص بأنواع مختلفة من الدوال ، ولكن هذه ستكون عادة ذات طبيعة تجريدية بدرجة أقل من الموجودة في مقدمة الباب الحاضر .

في الرياضيات منذ قرن كلمة « دالة » عادة يقصد بها صيغة محدودة مثل

$$f(x) = x^2 + 3x - 5$$

الذى يرافق كل عدد حقيقى  $x$  عدد حقيقى آخر  $f(x)$  . وفي الحقيقة أن صيغاً معينة مثل

$$g(x) = \sqrt{x-5}$$

كانت لا تعطى أعداداً حقيقية لجميع القيم الحقيقية للمقدار  $x$  وكانت معروفة طبعاً ولكن كانت لا تعتبر أساساً كافياً تحتاج إليه فكرة امتداد تعريف الدالة . ومعتبلاً ظهور جدل بين الرياضيين حول كون القيمة المطلقة .

$$h(x) = |x|$$

للعدد الحقيقى « دالة غير متميزة » أم لا . وبعد كل ذلك فتعريف  $|x|$  المعطى في « أجزاء » هو

$$|x| = \begin{cases} x & \text{إذا كانت } x \geq 0 \\ -x & \text{إذا كانت } x < 0 \end{cases}$$

ومع تطوير الرياضيات أصبح بوضوح زائد عن الحاجة إلى أن الدالة تكون صيغة مقيدة أكثر من اللازم لأن تعريفاً أكثر عموماً يكون مقيداً . ومن الواضح أيضاً أصبح هاماً أن نفرق بوضوح بين الدالة نفسها وبين قيمة الدالة . ومن المحتمل أن يجد القارئ نفسه في موقف الرياضى منذ قرن في هذين الاعتبارين بدون خطأ منه . سنقترح إعادة القارئ إلى تاريخ استخدام وتعريف الدوال الحالى ولكن سنفعل ذلك في خطوتين .

تعريفنا المنقح للدالة سيكون :

الدالة  $f$  من الفئة  $A$  إلى الفئة  $B$  هي قاعدة الاتصال التي تخصص لكل  $x$  في فئة جزئية معينة  $D$  من  $A$  عنصراً معيناً وحيداً  $f(x)$  من  $B$  .

بالتأكيد الصيغ الصريحة من النوع المشار إليه أعلى محتوية في هذا التعريف التجريبي .  
والتعريف المقترح يسمح بإمكانية عدم تعريف الدالة لعناصر معينة من  $A$  وأيضاً يسمح باعتبار الدوال التي فيها الفئتان  $B$  و  $A$  ليست ضرورياً أعداداً حقيقية ( لكن ربما تكون أدراج وكراسي - أوقطط وكلاب ) .

مهما كان التعريف المقترح مقنعاً فإن به نقصاً له أهمية فهو ليس واضحاً . ستظل صعوبة تفسير العبارة « قاعدة الاتصال » وبدون شك يمكن للقارئ أن يفكر في تعبير يقنعه أفضل من السابق لكن ليس من المحتمل أنه سيزيل عدم الوضوح والضباب تماماً . وأحسن حل مقنع يبدو في تعريف « الدالة » بدلالة الفئات . والرموز والدلالات المذكورة في الباب السابق ذكره وهذه لها عدم فائدة لكونها غير حقيقية وفقدانها بعض الاكتفاء الوجداني بالوصف الأول ولكن الفائدة من الزيادة في الوضوح تتغلب على هذا النقص .

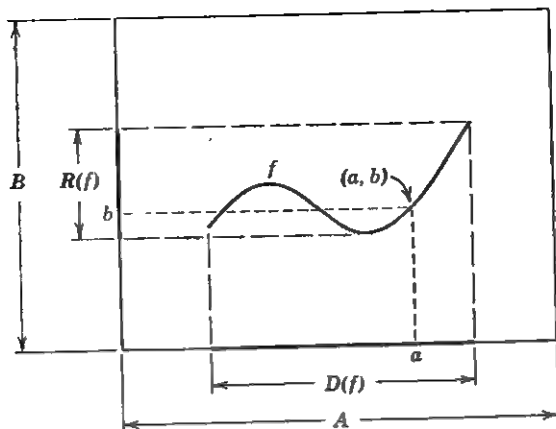
ومفتاح الفكرة هو التفكير في رسم يبين للدالة أى التفكير في مجموعة من الأزواج المرتبة ونلاحظ أن مجموعة اختيارية من الأزواج المرتبة لا يمكن أن تكون رسم دالة لأنه إذا عرف العنصر الأول من الزوج المرتب فإن العنصر الثاني يكون محدداً وحيداً .

٢ - ١ : تعريف . بفرض  $B$  و  $A$  فئتين ( ليسا من الضروري متباينتين ) فإن دالة من  $A$  إلى  $B$  هي فئة الأزواج المرتبة  $f$  في  $A \times B$  مع خاصية أنه إذا كانت  $(a, b)$  ،  $(a, b')$  عنصرين من  $f$  فعينئذ  $b = b'$  . الفئة لكل العناصر للفئة  $A$  والتي توجد كالأعضاء الأولى من العناصر في  $f$  تسمى النطاق للفئة  $f$  ويرمز لها بالرمز  $D(f)$  . الفئة التي كل عناصرها من  $B$  والتي توجد كالأعضاء الثانية من العناصر في  $f$  تسمى مدى الفئة  $f$  ( أو الفئة لقيم  $f$  ) ويرمز لها  $R(f)$  . وفي حالة  $D(f) = A$  ، فإننا غالباً نقول إن  $f$  راسم  $A$  إلى  $B$  ( أو راسم  $A$  إلى  $B$  ) ونكتب  $f: A \rightarrow B$  .

إذا كانت  $(a, b)$  عنصراً من دالة  $f$  ، فن المعتاد أن نكتب :

$$f: a \mapsto b \quad \text{أو} \quad b = f(a)$$

بدلاً من  $(a, b) \in f$  . نحن غالباً نشير إلى العنصر  $b$  كقيمة  $f$  عند النقطة  $a$  أو صورة  $a$  بواسطة الدالة  $f$  .



(شكل ٢ - ١) دالة كرم بياني

### تمثيل جدولى :

يمكن تصور الدالة كرم بياني وهناك طريقة أخرى وهى هامة وممتشرة الاستعمال وهى كجدول . اعتبر جدول ٢ - ١ الموجود فى صفحة الترتيب الرياضية من مجلة فوسلاند بوجل .

النطاق لدالة هذه الضربات الحرة  $f$  يتكون من التسعة لاعبين

$$D(f) = \{\text{Anderson, Bade, Bateman, Hochschild, Kakutani, Kovalevsky, Osborn, Peressini, Rosenberg}\}$$

بينما المدى للدالة يتكون من الست أعداد .

$$R(f) = \{0, 1, 2, 4, 5, 8\}$$

العناصر الفعلية للدالة هى الأزواج المرتبة

$$\begin{aligned} &(\text{Anderson}, 2), (\text{Bade}, 0), (\text{Bateman}, 5), \\ &(\text{Hochschild}, 1), (\text{Kakutani}, 4), (\text{Kovalevsky}, 8), \\ &(\text{Osborn}, 0), (\text{Peressini}, 2), (\text{Rosenberg}, 4) \end{aligned}$$

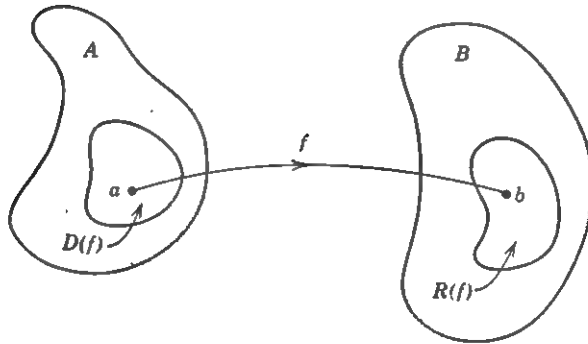
فى مثل هذا التمثيل الجدولى نكتب عادة فقط النطاق للدالة فى العمود الأيسر ، لأنه لا توجد حاجة للإشارة إلى الأعضاء من الفريق التى لم تلعب ( ويمكن أن نقول قيمة الضربات الحرة للدالة  $f$  عند Anderson هى 2 ونكتب  $f(\text{Anderson}) = 2$  أو  $\text{Anderson} \rightarrow 2$  وهكذا .



نحن جميعاً متادون على استعمال مثل الجداول لنقل المعلومات . وهى أمثلة هامة للسوال وهى عادة ذات طبيعة من الصعب التعبير عنها بدلالة صيغة .

( جدول ٢ - ١ )

اللاعب	عدد الضربات الحرة
Anderson	2
Bade	0
Bateman	5
Hochschild	1
Kakutani	4
Kovalevsky	8
Osborn	0
Peressini	2
Rosenberg	4

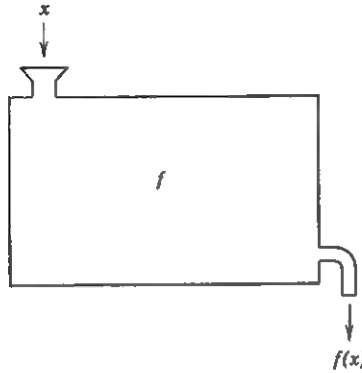


( شكل ٢ - ٢ ) دالة مثل تحويل

## تحويلات وآلات :

توجد طريقة أخرى لتصوير الدالة : مثل تحويل جزء من الفئة  $A$  إلى جزء من الفئة  $B$  وبعبارة أم إذا كانت  $(a, b) \in f$  فتفكيرنا عن  $f$  هو أخذ عنصر  $a$  من الفئة الجزئية  $D(f)$  من  $A$  وتحويله أو نقله براسم إلى عنصر  $b = f(a)$  في الفئة الجزئية  $R(f)$  للمقدار  $B$  . ونرسم غالباً شكلاً توضيحياً مثل شكل ٢ - ٢ . وتستعمل كثيراً هذا التمثيل الهندسى للدالة حتى إذا كانت الفئتان  $A$  و  $B$  ليست فئات جزئية من المستوى .

وتوجد طريقة أخرى لتصوير الدالة وذلك مثل الآلة التي سوف تستقبل عناصر  $D(f)$  لتدخل فيها ثم تخرج منها بعد ميكنتها عناصر مناظرة في الفئة الجزئية  $R(f)$  . أى إنه إذا أخذنا العنصر  $x$  من  $D(f)$  ووضع في  $f$  فحينئذ يخرج بالقيمة المناظرة  $f(x)$  . وإذا وضعنا عنصراً مختلفاً  $y$  من  $D(f)$  في  $f$  نحصل على  $f(y)$  (الذى ربما يختلف أولاً يختلف عن  $f(x)$ ) . إذا حاولنا إدخال شيء ما لا ينتمى إلى  $D(f)$  في  $f$  فنجد عدم قبوله وذلك لأن قدرة  $f$  هي التأثير فقط على العناصر التي تنتمى إلى  $D(f)$  .  
( انظر شكل ٢ - ٣ )



( شكل ٢ - ٣ ) دالة مثل آلة

وهذا التصور الأخير يوضح بجملة التمييز بين  $f$  ،  $f(x)$  . الأول الآلة والثاني هو نتاج الآلة عند وضع  $x$  فيها . ومن المفيد مؤكداً التمييز بين الآلة وإنتاجها . الشخص الأبله فقط هو الذى يرتبك ويختار بين آلة فرم اللحم ( المفرمة ) واللحم المفروم . مهما كان فهناك كثيرون يخلطون بين الدوال وقيمها الأمر الذى يبين أهمية بذل مجهود بسيط للتمييز بينهما رمزياً .

### قيود الدوال وامتداداتها :

إذا كانت  $f$  دالة نطاقها  $D(f)$  ،  $D_1$  فترة جزئية من  $D(f)$  ، فإنه من المفيد أحياناً تعريف الدالة الجديدة  $f_1$  التي نطاقها  $D_1$  بأن  $f_1(x) = f(x)$  وذلك لكل  $x \in D_1$  . هذه الدالة  $f_1$  تسمى التقييد أو الحصر للدالة  $f$  في الفترة  $D_1$  . وبدلالة تعريف ٢ - ٢ يكون :

$$f_1 = \{(a, b) \in f : a \in D_1\}$$

أحيانا نكتب  $f_1 = f|D_1$  للإشارة إلى قيد الدالة  $f$  إلى الفئة  $D_1$  .

وهناك تركيب مماثل ( يبدو أنه قريب من الحقيق ) وهو الإشارة إلى ( امتداد ) ، فإذا كانت  $g$  دالة بنطاق  $D(g)$  ، فإن أى دالة  $g_2$  بنطاق  $D_2$  بحيث أن  $D_2 \supseteq D(g)$  ،  $g_2(x) = g(x)$  لجميع قيم  $x \in D(g)$  تسمى امتداد الدالة  $g$  الفئة  $D_2$  .

## تركيب الدوال :

نحن الآن نريد أن نركب دالتين أولا باستخدام  $f$  لكل  $x$  في  $D(f)$  وبعد ذلك باستخدام  $g$  إلى  $f(x)$  إذا كان ذلك ممكنا ( أى إن عندما  $f(x)$  تنتمي إلى  $D(g)$  ) . لإجراء هذا نحتاج إلى العناية بفحص النطاق للدالة المحصلة . فمثلا ، إذا كانت  $f$  معرفة على  $R$  بواسطة  $f(x) = x^3$  وكانت  $g$  معرفة للقيمة  $x \geq 0$  بالتعريف  $g(x) = \sqrt{x}$  فتركيب  $g \circ f$  يمكن تعريفه فقط عندما  $x \geq 0$  وهذه الأعداد الحقيقية فإن قيمتها هي  $\sqrt{x^3}$  .

٢ - ٢ تعريف . بفرض أن  $f$  دالة بالنطاق  $D(f)$  في  $A$  والمدى  $R(f)$  في  $B$  وبفرض أن  $g$  دالة نطاقها  $D(g)$  في  $B$  ومدنها  $R(g)$  في  $C$  . ( انظر شكل ٢ - ٤ ) فإن تركيب  $g \circ f$  ( لاحظ الرتبة ) هي الدالة من  $A$  إلى  $C$  المعطاة المعرفة .

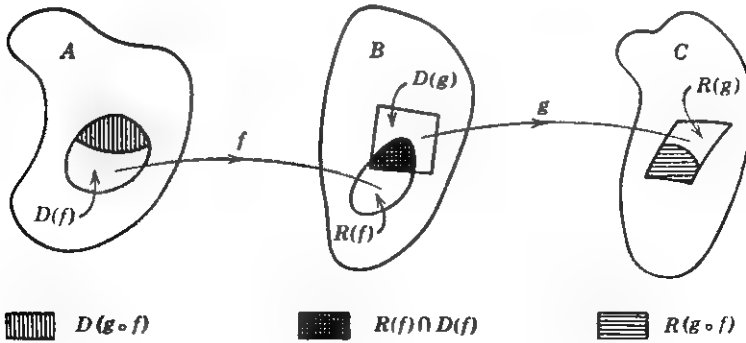
$$b \in B \text{ حيث يوجد عنصر } g \circ f = (a, c) \in A \times C$$

$$\text{بحيث أن } (a, b) \in f \text{ و } (b, c) \in g$$

٢ - ٣ نظرية . إذا كانت  $f, g$  دالتين ، فإن تحصيل  $g \circ f$  هو الدالة ذات

$$D(g \circ f) = \{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\}$$

$$R(g \circ f) = \{g(f(x)) : x \in D(g \circ f)\}$$



( شكل ٢ - ٤ ) تركيب الدوال

٧-٤ أمثلة . ( أ ) بفرض  $g$  و  $f$  دالتين قيمتهما عند العدد الحقيقي  $x$  هما الأعداد الحقيقية المعطاة بما يلي (\*)

$$f(x) = 2x, \quad g(x) = 3x^2 - 1$$

بما أن  $D(g)$  هي الفئة  $R$  لجميع الأعداد الحقيقية  $R(f) \subseteq D(g)$  النطاق  $D(g \circ f)$  هو أيضاً  $R$  و  $g \circ f(x) = 3(2x)^2 - 1 = 12x^2 - 1$  ومن ناحية أخرى  $D(f \circ g) = R$  لكن  $f \circ g(x) = 2(3x^2 - 1) = 6x^2 - 2$

(ب) إذا كانت  $h$  هي الدالة حيث  $D(h) = \{x \in R : x \geq 1\}$  المعرفة بالمقدار

$$h(x) = \sqrt{x-1}$$

وإذا كانت  $f$  مثل ( أ ) ، فإن  $D(h \circ f) = \{x \in R : 2x \geq 1\} = \{x \in R : x \geq \frac{1}{2}\}$  ،  $h \circ f(x) = \sqrt{2x-1}$  أيضاً  $D(f \circ h) = \{x \in R : x \geq 1\}$  ،  $f \circ h(x) = 2\sqrt{x-1}$  ، إذا كانت  $g$  هي الدالة في الجزء ( أ ) ، فإن :

$$D(h \circ g) = \{x \in R : 3x^2 - 1 \geq 1\} = \{x \in R : x \leq -\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ أو } x \geq \sqrt{\frac{2}{3}}\}$$

أو  $D(g \circ h) = \{x \in R : x \geq 1\}$  أيضاً  $h \circ g(x) = \sqrt{3x^2 - 2}$  ،  $g \circ h(x) = 3x - 4$  لاحظ أن الصيغة المعبرة  $g \circ h$  لها معنى لقيم  $x$  غير التي في نطاق  $g \circ h$  .

(ج) بفرض  $G$  و  $F$  دوال بالتقاطعين :  $D(F) = \{x \in R : x \geq 0\}$  ،  $D(G) = R$  بحيث أن قيم  $F$  ،  $G$  عند النقطة  $x$  في نطاقهما هي :

$$F(x) = \sqrt{x}, \quad G(x) = -x^2 - 1$$

فإن  $D(G \circ F) = \{x \in R : x \geq 0\}$  ،  $G \circ F(x) = -x - 1$  بينما :

$D(F \circ G) = \{x \in D(G) : G(x) \in D(f)\}$  هذه الفئة الأخيرة تكون خالية مثل  $G(x) < 0$  لكل  $x \in D(G)$  . أي إن الدالة  $F \circ G$  غير معرفة عند أي نقطة لذلك تكون  $F \circ G$  هي دالة شاغرة .

## الدوال الانخالية والدوال العكسية :

سنطلى طريقة تكون دالة جديدة من الدالة المعطاة في حالة كون الدالة الأصلية لا تأخذ نفس القيمة مرتين .

(\*) نحن أيضاً نين هذا بكتابة :  $f: x \rightarrow 2x$  ،  $g: x \rightarrow 3x^2 - 1$  عند  $x \in R$  .

٢ - ٥ تعريف . بفرض  $f$  دالة نطاقها  $D(f)$  في  $A$  ومداها  $R(f)$  في  $B$  .  
فإننا نقول إن الدالة  $f$  دالة إدخالية أو واحد - واحد إذا كان عندما  $(a, b)$  ،  $(a', b')$  عناصر من  $f$  فإن  $a = a'$  . إذا كانت  $f$  دالة إدخالية فيمكننا أن نقول إن  $f$  إدخال أو حقنة .

ويعني آخر الدالة تكون  $f$  إدخالية إذا وإذا فقط كانت العلاقات  $f(a) = b, f(a') = b$  تعني ضمناً أن  $a = a'$  . وبالتناوب تكون الدالة  $f$  إدخالية إذا وإذا فقط عندما  $a, a'$  يكونان في  $D(f)$  ،  $a \neq a'$  فإن  $f(a) \neq f(a')$  .

نحن على حق في حالة أنه إذا كانت  $f$  دالة إدخالية من  $A$  إلى  $B$  فإن الفئة من الأزواج المرتبة في  $B \times A$  التي يحصل عليها بإبدال العضو الأول والعضو الثاني من الأزواج المرتبة في  $f$  تنتج دالة  $g$  التي هي أيضاً دالة إدخالية .

سنحذف برهان هذا الفرض وسيترك كتمرين وهو اختبار جيد للقارئ . العلاقات بين  $f$  ،  $g$  هي :

$$D(g) = R(f), \quad R(g) = D(f)$$

$$(b, a) \in g \quad \text{إذا وإذا فقط} \quad (a, b) \in f$$

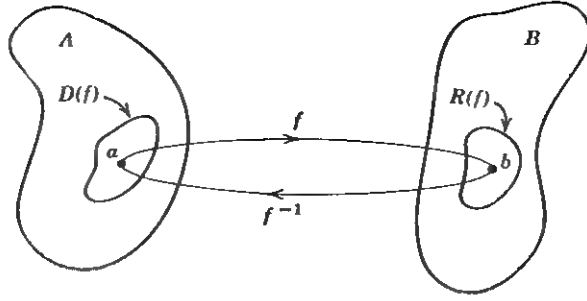
هذا النص الأخير يمكن كتابته على الصورة العادية

$$a = g(b) \quad \text{إذا وإذا فقط} \quad b = f(a)$$

٢ - ٦ تعريف . بفرض أن  $f$  دالة إدخالية لها نطاقها  $D(f)$  في  $A$  ومداها  $R(f)$  في  $B$  وبفرض أنه إذا كانت  $g = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in f\}$  فإن  $g$  تكون إدخالية نطاقها  $D(g) = R(f)$  في  $B$  ومداها  $R(g) = D(f)$  في  $A$  . الدالة  $g$  تسمى بالدالة المعكوسة للدالة  $f$  ويرمز لها بالرمز  $f^{-1}$  .

الدالة المعكوسة يمكن تفسيرها من وجهة نظر الراسم . ( انظر شكل ٢ - ٥ ) . إذا إذا كانت  $f$  دالة إدخالية فترسم عناصر مميزة من  $D(f)$  إلى عناصر مميزة من  $R(f)$  . أي إن كل عنصر  $b$  من  $R(f)$  هو صورة تحت  $f$  للعنصر الوحيد  $a$  في  $D(f)$  . الدالة المعكوسة  $f^{-1}$  ترسم العنصر  $b$  إلى العنصر الوحيد  $a$  .

٢ - ٧ أمثلة . ( ١ ) بفرض  $F: x \mapsto x^2$  دالة نطاقها  $D(F) = R$  ، الفئة لجميع الأعداد الحقيقية ، والمدى في  $R$  بحيث أن القيمة المقدار  $F$  عند العدد الحقيقي  $x$  هي  $F(x) = x^2$  . ( وبمعنى آخر  $F$  تكون الدالة  $\{(x, x^2) : x \in R\}$  . من الواضح أن  $F$  ليست واحدا -



(شكل ٢-٥) الدالة العاكسة

واحداً . وفي الحقيقة الأزواج المرتبة  $(-2, 4), (2, 4)$  كلاهما ينتميان إلى  $F$  .  
وبما أن  $F$  ليست واحداً - واحداً فليس لها دالة عكسية .

(ب) بفرض أن  $f$  الدالة التي نطاقها  $R(f) = \mathbf{R}$  و  $D(f) = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$  التي قيمتها عند  $x$  في  $D(f)$  هي  $f(x) = x^2$  . لاحظ أن  $f$  هي قيد  $D(f)$  للدالة  $F$  المذكورة في جزء (أ) . بدلالة الأزواج المرتبة  $f = \{(x, x^2) : x \in \mathbf{R}, x \geq 0\}$  بخلاف الدالة  $F$  في الجزء (أ) تكون  $f$  دالة إدخالية لأنه إذا كانت  $x^2 = y^2$  مع  $x, y$  في  $D(f)$  فإن  $x = y$  . ( لماذا ؟ ) لذلك  $f$  لها دالة عكسية  $g$  لها :

$$R(g) = D(f) = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\} \quad , \quad D(g) = R(f) = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$$

وبالإضافة إلى ذلك  $y = x^2 = f(x)$  إذا وإذا فقط  $x = g(y)$  . هذه الدالة العكسية  $g$  عادة تسمى دالة الجذر التربيعي الموجب ويرمز لها :

$$g(y) = \sqrt{y}, \quad y \in \mathbf{R}, \quad y \geq 0$$

(ج) إذا كانت  $f_1$  هي الدالة  $\{(x, x^2) : x \in \mathbf{R}, x \leq 0\}$  فحينئذ كما في (ب) ، تكون  $f_1$  دالة واحداً - واحداً ولها نطاق  $D(f_1) = \{x \in \mathbf{R} : x \leq 0\}$  ومدى  $R(f_1) = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$  . لاحظ أن  $f_1$  هي قيد  $D(f_1)$  للدالة  $F$  المذكورة في الجزء (أ) . الدالة  $g_1$  الدالة العكسية للدالة  $f_1$  تسمى دالة الجذر التربيعي السالب ويرمز لها

$$g_1(y) = -\sqrt{y}, \quad y \in \mathbf{R}, \quad y \geq 0$$

بحيث أن  $g_1(y) \leq 0$  .

(د) دالة الجيب  $F$  أي جا  $F$  في حساب المثلثات حيث  $D(F) = \mathbf{R}$  و  $R(F) = \{y \in \mathbf{R} : -1 \leq y \leq +1\}$  معروفة جيداً بأنها ليست دالة إدخالية ( مثال

ذلك  $\sin 0 = \sin 2\pi = 0$  . لكن إذا كانت  $f$  هي تقييدها للفترة  $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : -\pi/2 \leq x \leq +\pi/2\}$  حينئذ تكون  $f$  ادخالية ومن ثم يكون لها عكسية  $g$  حيث  $R(g) = D(f)$  ،  $D(g) = R(f)$  أيضا  $y = \sin x$  حيث  $x \in D(f)$  إذا وإذا فقط كانت  $x = g(y)$  . الدالة  $g$  تسمى (الفرع الأساسي) لدالة الجيب العكسية وغالبا يرمز لها بالرمز

$$g(y) = \sin^{-1} y \quad \text{أو} \quad g(y) = \text{Arc sin } y$$

### الدوال فوقية والدوال تناظر أحادية :

٢-٨ تعريف . بفرض أن  $f$  دالة نطاقها  $D(f) \subseteq A$  ومداها  $R(f) \subseteq B$  . فنقول إن  $f$  دالة فوقية أو أن  $f$  ترتسم فوق  $B$  في حالة كون المدى  $R(f) = B$  . وإذا كانت  $f$  دالة فوقية فن الممكن أن نقول إن  $f$  تكون فوق .

من المهم عند تعريف الدالة أن نحدد نطاق الدالة والفترة التي عناصرها هي القيم المأخوذة . وعند عمل هذا يكون من الممكن أن نستطلع ما إذا كانت الدالة فوقية أم لا .

٢-٩ تعريف . يقال للدالة  $f$  التي نطاقها  $D(f) \subseteq A$  ومداها  $R(f) \subseteq B$  إنها دالة أحادية إذا كانت (i) ادخالية (أي أنها واحد - واحد) ، (ii) فوقية (أي أن  $D(f)$  ترتسم فوق  $B$ ) . وإذا كانت  $f$  أحادية فيمكننا أن نقول إن  $f$  تناظر أحادي .

### الصور المباشرة والعكسية :

بفرض أن  $f$  دالة اختيارية نطاقها  $D(f)$  في  $A$  ومداها  $R(f)$  في  $B$  . سوف لا نفترض أن  $f$  ادخالية .

٢-١٠ تعريف . إذا كانت  $E$  فئة جزئية من  $A$  ، فإن الصورة المباشرة للفئة الجزئية  $E$  بواسطة  $f$  هي الفئة الجزئية  $R(f)$  المطاة كما يلي :

$$\{f(x) : x \in E \cap D(f)\}$$

نحن عادة نشير للصورة المباشرة لفئة  $E$  تحت  $f$  بالرمز  $f(E)$  . (انظر شكل ٢-٦) .

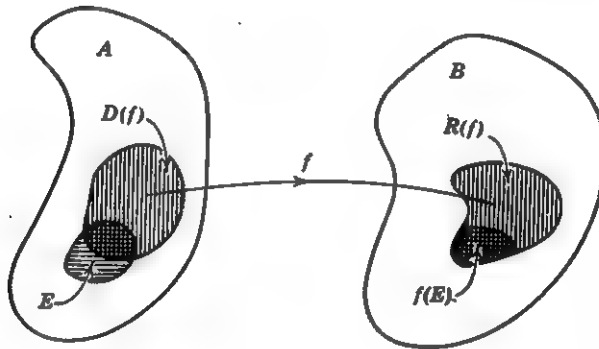
من الملاحظ أنه إذا كانت  $E \cap D(f) = \emptyset$  فإن  $f(E) = \emptyset$  . إذا كانت  $E$  تحتوي على النقطة الوحيدة  $p$  في  $D(f)$  فإن الفئة  $f(E)$  تحتوي على النقطة الوحيدة  $f(p)$  . تحتفظ الفئات ببعض خواصها تحت الصورة المباشرة كما نوضح الآن .

٢-١١ نظرية . بفرض أن  $f$  دالة نطاقها في  $A$  ومداها في  $B$  وبفرض أن  $E, F$  فئتان جزئيتان من  $A$  . فإن

$$\begin{aligned} (أ) \quad E \subseteq F, \text{ then } f(E) \subseteq f(F) & \quad (ب) \quad f(E \cap F) \subseteq f(E) \cap f(F) \\ (ج) \quad f(E \cup F) = f(E) \cup f(F) & \quad (د) \quad f(E \setminus F) \subseteq f(E) \end{aligned}$$

البرهان . ( أ ) إذا كانت  $x \in E$  فإن  $x \in F$  وحينئذ  $f(x) \in f(F)$  ، وحيث أن هذا صحيح لجميع قيم  $x \in E$  فينتج أن  $f(E) \subseteq f(F)$  .

( ب ) بما أن  $E \cap F \subseteq E$  فينتج من الجزء ( أ ) أن  $f(E \cap F) \subseteq f(E)$  وبالمثل  $f(E \cap F) \subseteq f(F)$  ولذلك نستنتج أن  $f(E \cap F) \subseteq f(E) \cap f(F)$



( شكل ٢-١ ) الصورة المباشرة

( ج ) بما أن  $E \subseteq E \cup F$  ،  $F \subseteq E \cup F$  فينتج من الجزء ( أ ) أن  $f(E) \subseteq f(E \cup F)$  وبالمعكس إذا كانت  $y \in f(E \cup F)$  فيحينئذ يوجد عنصر  $x \in E \cup F$  بحيث أن  $y = f(x)$  . وبما أن  $x \in E$  أو  $x \in F$  فينتج أن إما  $y = f(x) \in f(E)$  أو  $y \in f(F)$  .

لذلك نستنتج أن  $f(E \cup F) \subseteq f(E) \cup f(F)$  الذي يكمل برهان الجزء ( ج ) .

( د ) الجزء ( د ) ينتج مباشرة من الجزء ( أ )

وهو المطلوب إثباته

سيوضح في تمرين ( ٢ - ٥ ) أنه بوجه عام من غير الممكن استبدال علامة الحصر في ( ب ) بعلامة التساوي .



الآن نقدم مدلول الصورة العكسية تحت دالة . لاحظ أنه ليس من المطلوب أن تكون الدالة إدخالية .

٢-١٢ تعريف . إذا كانت  $H$  فئة جزئية من  $B$  ، فإن الصورة العكسية للفئة الجزئية  $H$  تحت  $f$  هي الفئة الجزئية  $D(f)$  المغطاة في الصورة :

$$\{x : f(x) \in H\}$$

نحن عادة نرمز للصورة العكسية لفئة  $H$  تحت  $f$  بالرمز  $f^{-1}(H)$  .  
( انظر شكل ٢-٧ ) .

مرة أخرى ، نؤكد أن  $f$  لا تحتاج أن تكون دالة إدخالية حتى لا نحتاج إلى وجود الدالة العكسية  $f^{-1}$  . ( لكن إذا كانت  $f^{-1}$  موجودة فإن  $f^{-1}(H)$  هي الصورة المباشرة للفئة  $H$  تحت  $f^{-1}$  ) .

٢-١٣ نظرية . بفرض أن  $f$  هي دالة نطاقها في  $A$  ومداها في  $B$  ونفرض أن  $G$  و  $H$  هما فئتان جزئيتان من  $B$  . فإن

( أ ) إذا كان  $G \subseteq H$  فإن  $f^{-1}(G) \subseteq f^{-1}(H)$

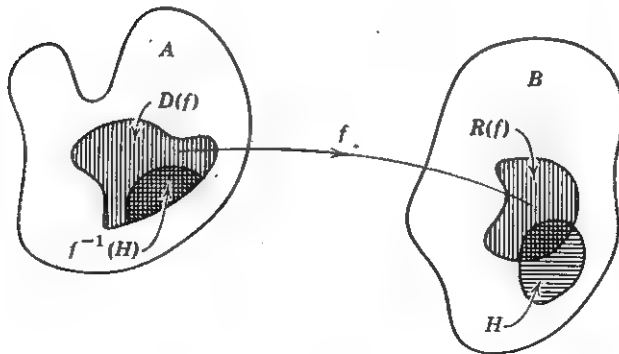
( ب )  $f^{-1}(G \cap H) = f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$

( ج )  $f^{-1}(G \cup H) = f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H)$

( د )  $f^{-1}(G \setminus H) = f^{-1}(G) \setminus f^{-1}(H)$

البرهان . ( أ ) نفرض أن  $x \in f^{-1}(G)$  فيكون  $f(x) \in G \subseteq H$

، حينئذ  $x \in f^{-1}(H)$  ،



( شكل ٢-٧ ) صور عكسية

(ب) بما أن  $G \cap H$  هي فئة جزئية من  $G$  ،  $H$  فينتج من جزء (أ) أن

$$f^{-1}(G \cap H) \subseteq f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$$

وبالعكس ، إذا كانت :  $x \in f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$  فإن  $f(x) \in G$  ،  $f(x) \in H$  ،  
لذلك  $f(x) \in G \cap H$  ،  $x \in f^{-1}(G \cap H)$

(ج) بما أن  $G$  ،  $H$  فئتان جزئيتان من  $G \cup H$  ، فينتج من جزء (أ) أن :

$$f^{-1}(G \cup H) \supseteq f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H)$$

وبالعكس ، إذا كانت  $x \in f^{-1}(G \cup H)$  فإن  $f(x) \in G \cup H$  ومن ذلك ينتج أنه إما  
 $f(x) \in G$  حيث  $x \in f^{-1}(G)$  أو  $f(x) \in H$  وفي هذه الحالة  $x \in f^{-1}(H)$  إذن

$$f^{-1}(G \cup H) \subseteq f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H)$$

(د) إذا كانت  $x \in f^{-1}(G \setminus H)$  فإن  $f(x) \in G \setminus H$  لذلك  $x \in f^{-1}(G)$  ،  
 $x \notin f^{-1}(H)$  ومن ذلك ينتج أن .

$$f^{-1}(G \setminus H) \subseteq f^{-1}(G) \setminus f^{-1}(H)$$

وبالعكس ، إذا كانت  $w \in f^{-1}(G) \setminus f^{-1}(H)$  فإن  $f(w) \in G$  ،  $f(w) \notin H$  ،  
حيث  $f(w) \in G \setminus H$  ومن ذلك ينتج أن .

$$f^{-1}(G) \setminus f^{-1}(H) \subseteq f^{-1}(G \setminus H)$$

وهو المطلوب إثباته

### تمرينات :

٢- (أ) أثبت أن تعريف ٢-٢ ينتج فعلياً دالة وليس بالضغط فئة جزئية .

٢- (ب) . بفرض  $A = B = \mathbb{R}$  واعتبار الفئة الجزئية  $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$   
المقدار  $A \times B$  هل هذه الفئة دالة نطاقها في  $\mathbb{R}$  ومداها في  $\mathbb{R}$  ؟

٢- (ج) باعتبار الفئة الجزئية المقدار  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  المعرفة بما يلي  $D = \{(x, y) : |x| + |y| = 1\}$   
صف هذه الفئة بالكلام ، هل هي دالة ؟

٢- (د) أعط مثالا لدالتين  $g$  و  $f$  على  $\mathbb{R}$  إلى  $\mathbb{R}$  بحيث أن  $f \neq g$  ، ولكن بحيث  
أن  $f \circ g = g \circ f$  .

٢- (أ) أثبت أن إذا كانت  $f$  إدخالية من  $A$  إلى  $B$  فإن :  $f^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in f\}$  دالة وأثبت أنها إدخالية .

٢- (و) بفرض أن  $f$  إدخالية . فاثبت أن  $f^{-1} \circ f(x) = x$  لجميع قيم  $x$  في  $D(f)$  ، وأثبتها أيضاً  $f \circ f^{-1}(y) = y$  لجميع قيم  $y$  في  $R(f)$  .

٢- (ز) بفرض  $f$  ،  $g$  دالتين وبفرض أن  $g \circ f(x) = x$  لجميع قيم  $x$  في  $D(f)$  . أثبت أن  $f$  إدخالية وأن  $R(f) \subseteq D(g)$  ،  $R(g) \supseteq D(f)$  .

٢- (ح) بفرض  $g$  و  $f$  دالتين بحيث أن :

$$g \circ f(x) = x \text{ لجميع قيم } x \text{ في } D(f)$$

$$f \circ g(y) = y \text{ لجميع قيم } y \text{ في } D(g)$$

$$\text{أثبت أن } g = f^{-1}$$

٢- (ط) أثبت أن الصورة المباشرة  $f(E)$  خالية إذا وإذا فقط كانت :  
 $E \cap D(f) = \emptyset$

٢- (ى) بفرض أن  $f$  هي الدالة على  $R$  إلى  $R$  والمعطاة  $f(x) = x^2$  ونفرض :  
 $E \cap F = \{0\}$  فإن  $F = \{x \in R : 0 \leq x \leq 1\}$  ،  $E = \{x \in R : -1 \leq x \leq 0\}$   
 $f(E \cap F) = \{0\}$  بينما  $f(E) = f(F) = \{y \in R : 0 \leq y \leq 1\}$  ومن ذلك استنتج أن  $f(E \cap F)$  هي  
 فئة جزئية فعلية للمقدار  $f(E) \cap f(F)$  . احذف الآن  $O$  من  $E$  ،  $F$  .

٢- (ك) إذا كانت  $F$  و  $E$  و  $f$  كما في تمرين (٢- ط) ، فإن :  
 $E \setminus F = \{x \in R : -1 \leq x < 0\}$  ،  $f(E) \setminus f(F) = \emptyset$  ومن ذلك لا ينتج أن

$$f(E \setminus F) \subseteq f(E) \setminus f(F)$$

٢- (ل) بين أنه إذا كانت  $f$  إدخالية للمقدار  $D(f)$  إلى  $R(f)$  وإذا كانت  $H$  هي  
 فئة جزئية من  $R(f)$  ، فإن الصورة المكمية لفئة الجزئية  $H$  تحت  $f$  تنطبق  
 على الصورة الماكسة لفئة الجزئية  $H$  تحت الدالة الماكسة  $f^{-1}$  .

٢- ٣ إذا كانت  $f$  ،  $g$  كما في تعريف ٢- ٢ فاثبت أن :  $D(g \circ f) = f^{-1}(D(g))$

### الباب الثالث — فئات محدودة وفئات غير محدودة :

الغرض من هذا الباب محدود جداً، وهو لتقديم العبارات منتهية ، معلودة ولا نهائية .  
 هذا الباب سيمدنا بأساس دراسة الأعداد الأصلية ولكنه سوف لا يواصل هذه الدراسة .

ومع أن نظريات الأعداد الأصلية والمادية فاتنة بطبيعتها فإن عوضاً صغيراً جداً لها يكون في الحقيقة حيويًا لموضوعات هذا الكتاب (\*) .

سنفترض تعودنا على فئة الأعداد الطبيعية . وسنرمز لهذه الفئة بالرمز  $N$  ، عناصر فئة الأعداد الطبيعية يرمز لها بالرموز المادية .

1, 2, 3, . . .

إذا كانت  $n, m \in N$  فإننا جميعاً عندنا فكرة بديهية عن المعنى المقصود بقولنا  $n$  أقل من أو تساوى  $m$  وسنستدير هذه الفكرة الآن محققين أن الدقة الكاملة تتطلب تحليلاً أكثر مما أعطينا . سنفترض أن كل فئة جزئية غير خالية للمقدار  $N$  تحتوى على الأقل على عنصر واحد . وهذه هي خاصية هامة للمقدار  $N$  ، أحياناً نقول إن  $N$  جيدة الترتيب بمعنى أن  $N$  لها هذه الخاصية . وهذه أى خاصية حسن الترتيب مكافئة للاستنتاج الرياضى . سنشعر بحيرة استخدام براهين أساسها الاستنتاج الرياضى الذى سنفترض أنه مألوف للقارئ .

يقصد بالقطعة الابتدائية للمقدار  $N$  فئة تتكون من جميع الأعداد الطبيعية التى تكون أقل من أو تساوى عنصراً ثابتاً من عناصر  $N$  . أى إن قطعة ابتدائية  $S_n$  للمقدار  $N$  تحدد عنصراً وتكون محدودة بعنصر مثل  $n$  من عناصر  $N$  كما يلي :

عنصر  $x$  من عناصر  $N$  ينتمى إلى  $S_n$  إذا وإذا فقط كانت  $x \leq n$  .

مثال ذلك : الفئة الجزئية  $S_2 = \{1, 2\}$  هي القطعة الابتدائية للمقدار  $N$  المحدودة بالعدد الطبيعي 2 ، الفئة الجزئية  $S_4 = \{1, 2, 3, 4\}$  هي القطعة الابتدائية للمقدار  $N$  المحدودة بالعدد الطبيعي 4 ، لكن الفئة الجزئية  $\{1, 3, 5\}$  للمقدار  $N$  ليست قطعة ابتدائية للمقدار  $N$  لأنها تحتوى 3 ولا تحتوى 2 وأيضاً تحتوى 5 ولا تحتوى 4 .

٣-١ تعريف . فئة  $B$  تكون محدودة ، وإذا كانت خالية أو إذا كان يوجد تناظر أحادى مع نطاق  $B$  ومدى في قطعة ابتدائية من  $N$  . إذا لم يوجد دالة كهذه فإن الفئة تكون غير محدودة أو لا نهائية . إذا كان هناك تناظر أحادى للمقدار  $B$  فوق  $N$  ، فإن الفئة  $B$  تكون تنازلية عديدة . إذا كانت الفئة إما محدودة أو عديدة فيقال إنها معدودة .

عند وجود دالة إدخالية (أى واحد - واحد) نطاقها  $B$  ومداه  $C$  ، فإننا نقول أحياناً إن  $B$  يمكن وضعها إلى واحد - واحد بالتناظر أى إلى تناظر أحادى مع  $C$  . وباستعمال هذا المصطلح نعيد تعريف ٣-١ ونقول إن فئة  $B$  تكون محدودة إذا كانت خالية أو يمكن

(\*) القارئ الذى يرغب في تعلم هذه الموضوعات يرجع الى كتاب Halmos المدون في المراجع .

وضعها كتناظر أحادى مع فئة جزئية من قطعة ابتدائية لفئة  $N$  ونقول إن  $B$  تنازلية عددية إذا كان من الممكن وضعها كتناظر أحادى مع كل عناصر  $N$ .

من الملاحظ من التعريف أن الفئة  $B$  إما محدودة أو غير محدودة ، لكن ، تبعاً لتعريف الفئة ، ليس من السهل أن نقرر ما إذا كانت الفئة المعطاة  $B$  محدودة أو غير محدودة .

الفئات الجزئية للمقدار  $N$  المبينة بالآق :  $\{2, 3, \dots, 100\}$  ،  $\{2, 4, 5, 8, 10\}$  ،  $\{1, 3, 5\}$  ، محدودة ، بالرغم من أن هذه الفئات الجزئية ليست قطعاً جزئية لفئة  $N$  فإنها تكون محتوية في قطع جزئية للمقدار  $N$  . ومن ثم يمكن وضعها كتناظر أحادى مع فئات جزئية لقطع ابتدائية لفئة  $N$  . فئة الأعداد الطبيعية الزوجية  $E$  .

$$E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

وفئة الأعداد الطبيعية الفردية  $O$

$$O = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

ليست قطعاً ابتدائية لفئة  $N$  . كيفما كان ، حيث أنه يمكن وضعها كتناظر أحادى مع كل الفئة  $N$  ( كيف ؟ ) فتكونان معاً فئة عددية .

ومع أن الفئة  $Z$  لجميع الأعداد الصحيحة

$$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

تحتوى الفئة  $N$  فيمكن إيضاح أن  $Z$  فئة عددية ( كيف ؟ ) .

سنقرر الآن بعض نظريات بدون برهان ومن المحتمل عند القراءة الأولى قبولها بدون اختبار . وبقراءة تالية سيحاول القارئ أن يبرهن هذه النظريات . وبمعل هذا سيجد أن خاصية الاستنتاج لفئة  $N$  للأعداد الطبيعية مفيدة (\*) .

٢ - ٣ نظرية . فئة  $B$  تكون عددية إذا وإذا فقط وجد إدخال بين النطاق  $B$  ومدى  $N$  .

٣ - ٣ نظرية . أى فئة جزئية من فئة محدودة تكون محدودة وأى فئة جزئية من فئة عددية تكون أيضاً عددية .

---

(\*) انظر كتب هالموس وهابيلتون - لاتدن في المراجع .

٣ - ٤ نظرية . اتحاد مجموعة محدودة لفئات محدودة تكون فئة محدودة . واتحاد مجموعة عددية لفئة عددية تكون فئة عددية .

ونتيجة من الجزء الثاني من نظرية ٣ - ٤ أن الفئة  $Q$  لجميع الأعداد الجذرية تكون فئة عددية ( المقصود بالعدد المنطقى أو الجذرى هو كسر  $m/n$  حيث  $m$  و  $n$  أعداد صحيحة ،  $n \neq 0$  ) . لتوضيح أن  $Q$  تكون فئة عددية تكون الفئات

$$\begin{aligned} A_0 &= \{0\}, \\ A_1 &= \{\frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, -\frac{3}{1}, \dots\}, \\ A_2 &= \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, -\frac{2}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \dots\}, \\ &\dots\dots\dots \\ A_n &= \{\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, -\frac{2}{n}, \frac{3}{n}, -\frac{3}{n}, \dots\}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

نلاحظ أن كلا من الفئات  $A_m$  عددية وأن اتحادها هو الفئة  $Q$  كلها . إذن نظرية ٣ - ٤ تؤكد أن  $Q$  عددية . وفى الحقيقة يمكننا جعل  $Q$  عددية بطريقة القطر

$$0, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$$

وباستخدام هذا النوع من الاستدلال يمكن القارئ أن يكون برهان نظرية ٣ - ٤ . انظر أيضاً تمرين ( ٣ . ك ) .

## عدم قابلية العد للمقدارين $I$ و $R$

بالرغم من حقيقة أن الأعداد المنطقية لها قابلية العد فإن الفئة  $R$  لجميع الأعداد الحقيقية غير قابلة للعد . وفى الحقيقة الفئة  $I$  للأعداد الحقيقية  $x$  التى تحقق  $0 \leq x \leq 1$  غير قابلة للعد . ولتوضيح هذا سنستعمل استدلال القطر لمختبرها ج . كانتور (\*) . سنفترض أنه من المعلوم أن كل عدد حقيقى  $x$  حيث  $0 \leq x \leq 1$  له تمثيل عشوى على الصورة ...

$$x = 0.a_1 a_2 a_3 \dots$$

حيث كل  $a_k$  يشير إلى واحد من الأرقام 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 . ومن المعروف أن أعداداً حقيقية معينة لها تمثيلات فى هذه الصورة ( مثال ذلك الكسر  $\frac{1}{10}$  له تمثيلان :

$$0.0999\dots \quad \text{و} \quad 0.1000\dots$$

---

(\*) جورج كانتور ( ١٨٤٥ - ١٩١٨ ) ولد فى بيتري بروج ، تعلم فى برلين مع مبرهتراس ودرس فى Halle ( هاله ) وهو معروف بأبحاثه بنظرية الفئات حيث طورها خلال السنوات ١٨٧٤ - ١٨٩٥ .

ويمكننا اختبار التمثيل الذى نريده ولكن ليس من الضرورى عمل ذلك . وحيث إنه يوجد عدد لا نهائى من الأعداد الجبرية فى الفترة  $0 \leq x \leq 1$  ( لماذا؟ ) فلا يمكن أن تكون الفئة محدودة وسنبين الآن أن  $\mathbb{I}$  غير عددية فإذا فرضنا أنه يوجد تعداد  $x_1, x_2, x_3, \dots$  لكل أعداد حقيقية حيث  $0 \leq x \leq 1$  تغطى بالعلاقة .

$$x_1 = 0.a_1a_2a_3\dots$$

$$x_2 = 0.b_1b_2b_3\dots$$

$$x_3 = 0.c_1c_2c_3\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

الآن نفرض أن  $y_1$  رقم يختلف عن  $a_1, 0, 9$  ونفرض أن  $y_2$  رقم يختلف عن  $b_2, 0, 9$  ونفرض أن  $y_3$  رقم يختلف عن  $c_3, 0, 9$  ، الخ . نعتبر العدد  $y$  بتمثيل عشرى

$$y = 0.y_1y_2y_3\dots$$

الذى بوضوح يحقق  $0 \leq y \leq 1$  . العدد  $y$  ليس واحداً من الأعداد ذات التمثيلين العشريين لأن  $y_n \neq 0, 9$  . وفى نفس الوقت  $y \neq x_n$  لـ  $n$  ( لأن الرقبن النونيين فى التمثيل العشرى . لكل من  $y$  ،  $x_n$  مختلفان ) ولذلك أى مجموعة عددية لأعداد حقيقية تنتمى إلى هذه الفترة ستحذف على الأقل عدداً حقيقياً واحداً ينتمى إلى هذه الفترة مما يثبت أن هذه الفترة ليست فئة عددية .

نفرض أن  $A$  فئة غير محدودة وسنفترض وجود تناظر أحادى بين فئة جزئية للفئة  $A$  والفئة  $N$  بأكملها بمعنى آخر سنفترض أن كل فئة غير محدودة تحتوى على فئة جزئية عددية هذا الافتراض ليس قوياً من وجهة نظر « بديهية الاختيار » التى هى من البديهيات المفيدة فى نظرية الفئات . بعد هضم القارئ لمحتويات هذا الكتاب سيشرح فى المعالجة البديهية للأساسيات التى نوقشت فى هذا الكتاب بصيغة غير رسمية ولكنه فى الوقت الحاضر سيأخذ النصوص كبديهيات وقتية ويمكن إيداعها فيما بعد ببديهيات أكثر شمولاً فى نظرية الفئات .

## تمرينات :

- ٣ - ( أ ) استعرض تناظراً أحادياً بين فئة الأعداد الطبيعية الزوجية  $E$  ،  $N$  .
- ٣ - ( ب ) استعرض تناظراً أحادياً بين الفئة  $O$  للأعداد الطبيعية الفردية ،  $N$  .
- ٣ - ( ج ) استعرض تناظراً أحادياً بين  $N$  والفئة الجزئية الفعلية للفئة  $N$  .
- ٣ - ( د ) إذا كانت  $A$  محتوية فى قطعة ابتدائية ما للفئة  $N$  ، باستخدام خاصية الترتيب الجيد للفئة  $N$  صرف إدخالاً للفئة  $A$  فوق قطعة ابتدائية ما للفئة  $N$  .

- ٣- (أ) اعط مجموعة عددية لفئات محدودة بحيث يكون اتحادها غير محدود .
- ٣- (و) باستخدام حقيقة كون كل فئة غير محدودة لها فئة جزئية عددية لتوضح أن كل فئة غير محدودة يمكن وضعها كتناظر أحادى مع فئة جزئية فعلية لنفسها .
- ٣- (ز) وضح أنه إذا كانت الفئة  $A$  يمكن وضعها كتناظر أحادى مع فئة  $B$  ، فإن الفئة  $B$  يمكن وضعها كتناظر أحادى مع الفئة  $A$  .
- ٣- (ح) أثبت أنه إذا كانت الفئة  $A$  يمكن وضعها كتناظر أحادى مع الفئة  $B$  ، وكانت  $B$  بحيث يمكن وضعها كتناظر أحادى مع الفئة  $C$  ، فإن الفئة  $A$  يمكن وضعها كتناظر أحادى مع الفئة  $C$  .
- ٣- (ط) باستخدام الاستنتاج على  $n \in \mathbb{N}$  ، وضح أن القطعة الابتدائية المحددة بالمقدار  $n$  لا يمكن وضعها كتناظر أحادى مع القطعة الابتدائية المحددة بالمقدار  $m \in \mathbb{N}$  إذا كانت  $m < n$  .
- ٣- (ى) أثبت أن  $N$  لا يمكن وضعها كتناظر أحادى مع أى قطعة ابتدائية للمقدار  $N$  .
- ٣- (ك) لكل  $n \in \mathbb{N}$  بفرض  $A_n = \{a_j : j \in \mathbb{N}\}$  وبفرض أن  $A_n \cap A_m = \emptyset$  حيث  $n \neq m ; n, m \in \mathbb{N}$  أثبت أن الدالة  $f(n, j) = \frac{1}{2}(n+j-2)(n+j-1) + n$  تعطى تعداداً للمقدار  $\bigcup \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$



## الأعداد الحقيقية

في هذا الفصل سنشرح خواص نظام العدد الحقيقي . ومع إنه من الممكن تكوين هذا النظام من أكثر من فئة أولية ( مثل الفئة  $N$  للأعداد الطبيعية أو الفئة  $Q$  للأعداد القياسية ) فإننا سوف لانفعل ذلك وبدلاً منه سنعرض قائمة من الخواص التي ترتبط بنظام العدد الحقيقي وسنوضح كيفية استنتاج خواص أخرى من الخواص التي فرضت .

لأجل التوضيح لا نفضل ذكر كل خواص نظام العدد الحقيقي مرة واحدة ، وبدلاً منه سنقدم أولاً في الفصل الرابع « الخواص الجبرية » المؤسسة على عمليتي الجمع والضرب ونناقش باختصار بعض نتائجها . وبعد ذلك سنقدم « الخواص المرتبة » بينما في الفصل السادس سنضيف « خاصية الإتمام » ويوجد أسباب عديدة لهذه العملية التي هي بنوع ما عملية قطعة قطعة . يوجد أولاً البراهين يجب مراعاتها ويستحسن أخذ قليل منها في كل مرة . وبالإضافة إلى ذلك نجد أن البراهين اللازمة في الخطوات الجبرية التمهيدية طبيعية بدرجة أكثر من بعض البراهين التالية . وأخيراً بما أنه يوجد طرق مشوقة أخرى لإضافة « خاصية الإتمام » فنحن نرغب فيها منفردة أو منعزلة عن الفروض الأخرى .

جزء من هدف الفصلين الرابع والخامس هو مدنا بأمثلة براهين النظريات الابتدائية التي تستنتج من الفروض المنصوص عليها صراحة . وخبرتنا أن الطلبة الذين لم يتعرضوا للبراهين العنيفة يمكنهم تفهم المناقشة والبراهين في هذه الأبواب جاهزة ، ويمكنهم بعد ذلك الانتقال إلى الباب السادس ، كيفما كان فإن الطلبة الذين لهم دراية بالطريقة البديهية وفن استخلاص البراهين بطريقة ميكانيكية يمكنهم الانتقال إلى الباب السادس بعد نظرة خاطفة إلى البابين الرابع والخامس . في الباب السابع نقدم تصور القطع في نظام العدد الحقيقي ونعرف أنواعاً مختلفة من الخلايا والفترات . خاصية الخلايا المتداخلة الهامة للفئة  $R$  أقرت ووضحت بينما نوقشت فئة كانتور بإيجاز .

### الباب الرابع - الخواص الجبرية للمقدار $R$ :

في هذا الباب سنطلي التركيب « الجبري » لنظام العدد الحقيقي وبتعبير موجز تكون الأعداد الحقيقية « حقلاً » في موضوع الجبر المجرد . والآن سنشرح ما المقصود بذلك .

نقصد بالعملية الثنائية في الفئة  $F$  الدالة  $B$  التي نطاقها  $F \times F$  ومداها في  $F$ . وبدلاً من استعمال الرمز  $B(a, b)$  الدالة على قيمة العملية الثنائية عند النقطة  $(a, b)$  في  $F \times F$  فقد اصطلاح على أن نستعمل رموزاً مثل  $ab$  أو  $a + b$  أو  $a \cdot b$ .

٤ - ١ الخواص الجبرية للفئة  $R$ : يوجد في الفئة  $R$  للأعداد الحقيقية عمليتان (يشار إليهما بالعلامتين  $+$  و  $\cdot$ ، وتسمى جمع وضرب على الترتيب) تحققان الخواص الآتية (\*).

$$(A1) \quad a + b = b + a \text{ لكل } a, b \text{ في } R.$$

$$(A2) \quad (a + b) + c = a + (b + c) \text{ لكل من } a, b, c \text{ في } R.$$

$$(A3) \quad \text{يوجد عنصر } 0 \text{ في } R \text{ حيث } 0 + a = a \text{ و } a + 0 = a \text{ لكل } a \text{ في } R.$$

$$(A4) \quad \text{لكل عنصر } a \text{ في } R \text{ يوجد عنصر } -a \text{ في } R \text{ بحيث } a + (-a) = 0$$

$$\text{و } (-a) + a = 0$$

$$(M1) \quad a \cdot b = b \cdot a \text{ لكل } a, b \text{ في } R.$$

$$(M2) \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \text{ لكل } a, b, c \text{ في } R.$$

$$(M3) \quad \text{العنصر } 1 \text{ في } R \text{ يختلف عن } 0 \text{ وله الخاصية التي تجمل } a \cdot 1 = a, 1 \cdot a = a$$

لكل  $a$  في  $R$ .

$$(M4) \quad \text{لكل عنصر } a \neq 0 \text{ في } R \text{ يوجد عنصر } 1/a \text{ في } R \text{ بحيث } a \cdot (1/a) = 1$$

$$\text{و } (1/a) \cdot a = 1$$

$$(D) \quad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \text{ و } (b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a) \text{ لكل } a, b, c \text{ في } R.$$

هذه الخواص بالتأكيد معروفة للقارئ. وسنحصل على بعض نتائج سهلة (ليست مهمة) منها. فاولاً سنبرهن أن 0 هو العنصر الوحيد للمقدار  $R$  الذي يحقق (A3)، 1 هو العنصر الوحيد الذي يحقق (M3).

$$\text{٤ - ٢ نظرية. (أ) إذا كانت } a, z \text{ عناصر في } R \text{ بحيث } z + a = a \text{ فإن } z = 0.$$

$$\text{(ب) إذا كانت } w \neq 0, b \text{ عناصر في } R \text{ بحيث } w \cdot b = b \text{ فإن } w = 1.$$

البرهان. من الفرض  $z + a = a$ . اجمع ١ - لكل من الطرفين واستخدم (A2), (A4), (A3) و (A4) لتحصل على

(\*) هذه القائمة ليس المقصود بها أن تكون « أدنى أو أقل ». أى إن المعطيات الثانية في (A3) و (A4) تنتج من المعطيات الأولى باستخدام (A1).

$$0 = a + (-a) = (z + a) + (-a) = z + (a + (-a)) \\ = z + 0 = z.$$

البرهان لمجزء (ب) يتترك كتمرين . لاحظ أنه في الفرض  $b \neq 0$  .  
وهو المطلوب إثباته

الآن نوضح أن العنصرين  $a$  و  $1/a$  ( عندما  $a \neq 0$  ) يتبعان كعنصرين وحيدين بواسطة الخواص الموجودة في (A4) و (M4) .

- ٤ - ٣ نظرية . (أ) إذا كانت  $a$  ،  $b$  عنصرين من  $R$  ، فإن  $a + b = 0$  ،  $b = -a$  .  
(ب) إذا كانت  $a \neq 0$  ،  $b$  عنصرين من  $R$  ، فإن  $a \cdot b = 1$  ،  $b = 1/a$  .

البرهان . (أ) إذا كانت  $a + b = 0$  فنجمع  $-a$  إلى كل من الطرفين نحصل على  $(-a) + (a + b) = -a + 0$  . نستعمل (A2) على الطرف الأيسر ، (A3) على الطرف الأيمن للحصول على .

$$((-a) + a) + b = -a$$

إذا استعملنا (A4) ، (A3) على الطرف الأيسر ، نحصل على  $b = -a$  .

البرهان لمجزء (ب) يتترك كتمرين للطالب . لاحظ أنه في الفرض  $a \neq 0$  .  
وهو المطلوب إثباته

الخاصيتان (A4) و (M4) تضمنان إمكانية حل المعادلات

$$a + x = 0, \quad a \cdot x = 1 \quad (a \neq 0)$$

للمقدار  $x$  ، ونظرية ٣ - ٤ تتضمن إثبات أن الحل وحيد . وسنوضح الآن أن الأطراف اليسرى من هذه المعادلات يمكن أن تكون عناصر اختيارية من  $R$  .

٤ - ٤ نظرية . (أ) بفرض أن  $a$  و  $b$  عناصر اختيارية من  $R$  . فإن المعادلة  $a + x = b$  لها الحل الوحيد  $x = (-a) + b$

(ب) بفرض  $a \neq 0$  و  $b$  عنصرين اختياريين من  $R$  فإن المعادلة  $a \cdot x = b$  . لها الحل الوحيد  $x = (1/a) \cdot b$

البرهان . بما أن  $a + ((-a) + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b$  فن الواضح أن  $x = (-a) + b$  هو حل المعادلة  $a + x = b$  ولتقرير أن هذا هو الحل الوحيد فقط سنفرض أن  $x_1$  هو أى حل لهذه المعادلة ، فإذاً

$$a + x_1 = b$$

نضيف  $a$  — إلى كل من الطرفين نحصل على

$$(-a) + (a + x_1) = (-a) + b$$

وإذا استخدمنا (A3) ، (A4) و (A2) نحصل على

$$x_1 = 0 + x_1 = (-a + a) + x_1$$

$$= (-a) + (a + x_1) = (-a) + b$$

وهو المطلوب إثباته

$$x_1 = (-a) + b$$

برهان الجزء (ب) يتترك كتمرين .

٤ - نظرية . إذا كانت  $a$  ،  $b$  أى عنصرين من  $R$  ، فإن

$$-a = (-1) \cdot a \quad (أ) \quad a \cdot 0 = 0$$

$$-(-a) = a \quad (د) \quad -(a+b) = (-a) + (-b) \quad (ج)$$

$$(-1) \cdot (-1) = 1 \quad (هـ)$$

البرهان . (أ) من (M3) ، نعرف أن  $a \cdot 1 = a$  . إذن

$$a + a \cdot 0 = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a \cdot (1+0)$$

$$= a \cdot 1 = a$$

إذا استخدمنا نظرية ٤ - ٣ (أ) فنستدل أن  $a \cdot 0 = 0$  .

(ب) من الواضح أن

$$a + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1+(-1)) \cdot a$$

$$= 0 \cdot a = 0$$

وينتج من نظرية ٤ - ٣ (أ) أن  $a = -a$  .

(ج) لدينا

$$-(a+b) = (-1) \cdot (a+b) = (-1) \cdot a + (-1) \cdot b$$

$$= (-a) + (-b)$$

(د) من (A4) يكون  $(-a) + a = 0$  وبما أن الحل الوحيد حسب نظرية ٤ - ٣ (أ)

فينتج أن  $a = -(-a)$  .

(هـ) في جزء (ب) ، نعوض  $a = -1$  . فيكون

$$-(-1) = (-1) \cdot (-1)$$

وهو المطلوب إثباته

إذن المطلوب ينتج من الجزء (د) بوضع  $a = 1$  .

- ٤-٦ نظرية. (أ) إذا كانت  $a \in \mathbb{R}$  ،  $a \neq 0$  فإن  $1/a \neq 0$  ،  $1/(1/a) = a$  .  
 (ب) إذا كانت  $a, b \in \mathbb{R}$  ،  $a \cdot b = 0$  فإنه إما  $a = 0$  أو  $b = 0$  .  
 (ج) إذا كانت  $a, b \in \mathbb{R}$  فإن  $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$  .  
 (د) إذا كانت  $a \in \mathbb{R}$  ،  $a \neq 0$  فإن  $1/(-a) = -(1/a)$  .

البرهان . (أ) إذا كانت  $a \neq 0$  ، فإن  $1/a \neq 0$  لأنه خلاف ذلك  $1 = a \cdot (1/a)$  .  
 $a \cdot 0 = 0$  وهذا يخالف (M3) وبما أن  $a \cdot (1/a) = 1$  فيتبع من نظرية ٤-٣ (ب) أن  
 $a = 1/(1/a)$  .

(ب) نفرض أن  $a \cdot b = 0$  وأن  $a \neq 0$  بالضرب في  $1/a$  نحصل على

$$b = 1 \cdot b = ((1/a) \cdot a) \cdot b = (1/a) \cdot (a \cdot b) \\ = (1/a) \cdot 0 = 0.$$

وتعليل مشابه عند  $b \neq 0$  .

(ج) من نظرية ٤-٣ ، يكون  $a \cdot (-1) = -a$  ،  $b \cdot (-1) = -b$  إذن

$$(-a) \cdot (-b) = ((-1) \cdot a) \cdot ((-1) \cdot b) \\ = (a \cdot (-1)) \cdot ((-1) \cdot b) \\ = a \cdot ((-1) \cdot (-1)) \cdot b = a \cdot 1 \cdot b \\ = a \cdot b.$$

(د) إذا كانت  $a \neq 0$  ، فإن  $1/a \neq 0$  ،  $-a \neq 0$  . بما أن  $a \cdot (1/a) = 1$  ،  
 ينتج من الجزء (ج) أن  $[-(1/a)] \cdot (-a) = 1$  . إذا استعملنا نظرية ٤-٣ (ب) نستنتج  
 أن  $1/(-a) = -(1/a)$  . وهو المطلوب إثباته

### الأعداد الجذرية ( النقطة ) :

من الآن سوف لا نستعمل النقطة لتشير إلى الضرب ونكتب  $a \cdot b$  لأجل  $a, b$  . وكالمعتاد  
 سنكتب  $a^2$  لأجل  $aa$  ،  $a^3$  لأجل  $(a^2)a$  ، وإذا كانت  $n \in \mathbb{N}$  فنعرف  $a^{n+1} =$   
 $(a^n)a$  وينتج باستخدام الاستنتاج الرياضي أنه إذا كانت  $m, n \in \mathbb{N}$  فإن

$$(*) \quad a^{m+n} = a^m a^n$$

لأي  $a \in \mathbb{R}$  . بالمثل سنكتب ٢ لأجل  $1+1$  ، ٣ لأجل  $2+1 = (1+1)+1$  وهكذا . وبالإضافة إلى ذلك سنكتب عادة  $a - b$  بدلا من  $b + (-a)$  وإذا كانت  
 $a \neq 0$  ، عادة سنكتب

$$\frac{b}{a} \text{ أو } b/a$$

بدلاً من  $(1/a) \cdot b = b$  ،  $(1/a) \cdot b = b$  . وأيضاً سنكتب  $a^{-1}$  لأجل  $1/a$  ،  $a^{-n}$  لأجل  $1/a^n$  . ويمكن توضيح أن الصيغة (\*) السابقة صحيحة عندما  $m, n \in \mathbb{Z}$  بفرض أن  $a \neq 0$  .

عناصر  $R$  التي على الصورة

$$\frac{-b}{a} \text{ أو } \frac{b}{a}$$

عندما  $a, b \in \mathbb{N}$  ،  $a \neq 0$  يقال إنها أعداد قياسية أو جذرية أو منطقة وفئة كل الأعداد القياسية في  $R$  سيرمز لها بالرمز  $Q$  القياسي . كل العناصر في  $R$  التي ليست أعداداً قياسية يقال إنها أعداد غير قياسية . ومع أن هذا التعبير غير حسن لكنه قياسي وسنختاره .

وسنختم هذا الباب ببرهان الحقيقة التي تقول إنه لا يوجد عدد قياسي مربعه ٢ .

٤ - ٧ نظرية . لا يوجد عدد قياسي  $r$  بحيث أن  $r^2 = 2$  .

البرهان . نفرض على العكس أن  $(p/q)^2 = 2$  ، حيث  $p, q$  أعداد صحيحة يمكننا بدون فقد العمومية أن نفرض أن  $p, q$  ليس بينهما عامل مشترك صحيح ( لماذا ؟ ) وبما أن  $p^2 = 2q^2$  فينتج من ذلك أن  $p$  يجب أن تكون عدداً زوجياً صحيحاً ( لأنه إذا كانت  $p = 2k + 1$  فردية فإن  $p^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$  تكون فردية ) أي إن  $p = 2k$  لعدد صحيح ما  $k$  . وحينئذ  $4k^2 = 2q^2$  ومن ذلك ينتج أن  $q^2 = 2k^2$  ومن ثم  $q$  يجب أن تكون أيضاً زوجية . وإذن كلا من  $p, q$  يقبل القسمة على 2 وهذا عكس فرضنا . وهو المطلوب لإثباته

### تمارين :

- ٤ - (أ) أثبت جزء (ب) من نظرية ٤ - ٢ .
- ٤ - (ب) أثبت جزء (ب) من نظرية ٤ - ٣ .
- ٤ - (ج) أثبت جزء (ج) من نظرية ٤ - ٤ .
- ٤ - (د) باستخدام الاستنتاج الرياضي . وضع أنه إذا كانت  $a \in \mathbb{R}$  ،  $m, n \in \mathbb{N}$  فإن  $a^{m+n} = a^m a^n$  .
- ٤ - (هـ) وضع أنه إذا كانت  $a \in \mathbb{R}$  ،  $a \neq 0$  ،  $m, n \in \mathbb{Z}$  فإن  $a^{m+n} = a^m a^n$  .

٤- (و) استخدم البحث المذكور في نظرية ٤-٧ لتوضيح أنه لا يوجد عدد قياسي  $s$  بحيث أن  $s^2 = 6$ .

٤- (ز) أجر تعديلاً في برهنة نظرية ٤-٧ لتوضح أن لا يوجد عدد قياسي  $t$  بحيث أن  $t^2 = 3$ .

٤- (ح) إذا كانت  $R$  غير قياسية  $r \in R, r \neq 0$  قياسية فوضح أن  $r + r$  ،  $r^2$  غير قياسيين .

## الباب الخامس - الخواص المرتبة للفئة $R$ :

الفرض من هذا الباب هو إدخال أهمية الخواص المرتبة للمقدار  $R$  والتي متلعب دوراً مهماً في الأبواب القادمة . وأبسط الطرق لتصوير الرتبة هو الاستفادة من تصور « الإيجابية الدقيقة أو الإيجابية المضبوطة » والتي سنشرها .

٥- ١ الخواص المرتبة للمقدار  $R$  . يوجد فئة جزئية غير خالية  $R$  من  $P$  تسمى الفئة للأعداد الحقيقية الموجبة الدقيقة وهي تحقق هذه الخواص .

(i) إذا كانت  $a$  و  $b$  تنتمى إلى  $P$  فإن  $a + b$  تنتمى إلى  $P$  .

(ii) إذا كانت  $a$  و  $b$  تنتمى إلى  $P$  فإن  $ab$  تنتمى إلى  $P$  .

(iii) إذا كانت  $a$  تنتمى إلى  $R$  فتتحقق بالضبط واحدة من العلاقات الآتية :

الشرط (iii) أحياناً يسمى خاصية واحدة من ثلاث . وهي تعنى أن الفئة  $N = \{-a : a \in P\}$  ، أحياناً تسمى الفئة للأعداد الحقيقية السالبة المضبوطة التي ليس لها عناصر مشتركة مع  $P$  . وفي الحقيقة الفئة الكلية  $R$  هي اتحاد الفئات الثلاث غير المتصلة وهي  $P, \{0\}, N$  .

٥- ٢ تعريف . إذا كانت  $a \in P$  فنقول إن  $a$  عدد حقيقى موجب مضبوط ونكتب  $a > 0$  وإذا كانت  $a$  إما في  $P$  أو صفراً ، فنقول إن  $a$  هي  $a$  عدد حقيقى موجب ويكتب  $a \geq 0$  وإذا كانت  $a \in P$  فنقول إن  $a$  عدد حقيقى سالب مضبوط ويكتب  $a < 0$  ، وإذا كانت  $a$  إما في  $P$  أو صفراً فنقول إن  $0$  عدد حقيقى سالب ويكتب  $a \leq 0$  .

ومن الملاحظ - طبقاً لما قدم من مصطلحات - أن الرقم  $0$  يكون إما موجباً أو سالباً ، وهو العدد الوحيد الذى له هذه المنزلة المزدوجة . وهذا الاصطلاح ربما يبدو في الأول غريباً ولكنه سيثبت أنه ملائم لبعض المؤلفين يحتفظون بالتغيير « موجب » لعناصر الفئة  $P$  ويستعملون التعبير « ليس سالباً » لعناصر الفئة  $P \cup \{0\}$  .

الآن نقدم العلاقات المرتبة .

٣-٥ تعريف . بفرض أن  $a$  و  $b$  عنصران من  $R$  وإذا كانت  $a - b \in P$  فإننا نكتب  $a > b$  ، وإذا كانت  $-(a - b) \in P$  فإننا نكتب  $a < b$  ، وإذا كانت  $a - b \in P \cup \{0\}$  فإننا نكتب  $a \geq b$  ، وإذا كانت  $-(a - b) \in P \cup \{0\}$  فإننا نكتب  $a \leq b$  .

وكالمعتاد ، من المناسب غالباً إبعاد الإشارة ونكتب

$$b < a, \quad b > a, \quad b \leq a, \quad b \geq a$$

على الترتيب وبالإضافة إلى ذلك إذا كانت  $b < c$  ،  $b < a$  ، فحينئذ غالباً نكتب .

$$a < b < c \quad \text{أو} \quad c > b > a$$

وإذا كانت  $a \leq b$  ،  $b < c$  ، فحينئذ غالباً نكتب

$$a \leq b < c \quad \text{أو} \quad c > b \geq a$$

### خواص المرتبة :

الآن ستكون الخواص الأساسية لعلاقة المرتبة في  $R$  . هذه الخواص هي القوانين المألوفة للمتباينات التي قابلها القارئ في مناهج سابقة ، وهذه ستستعمل بكثرة في الأبواب القادمة ولها أهمية كبرى .

٣-٥ نظرية . بفرض أن  $a, b, c$  عناصر من  $R$  ، فإن

(أ) إذا كانت  $a > b$  ،  $b > c$  فإن  $a > c$  .

(ب) نتحقق بالضبط واحدة من الآتي  $a < b$  ،  $a = b$  ،  $a > b$  .

(ج) إذا كان  $a \geq b$  ،  $b \geq a$  فإن  $a = b$  .

البرهان . (أ) إذا كانت  $a - b$  ،  $b - c$  تنتمي إلى  $P$  ، فإنه من ٣-٥ (١) (i)

ينتج أن  $a - c = (a - b) + (b - c)$  أيضاً تنتمي إلى  $P$  . إذن  $a > c$  .

(ب) من ٣-٥ (ii) يتحقق الضبط واحد من الاحتمالات الآتية :

$$a - b \in P, \quad a - b = 0, \quad b - a = -(a - b) \in P$$

(ج) إذا كانت  $a \neq b$  فن الجزء (ب) يجب أن يكون لدينا إما  $a - b$  أو  $b - a$

في  $P$  . إذن إما  $a > b$  أو  $b > a$  وفي أي حالة واحدة من الفروض حدث له مناقضة .

وهو المطلوب إثباته



٥- ه نظرية . (أ) إذا كانت  $a \in \mathbb{R}$  ،  $a \neq 0$  ، فإن  $a^2 > 0$  .

(ب)  $1 > 0$  .

(ج) إذا كانت  $n \in \mathbb{N}$  ، فإن  $n > 0$  .

البرهان . (أ) إما  $a$  أو  $-a$  ينتمى إلى  $P$  . إذا كانت  $a \in P$  فإنه من ٥-١ (ii) يكون  $a^2 = aa \in P$  ، وإذا كانت  $-a \in P$  ، فإنه من نظرية ٤-٧ (ج) يكون  $a^2 = (-a)^2 \in P$  . إذن في أى حالة  $a^2 \in P$  .

(ب) بما أن  $1 = (1)^2$  ، الاستنتاج ينتج من (أ) .

(ج) نستعمل الاستنتاج الرياضى ، وصحة الفرض عند  $n = 1$  هو جزء (ب) إذا كان ذلك صحيحاً للمعد الطبيعى  $k$  (أو بمعنى آخر نفرض أن  $k \in P$ ) وبما أن  $1 \in P$  فينتج من ٥-١ (i) أن  $k+1 \in P$  ، إذن الفرض صحيح لكل الأعداد الطبيعية .

وهو المطلوب إثباته

الخواص الآتية من المحتمل أن تكون مألوفة للقارىء .

٥-٦ نظرية . بفرض  $d$  و  $c$  و  $b$  و  $a$  عناصر من  $\mathbb{R}$  فإن :

(أ) إذا كان  $a > b$  فإن  $a + c > b + c$

(ب) إذا كان  $a > b$  و  $c > d$  فإن  $a + c > b + d$

(ج) إذا كان  $a > b$  و  $c > 0$  فإن  $ac > bc$  .

(جـ) إذا كان  $a > b$  و  $c < 0$  فإن  $ac < bc$  .

(د) إذا كان  $a > 0$  فإن  $1/a > 0$  .

(دـ) إذا كان  $a < 0$  فإن  $1/a < 0$  .

البرهان . (أ) لاحظ أن  $(a+c) - (b+c) = a-b$

(ب) إذا كانت  $a-b$  ،  $c-d$  تنتمى إلى  $P$  ، إذن من ٥-١ (i) نستنتج أن

$(a+c) - (b+d) = (a-b) + (c-d)$  تنتمى إلى  $P$  .

(ج) إذا كانت  $a-b$  ،  $c$  تنتمى إلى  $P$  ، فإنه من ٥-١ (ii) تكون

$ac - bc = (a-b)c$  أيضاً تنتمى إلى  $P$  .

(جـ) إذا كانت  $a-b$  ،  $-c$  تنتمى إلى  $P$  ، فإنه من ٥-١ (ii)

$bc - ac = (a-b)(-c)$  أيضاً تنتمى إلى  $P$  .

(د) إذا كانت  $a > 0$  ، فإن من  $1/a \neq 0$  (iii) بحيث أن العنصر  $1/a$  موجود .  
 وإذا كانت  $1/a = 0$  فإن  $1 = a(1/a) = 0$  وهذا تناقض . وإذا كانت  $1/a < 0$  فإن  
 جزء (ج) حيث  $c = 1/a$  يدل على أن  $1 = a(1/a) < 0$  وهذا تناقض مع  $0 = 0$  .  
 (ب) . لذلك يجب أن يكون لدينا  $1/a > 0$  لأن الإمكانيتين الأخرتين قد استبعدتا .  
 (د') هذه يمكن برهنتها بطريقة مشابهة للبرهان في (د) أو مباشرة يمكن استحضار  
 نظرية ٤ - ٦ (د) واستخدام (د) مباشرة .

وهو المطلوب إثباته

٥ - ٧ نظرية . إذا كان  $a > b$  ، فإن  $a > \frac{1}{2}(a+b) > b$

البرهان . بما أن  $a > b$  فن نظرية ٥ - ٦ (أ) بأخذ  $c = a$  ينتج أن  $2a > a + b$   
 ومن نظرية ٥ - ٦ (أ) بأخذ  $c = a$  ينتج أن  $a + b > 2b$  ومن نظرية ٥ - ٥ (ج) نعرف  
 أن  $2 > 0$  ومن نظرية ٥ - ٦ (د) نعرف أن  $\frac{1}{2} > 0$  . وباستخدام نظرية ٥ - ٦ (ج)  
 بأخذ  $c = \frac{1}{2}$  ، نستنتج أن  $a > \frac{1}{2}(a+b) > b$  ، إذن  $a > \frac{1}{2}(a+b) > b$  .  
 وهو المطلوب إثباته

والنظرية التي برهنت حالا (عند  $b = 0$ ) تدل على أنه لأي عدد موجب مضبوط معطى  
 وليكن  $a$  ، يوجد عدد مضبوط موجب أصغر (يسمى  $\frac{1}{2}a$ ) أى إنه لا يوجد عدد موجب  
 حقيقى مضبوط بحيث يكون أصغر ما يمكن .

قد رأينا من قبل أنه إذا كانت  $a > 0$  ،  $b > 0$  ، فإن  $ab > 0$  وأيضاً إذا كانت  $a < 0$  ،  
 $b < 0$  فإن  $ab > 0$  . سنوضح الآن أن العكس صحيح .

٥ - ٨ نظرية . إذا كانت  $ab > 0$  فإن إما  $a > 0$  ،  $b > 0$  وإما  $a < 0$  ،  $b < 0$  .

البرهان . إذا كانت  $ab > 0$  فإن  $a \neq 0$  ،  $b \neq 0$  (لماذا ؟) . وإذا كانت  $a > 0$  ،  
 فإنه من نظرية ٥ - ٦ (د) نستدل على أن  $1/a > 0$  ومن ٥ - ٦ (ج) نجد أن

$$b = ((1/a)a)b = (1/a)(ab) > 0$$

وبمعنى آخر إذا كانت  $a < 0$  فينتج من نظرية ٥ - ٦ (د) أن  $1/a < 0$  ومن  
 ٥ - ٦ (ج) نجد أن  $b = ((1/a)a)b = (1/a)(ab) < 0$  وهو المطلوب إثباته .

٥ - ٩ نتيجة . إذا كانت  $ab < 0$  فإنه إما  $a > 0$  ،  $b < 0$  أو  $a < 0$  ،  $b > 0$  .

البرهان يترك كتمرين .

## القيمة المطلقة :

الخاصية واحد من ثلاث المذكورة في هـ - ١ (iii) تؤكد أنه إذا كانت  $a \neq 0$  فإن واحدا من الرقمين  $a$  ،  $-a$  موجب مضبوط . القيمة المطلقة للمقدار  $a \neq 0$  يعرف بأنه واحد موجب مضبوط من الزوج  $\{a, -a\}$  ، والقيمة المطلقة للصفر تعرف بأنها تكون صفراً .

هـ - ١٠ تعريف . إذا كانت  $a \in \mathbb{R}$  فإن القيمة المطلقة للمقدار  $a$  يرمز لها بالرمز  $|a|$  ويعرف بالآتي :

$$|a| = a \text{ إذا كانت } a \geq 0 .$$

$$= -a \text{ إذا كانت } a < 0 .$$

أى إن نطاق الدالة المطلقة القيمة هو كل الفئة  $\mathbb{R}$  ، ومداها هو  $\{0\} \cup P$  ويرسم العنصران  $a$  ،  $-a$  إلى نفس العنصر .

هـ - ١١ نظرية . (أ)  $|a| = 0$  إذا وإذا فقط إذا كانت  $a = 0$  .

$$(ب) \quad |a| = |-a| \text{ لجميع } a \in \mathbb{R}$$

$$(ج) \quad |ab| = |a||b| \text{ لكل } a, b \in \mathbb{R}$$

(د) إذا كانت  $c \geq 0$  فإن  $|a| \leq c$  إذا وإذا فقط  $-c \leq a \leq c$  .

$$(هـ) \quad |a| \leq a \leq -|a| \text{ لكل } a \in \mathbb{R}$$

البرهان . (أ) إذا كانت  $a = 0$  فإنه من التعريف  $|0| = 0$  ، وإذا كانت  $a \neq 0$  فإنه أيضاً  $-a \neq 0$  أى إن  $|a| \neq 0$  .

(ب) إذا كانت  $a = 0$  فإن  $|0| = 0 = |-0|$  ، وإذا كانت  $a > 0$  فإن  $|a| = a = |-a|$  ، وإذا كانت  $a < 0$  فإن  $|a| = -a = |-a|$  .

(ج) إذا كانت  $a > 0$  ،  $b > 0$  فإن  $ab > 0$  ومن ثم  $|ab| = ab = |a||b|$  ، وإذا كانت  $a < 0$  ،  $b > 0$  فإن  $ab < 0$  وينتج  $|ab| = -(ab) = (-a)b = |a||b|$  والحالات الأخرى يمكن معالجتها بنفس الطريقة .

(د) إذا كانت  $|a| \leq c$  ، فإن كلا من  $a \leq c$  و  $-a \leq c$  (لماذا ؟) وكما سبق ومن نظرية هـ - ١٦ (ج /) نستنتج أن  $-c \leq a \leq c$  ومن ثم  $-c \leq a \leq c$  والعكس ، إذا كانت هذه العلاقة صحيحة فإن كلا من  $a \leq c$  و  $-a \leq c$  مما يثبت أن  $|a| \leq c$  .

(هـ) استخدم جزء (د) عند  $c = |a| \geq 0$  وهو المطلوب إثباته .

النتيجة القادمة ستستخدم. كثيراً فيما ينجم عن ذلك . ( تذكر أن  $a \pm b$  تعني كلا من  $a + b$  و  $a - b$  ) .

٥-١٢ متباينة المثلث . إذا كانت  $a$  و  $b$  أى عددين حقيقيين ، فإن

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$$

البرهان . طبقاً لنظرية ٥-١١ (أ) نجد أن  $-|a| \leq a \leq |a|$  ،  $-|b| \leq b \leq |b|$  وباستخدام ٥-٦ (ب) نستنتج أن

$$-(|a| + |b|) = -|a| - |b| \leq a \pm b \leq |a| + |b|$$

من نظرية ٥-١١ (د) ينتج أن  $|a \pm b| \leq |a| + |b|$  مما يثبت الجزء الثاني من المتباينة .

وبما أن  $|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$  ( لماذا ؟ ) ينتج أن  $|a| - |b| \leq |a - b|$  . وبالمثل  $|b| - |a| \leq |a - b|$  ( لماذا ؟ ) بضم هاتين المتباينتين نستنتج أن  $||a| - |b|| \leq |a - b|$  التي هي الجزء الأول من المتباينة بعلامة سالبة . للحصول على المتباينة بعلامة موجبة نضع  $-b$  بدلا من  $b$  . وهو المطلوب إثباته

٥-١٣ نتيجة : إذا كانت  $a_1, a_2, \dots, a_n$  أى أعداد حقيقية عددها  $n$  فإن

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

البرهان : إذا كانت  $n = 2$  ، فالاستنتاج هو ٥-١٢ تماماً ، فإذا كانت  $n > 2$  فنستخدم طريقة الاستنتاج الرياضي وكذلك الحقيقة التي تقول إن

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1}| = |(a_1 + a_2 + \dots + a_k) + a_{k+1}|$$

$$\leq |a_1 + a_2 + \dots + a_k| + |a_{k+1}|$$

وهو المطلوب إثباته

### تمرينات :

- ٥- ( أ ) إذا كانت  $a, b \in \mathbb{R}$  ،  $a^2 + b^2 = 0$  ، فبين أن  $a = b = 0$  .
- ٥- ( ب ) إذا كانت  $n \in \mathbb{N}$  فوضح أن  $n^2 \geq n$  وحينئذ  $1/n^2 \leq 1/n$  .
- ٥- ( ج ) إذا كانت  $a > -1$  ،  $a \in \mathbb{R}$  فوضح أن  $(1+a)^n \geq 1+na$  لكل  $n \in \mathbb{N}$  .  
هذه المتباينة تسمى متباينة برنويل (\*) (إرشاد : استعمل الاستنتاج الرياضي) .
- ٥- ( د ) إذا كانت  $c > 1$  ،  $c \in \mathbb{R}$  فوضح أن  $c^n \geq c$  لجميع  $n \in \mathbb{N}$  .  
(إرشاد :  $c = 1+a$  عندما  $a > 0$  ) .

---

(\*) جاكوب برنويل (١٦٥٤ - ١٧٠٥) من أسرة سويسرية التي أنتجت عدة رياضيين الذين لهم فضل في تطوير علم التفاضل والتكامل .

- - (أ) إذا كانت  $c > 1, c \in \mathbb{R}$  فوضح أن  $c^m \geq c^n$  عند  $m \geq n, m, n \in \mathbb{N}$
- - (و) بفرض أن  $0 < c < 1$  وإذا كانت  $m \geq n, m, n \in \mathbb{N}$  فوضح أن  $0 < c^m \leq c^n < 1$
- - (ز) وضح أن  $n < 2^n$  لجميع  $n \in \mathbb{N}$  ومن ثم  $1/2^n < 1/n$  لكل  $n \in \mathbb{N}$
- - (ح) إذا كانت  $a, b$  عددين حقيقيين موجبين ،  $n \in \mathbb{N}$  فإن  $a^n < b^n$  إذا وإذا فقط كانت  $a < b$ .
- - (ط) بين أي إذا كانت  $a \leq x \leq b, a \leq y \leq b$  فإن  $|x - y| \leq b - a$ .  
فسر ذلك هندسياً.
- - (ي) بفرض  $a \in \mathbb{R}, \delta > 0$ . وضح أن  $a - \delta < x < a + \delta$  إذا وإذا فقط ،  $|x - a| < \delta$  وبالمثل  $a - \delta \leq x \leq a + \delta$  إذا وإذا فقط  $|x - a| \leq \delta$ .
- - (ك) إذا كانت  $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$  فبين أن  $|a/b| = |a|/|b|$ .
- - (ل) وضح إذا كانت  $a, b \in \mathbb{R}$  فإن  $|a + b| = |a| + |b|$  إذا وإذا فقط  $ab \geq 0$ .
- - (م) ارسم رسماً تخطيطياً (رسم مجمل) للنقط  $(x, y)$  في المستوى  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  حيث  $|y| = |x|$
- - (ن) ارسم رسماً تخطيطياً (رسم مجمل) للنقط  $(x, y)$  في المستوى  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  حيث  $|x| + |y| = 1$
- - (س) إذا كانت  $x, y, z$  تنتمي إلى  $\mathbb{R}$  فإن  $x \leq y \leq z$  إذا وإذا فقط  $|x - y| + |y - z| = |x - z|$ .
- - (ع) إذا كانت  $0 < a < 1$  فإن  $a^2 < a < 1$  بينما إذا كانت  $a < 1$  فإن  $1 < a^3 < a$ .

## الباب السادس — خاصية الإتمام أو الاكمال للمقدار $\mathbb{R}$ :

في هذا الباب ستقدم خاصية إضافية لنظام المسدد الحقيقي التي تسمى غالباً « خاصية الإتمام » حيث تضمن وجود العناصر في  $\mathbb{R}$  عند تحقيق فروض معينة . يوجد روايات أو تحويلات كثيرة لخاصية التتام أو الإتمام ولكن سنختار هنا إعطاء الطريقة الأكثر فاعلية مفترضين أن الفئات المحدودة في  $\mathbb{R}$  محدودة من أعلى .

### الأعلى والآننى :

الآن ستقدم تصوراً للحد الأعلى لفئة أعداد حقيقية . وهذه الفكرة لها أهمية قصوى في الأبواب القادمة .

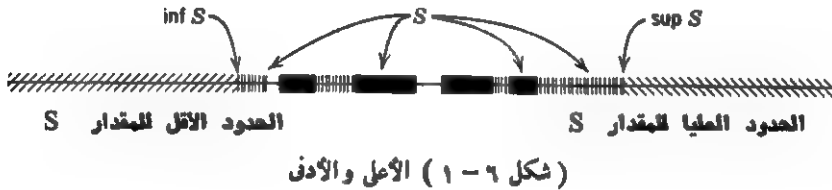
٦-١ تعريف . بفرض  $S$  فئة جزئية من  $R$  .

(أ) عنصر  $u \in R$  يقال إنه حد أعلى للفئة الجزئية  $S$  إذا كانت  $s \leq u$  لكل  $s \in S$

(ب) عنصر  $w \in R$  يقال إنه حد أسفل للفئة الجزئية  $S$  إذا كانت  $w \leq s$  لكل  $s \in S$

نلاحظ أن فئة جزئية  $S \subseteq R$  ربما ليس لها حد أعلى (مثال ذلك عند أخذ  $S = R$  . لكن إذا كانت لها حد أعلى واحد فحينئذ يكون لها عدد لا نهائي (لأنه إذا كانت  $u$  حداً أعلى للفئة  $S$  فحينئذ  $u + n$  هو أيضاً حد أعلى للفئة  $S$  لأي  $n \in \mathbb{N}$  ) . ومرة أخرى الفئة  $S_1 = \{x \in R : 0 < x < 1\}$  الحد الأعلى لها هو واحد صحيح ، وفي الحقيقة ، أى عدد  $u \geq 1$  هو حد أعلى لفئة  $S_1$  . وبالمثل الفئة  $S_2 = \{x \in R : 0 \leq x \leq 1\}$  لها نفس الحد الأعلى مثل  $S_1$  . لاحظ أن  $S_2$  تحتوى الحد الأعلى الذى قيمته واحد صحيح بينما  $S_1$  لا تحتوى أيًا من حدوده العليا (لماذا لا يمكن لعدد مثل  $c < 1$  أن يكون حداً أعلى لفئة  $S_1$  ؟) .

ولتوضيح أن عدداً  $u \in R$  لا يكون حداً أعلى للمقدار  $S \subseteq R$  يجب أن توجد عنصراً  $s_0 \in S$  بحيث أن  $u < s_0$  . فإذا كانت  $S = \emptyset$  أى الفئة الخالية فلا يمكن عمل هذا . وبناء عليه تكون الفئة الخالية لها خاصية غريبة وغير عادية وهى أن أى عدد حقيق هو حد أعلى وأيضاً أى عدد حقيق هو حد أدنى للفئة الخالية  $\emptyset$  . وهذا ربما يكون غير طبيعى ولكنه نتيجة منطقية لتعاريفنا ولذلك يجب أن نقبله .



وكاصطلاح ، عندما يكون للفئة حد أعلى نقول إنها محدودة من أعلى وعندما يكون الحد أدنى نقول إنها محدودة من أسفل . وإذا كانت الفئة لها كل من الحد الأعلى والحد الأدنى فنقول إنها محدودة . وإذا كانت الفئة ينقصها إما الحد الأعلى أو الحد الأدنى فنقول إنها غير محدودة . إذن  $S_1$  ،  $S_2$  السابقتان كليهما محدودتان . كيفما كان فإن الفئة الجزئية  $P = \{x \in R : x > 0\}$  لفئة  $R$  غير محدودة لأنها ليس لها حداً أعلى . وبالمثل الفئة  $R$  غير محدودة لأنه ليس لها إما حد أعلى أو حد أدنى .

٦-٢ تعريف . نفرض أن  $S$  هى فئة جزئية من  $R$  .

(أ) إذا كانت  $S$  محدودة من أعلى فحينئذ يقال الحد الأعلى من  $S$  أنه الأعلى (أو أقل

حد أعلى) من  $S$  إذا كان أقل من أى حد أعلى آخر من  $S$  .

(ب) إذا كانت  $S$  محدودة من أسفل فحينئذ يقال الحد الأدنى من  $S$  أنه الأدنى (أو أكبر حد أدنى) من  $S$  إذا كان أكبر من أى حد أدنى آخر من  $S$  .  
(انظر الشكل ٦ - ١) .

وبتعبير مختلف ، عدد  $u \in R$  هو الأعلى من الفئة الجزئية  $S$  للفئة  $R$  إذا حقق الشرطان الآتيان :

$$(i) \quad s \leq u \quad \text{لكل } s \in S$$

(ii) إذا كانت  $v$  أى عدد بحيث  $s \leq v$  لكل  $s \in S$  فإن  $v \leq u$  . وفى الحقيقة الشرط (i) يجعل  $u$  حداً أعلى من  $S$  ، والشرط (ii) يوضح أن  $u$  أقل من أى حد أعلى آخر من  $S$  .

ومن الواضح أنه يوجد فقط أعلى وحيد للفئة الجزئية  $S$  من  $R$  لأنه إذا كانت  $u_1$  ،  $u_2$  هما أعلىان للفئة الجزئية  $S$  فحينئذ يكونان معاً حدين علويين للفئة الجزئية  $S$  وبما أن  $u_1$  هو أعلى الفئة الجزئية  $S$  ،  $u_2$  هو الحد الأعلى للفئة الجزئية  $S$  فيجب أن يكون  $u_1 \leq u_2$  وبطريقة ماثلة يمكن توضيح أن  $u_2 \leq u_1$  . ونتيجة لذلك يكون  $u_1 = u_2$  . وبفس الطريقة يمكن أن نوضح أنه يوجد فقط أدنى وحيد للفئة الجزئية  $S$  من  $R$  . وسوف نرسم لها بالآتي :

أعلى  $S$  ، أدنى  $S$  .

ومن المناسب غالباً أن نعرف خاصية أخرى لأعلى الفئة الجزئية من  $R$  .

٦ - ٣ مفترض . العدد  $u \in R$  هو الأعلى لفئة جزئية غير خالية  $S \subseteq R$  إذا وإذا فقط له الخواص الآتية :

(i) لا يوجد عناصر  $s \in S$  حيث  $u < s$  .

(ii) إذا كانت  $u < v$  ، فحينئذ يوجد عنصر  $s_0 \in S$  بحيث أن  $s_0 < v$  .

البرهان . نفرض أن  $u$  تحقق (i) ، (ii) . الشرط (i) يدل على أن  $u$  حد أعلى للفئة  $S$  . إذا كانت  $v$  أى عدد حيث  $u < v$  ، حينئذ خاصية (ii) توضح أن  $v$  لا يمكن أن تكون حداً أعلى للفئة  $S$  . إذن  $u$  هو أعلا للفئة  $S$  .

وبالعكس ، نفرض أن  $u$  هو حد أعلى للفئة  $S$  . وحيث إن  $u$  هو الحد الأعلى للفئة  $S$  فشرط (i) يتحقق . وإذا كانت  $u < v$  فحينئذ  $v$  لا تكون حداً أعلى للفئة  $S$  . لذلك يوجد عنصر  $s_0 \in S$  بحيث إن  $s_0 < v$  .

وهو المطلوب إثباته .

ويجب أن يقنع القارئ نفسه بأن العدد 1 هو الأعلى لكلتا الفئتين  $S_1$  ،  $S_2$  المعرفتين بعد تعريف ٦ - ١ . نلاحظ أن  $S_2$  تحتوي أعلاها ولكن  $S_1$  لا تحتوي أعلاها . أى إنه عند قولنا أن فئة لها أعلى فليس هناك نص على كون الفئة تحتوي أعلاها كمتمركز فيها أم لا .

الخاصية الأساسية والعميقة لنظام العدد الحقيقى هي : كل فئة جزئية غير خالية للفئة  $R$  ومحدودة من فوق يوجد لها أعلى . وسنستخدم استعمالاً هاماً ومتكرراً لهذه الخاصية التى هى آخر فرض لنا عن  $R$  .

٦ - ٤ : خاصية العسلو . كل فئة أعداد حقيقية وغير خالية ومحدودة من فوق لها أعلى .

والخاصية المناظرة الأدنى يمكن تكوينها من خاصية العسلو بسهولة .

٦ - ٥ : خاصية الأدنى . كل فئة أعداد حقيقية وغير خالية ولها حد أسفل يكون لها أدنى .

البرهان . نفرض أن  $S$  محدودة من أسفل ويفرض  $S_1 = \{-s : s \in S\}$  بحيث إن  $S_1$  محدودة من أعلى . خاصية العسلو تؤكد أن  $S_1$  لها أعلى وليكن  $u$  ، وسنتركها للقارئ لتوضيح أن  $-u$  هى الأدنى للفئة  $S$  .

وهو المطلوب إثباته

### خاصية أرشميدس (\*) :

نتيجة هامة من خاصية العسلو هو أن الفئة الجزئية  $N$  للأعداد الطبيعية ليست محدودة من أعلى فى  $N$  . وبالتخصيص هنا يعنى أنه بتحديد أى عدد حقيقى  $x$  فإنه يوجد عدد طبيعى  $n_x$  بحيث يكون أكبر من  $x$  ( وإلا كانت  $x$  حداً أعلى للمقدار  $R$  ) . وسنبرهن هذا النص الآن :

٦ - ٦ : خاصية أرشميدس . إذا كانت  $x \in R$  فيوجد عدد طبيعى  $n_x \in N$  بحيث أن  $n_x < x$  .

البرهان . إذا لم يكن الاستنتاج صحيحاً فإن  $x$  حد أعلى للمقدار  $N$  .

لذلك باستخدام خاصية العسلو ، نجد أن  $N$  لها أعلى مثل  $u$  . حيث  $x$  هى حد أعلى للفئة  $N$  ، فينتج أن  $x \leq u$  . وبما أن  $u > 1$  —  $u$  فينتج من مفترض ٦ - ٣ (ii) أنه يوجد  $n_1 \in N$  بحيث أن  $n_1 < u - 1$  . وإذن  $u < n_1 + 1$  ولكن بما أن  $n_1 + 1 \in N$  فهذا يخالف الفرض وهو أن  $u$  هى حداً أعلى للفئة  $N$

(\*) هذه الخاصية للمقدار  $R$  تسمى باسم أرشميدس (٢٨٧-٢١٢) قبل الميلاد الذى كان يلقب بعقل المصور القديمة (خاصة الرومان واليونان) وكان واحداً من المؤسسين للطريقة العلمية .



٦-٧ نتيجة . إذا فرضنا أن  $y$  ،  $z$  عدنان حقيقيان موجبان بالضبط فإن :

(أ) يوجد عدد طبيعي  $n$  بحيث إن  $ny > z$  .

(ب) يوجد عدد طبيعي  $n$  بحيث إن  $0 < 1/n < z$  .

(ج) يوجد عدد طبيعي  $n$  بحيث إن  $n - 1 \leq y < n$  .

البرهان . (أ) بما أن  $y$  ،  $z$  موجبان بالضبط فإن  $x = z/y$  هو أيضاً موجب بالضبط ،  
نفرض  $n \in \mathbb{N}$  بحيث إن  $z/y = x < n$  ، إذن  $z < ny$  كال المطلوب .

(ب) نفرض أن  $n \in \mathbb{N}$  بحيث  $0 < 1/z < 1/n$  حينئذ  $0 < 1/n < z$  .

(ج) خاصية أرشيدس تؤكد وجود أعداد طبيعية  $m$  بحيث  $y < m$  وإذا فرضنا أن  $m$   
هي أقل عدد طبيعي كهذا ( انظر باب ٣ ) فينتج  $n - 1 \leq y < n$  .  
وهو المطلوب اثباته .

نلاحظ بعد نظرية ٥-٧ أنه لا يوجد أصغر عدد حقيق موجب بالضبط . نتيجة ٦-٧ (ب)  
توضح أنه لأي  $z > 0$  يوجد عدد قياسي على الصورة  $1/n$  حيث  $0 < 1/n < z$  .  
أحياناً نقول « يوجد أعداد قياسية صغيرة اختيارية على الصورة  $1/n$  » .

## وجود العدد $\sqrt{2}$ :

صفة هامة لخاصية الملوي هي أنها ( كما قلنا سابقاً ) تؤكد وجود أعداد حقيقية معينة .  
وستستخدمها مرات عديدة بهذا المعنى . والآن سنوضح أنها تضمن وجود عدد حقيق موجب  $x$   
بحيث إن  $x^2 = 2$  ، أى جذر تربيعي موجب للمقدار 2 . وهذه النتيجة تكمل نظرية ٤-٧ .  
٦-٨ نظرية . يوجد عدد موجب  $x \in \mathbb{R}$  بحيث إن  $x^2 = 2$  .

البرهان . نفرض  $S = \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y, y^2 \leq 2\}$  ، الفئة  $S$  محدودة من أعلى  
بالعدد 2 لأنه إذا لم يكن كذلك فإنه يوجد عنصر  $s \in S$  بحيث إن  $s > 2$  ومن ذلك  
ينتج أن  $2 \leq s^2 < 4$  أى تناقض للفرض ومن خاصية الملوي يكون للفئة  $S$  أعلى وإذا فرضنا  
أن  $\sup S = x$  فن الواضح أن  $x > 0$  .

وإذا زعمنا أن  $x^2 = 2$  ، لأنه إذا لم يكن هذا صحيحاً فحينئذ إما  $x^2 < 2$  أو  $x^2 > 2$  فإذا  
كانت  $x^2 > 2$  نفرض أن  $n \in \mathbb{N}$  قد اخترت بحيث أن  $1/n < (2 - x^2)/(2x + 1)$  وفي  
هذه الحالة يكون

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \leq x^2 + \frac{2x+1}{n} < x^2 + (2 - x^2) = 2$$

وهذا معناه أن  $x + 1/n \in S$  أى تخالف حقيقة أن  $x$  هى الحد الأعلى للفترة  $S$ .

إذا كانت  $x^2 > 2$  ، فنختار  $m \in \mathbb{N}$  بحيث أن  $1/m < (x^2 - 2)/2x$  . وبما أن  $x = \sup S$  يوجد  $s_0 \in S$  حيث  $x - 1/m < s_0$  ، لكن هذا يعنى أن

$$2 < x^2 - \frac{2x}{m} < x^2 - \frac{2x}{m} + \frac{1}{m^2} = \left(x - \frac{1}{m}\right)^2 < s_0^2$$

إذن  $s_0^2 > 2$  ، أى تخالف حقيقة أن  $s_0 \in S$ .

وبما أننا قد استبعدنا إمكانية أن  $x^2 < 2$  ،  $x^2 > 2$  فيجب أن يكون  $x^2 = 2$  . وهو المطلوب إثباته

بتعديل بسيط فى نظرية ٦-٨ ، يمكن للقارئ أن يوضح أنه إذا كانت  $a \geq 0$  فحينئذ يوجد عدد وحيد  $b \geq 0$  بحيث  $b^2 = a$  . نسمى الجذر التربيعى الموجب للمقدار  $a$  ونرمز له بالرمز

$$b = \sqrt{a} \quad \text{أو} \quad b = a^{1/2}$$

نعرف الآن أنه يوجد على الأقل عنصر واحد غير قياسى ، وهو  $\sqrt{2}$  ( الجذر التربيعى الموجب للمقدار 2 ) . وفى الحقيقة يوجد أكثر من أعداد غير قياسية عن الأعداد القياسية بمعنى ( كما رأينا فى باب ٣ ) أن الفترة للأعداد القياسية عددية أو قابلة للعد بينما الفترة للأعداد غير القياسية غير عددية أو غير قابلة للعد . وسنوضح الآن أنه يوجد أعداد غير قياسية صغيرة اختيارية وهذه النتيجة تنتم نتيجة ٦-٧ .

نتيجة ٦-٩ . بفرض  $\xi > 0$  عدد غير قياسى ، وبفرض أن  $z > 0$  . فحينئذ يوجد عدد طبيعى  $m$  بحيث إن العدد غير القياسى  $\xi/m$  يحقق  $0 < \xi/m < z$  .

البرهان . بما أن  $z > 0$  ،  $\xi > 0$  ، فينتج من نظرية ٦-٥ (د) ، ٦-٥ (ح) أن  $\xi/z > 0$  . ومن خاصية أرخميدس يوجد عدد طبيعى  $m$  بحيث إن  $0 < \xi/z < m$  . وإذن  $0 < \xi/m < z$  وتوضيح أن  $\xi/m$  غير قياسى يترك كتدريج . وهو المطلوب إثباته

والآن سنوضح أنه بين أى عددين حقيقيين مميزين يوجد عدد قياسى وعدد غير قياسى ( وفى الحقيقة يوجد عدد لا نهائى من كل نوع ) .

٦-١٠ نظرية . بفرض  $x$  ،  $y$  عددين حقيقيين حيث  $x < y$  فإن

(أ) يوجد حينئذ عدد قياسى  $r$  بحيث إن  $x < r < y$  .

(ب) إذا كانت  $0 < \xi$  أى عدد غير قياسي فإنه يوجد عدد قياسي  $s$  بحيث إن العدد غير القياسي  $\xi$  يحقق  $x < s\xi < y$  .

البرهان : لا يوجد تغيير في التعميم لفرض أن  $0 < x$  . (لماذا ؟)

(أ) بما أن  $y - x > 0$  فينتج من نتيجة ٦ - ٧ (ب) أنه يوجد عدد طبيعي  $m$  بحيث إن  $0 < 1/m < y - x$  . ومن نتيجة ٦ - ٧ (أ) يوجد عدد طبيعي  $k$  بحيث إن

$$\frac{k}{m} = k \frac{1}{m} > x$$

وستفرض أن  $n$  هو أقل عدد طبيعي كهذا فينتج أن

$$\frac{n-1}{m} \leq x < \frac{n}{m}$$

ويتضح لدينا أيضاً أن  $n/m < y$  وإلا

$$\frac{n-1}{m} \leq x < y \leq \frac{n}{m}$$

والتي ينتج منها أن  $1/m \leq y - x$  ، أى تخالف لاختيار  $m$  وإذن  $x < n/m < y$  .

(ب) نفرض أن  $0 < x < y$  ،  $0 < \xi$  فيكون لدينا  $x/\xi < y/\xi$  . ومن جزء (أ) ، يوجد عدد قياسي  $s$  بحيث إن  $x/\xi < s < y/\xi$  . ولذلك  $x < s\xi < y$  (وضح أن  $s\xi$  غير قياسي) . وهو المطلوب إثباته

### تمرينات :

- ٦ - (أ) أثبت أن فئة الأعداد الحقيقية غير الخالية والمحدودة لها أعلى وأدنى .
- ٦ - (ب) إذا كانت فئة جزئية  $S$  للفئة  $R$  لها حد علوى فحينئذ يكون هذا الحد العلوى أعلى للفئة الجزئية  $S$  .
- ٦ - (ج) اعط مثالا لفئة أعداد قياسية بحيث تكون محدودة ولكن ليس لها أعلى قياسي .
- ٦ - (د) اعط مثالا لفئة أعداد غير قياسية بحيث تكون لها أعلى قياسي .
- ٦ - (هـ) أثبت أن اتحاد فئتين محدودتين يكون محدوداً .
- ٦ - (و) اعط مثالا لمجموعة عددية لفئات محدودة والتي اتحادها يكون محدوداً ومثالا يكون فيه الاتحاد غير محدود .
- ٦ - (ز) إذا كانت  $S$  فئة محدودة في  $R$  وإذا كانت  $S_0$  فئة جزئية غير خالية للفئة  $S$  ، فاثبت أن

$$\inf S \leq \inf S_0 \leq \sup S_0 \leq \sup S$$

وأحياناً يكون من المناسب بدرجة كبيرة التعبير عن ذلك بطريقة أخرى .  
نفرض أن  $D \neq \emptyset$  وبفرض أن  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  لها مدى محدود . فإذا كانت  $D_0$  فئة جزئية غير خالية من  $D$  فإن .

$$\inf \{f(x) : x \in D\} \leq \inf \{f(x) : x \in D_0\} \leq \sup \{f(x) : x \in D_0\} \leq \sup \{f(x) : x \in D\}$$

٦ - (ح) بفرض  $X, Y$  فئتين غير خاليتين وبفرض أن  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  لها مدى محدود في  $\mathbb{R}$  وبفرض

$$f_1(x) = \sup \{f(x, y) : y \in Y\}, \quad f_2(y) = \sup \{f(x, y) : x \in X\}$$

كون أساس العلو المتكرر .

$$\begin{aligned} \sup \{f(x, y) : x \in X, y \in Y\} &= \sup \{f_1(x) : x \in X\} \\ &= \sup \{f_2(y) : y \in Y\} \end{aligned}$$

أحياناً نعبّر عن ذلك بالرموز كما يلي :

$$\sup_{x, y} f(x, y) = \sup_x \sup_y f(x, y) = \sup_y \sup_x f(x, y)$$

٦ - (ط) بفرض  $f, f_1$  كما في التمرين السابق وبفرض

$$g_2(y) = \inf \{f(x, y) : x \in X\}$$

أثبت أن :

$$\sup \{g_2(y) : y \in Y\} \leq \inf \{f_1(x) : x \in X\}$$

وضح أن متباينة دقيقة يمكن أن تتحقق . وأحياناً نعبّر عن هذه المتباينة كما يلي :

$$\sup_y \inf_x f(x, y) \leq \inf_x \sup_y f(x, y)$$

٦ - (ي) بفرض  $X$  فئة غير خالية وبفرض أن  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  لها مدى محدود في  $\mathbb{R}$  . فإذا كانت  $a \in \mathbb{R}$  وضع أن

$$\sup \{a + f(x) : x \in X\} = a + \sup \{f(x) : x \in X\},$$

$$\inf \{a + f(x) : x \in X\} = a + \inf \{f(x) : x \in X\}$$

٦ - (ك) بفرض  $X$  فئة غير خالية وبفرض أن  $f, g$  معرفتان على  $X$  ومداهما محدود في  $\mathbb{R}$  أثبت أن .

$$\begin{aligned} \inf \{f(x) : x \in X\} + \inf \{g(x) : x \in X\} &\leq \inf \{f(x) + g(x) : x \in X\} \\ &\leq \inf \{f(x) : x \in X\} + \sup \{g(x) : x \in X\} \\ &\leq \sup \{f(x) + g(x) : x \in X\} \\ &\leq \sup \{f(x) : x \in X\} + \sup \{g(x) : x \in X\} \end{aligned}$$

أعط أمثلة لتوضح أن كل متباينة يمكن أن تكون دقيقة .

٦ - (ل) إذا كانت  $z > 0$  فوضح أنه يوجد  $n \in \mathbb{N}$  بحيث إن  $1/2^n < z$  .

٦ - (م) عدل المعطيات المعطاة في نظرية ٦-٨ لتوضح أنه إذا كانت  $a > 0$  فحينئذ يوجد العدد

$$b = \sup \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y, y^2 \leq a\}$$

وله خاصية أن  $b^2 = a$  . هذا العدد سيرمز له بالرمز  $\sqrt{a}$  أو  $a^{1/2}$  ويسمى الجذر التربيعي الموجب للمقدار  $a$  .

٦ - (ن) استخدم تمرين ٥-٦ لتوضح أنه إذا كانت  $0 < a < 1$  فحينئذ  $0 < \sqrt{a} < 1$  .  
بيناً إذا كانت  $a < 1$  فإن  $1 < \sqrt{a} < a$

### مشروعات(\*) :

٦ -  $a$  إذا كانت  $a, b$  عددين حقيقيين موجبين دقيقين وإذا كانت  $n \in \mathbb{N}$  فقد عرفنا  $a^n, b^n$  . فينتج بالاستنتاج الرياضي أنه إذا كانت  $m, n \in \mathbb{N}$  فإن

$$a^m a^n = a^{m+n} \quad (i)$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (ii)$$

$$(ab)^n = a^n b^n \quad (iii)$$

$$a < b \quad \text{إذا وإذا فقط} \quad a^n < b^n \quad (iv)$$

سنختار العرف أن  $a^0 = 1$  ،  $a^{-n} = 1/a^n$  ، أى إننا قد عرفنا  $a^x$  للمقدار  $x$  في  $\mathbb{Z}$  وقد اخترت حالا الخواص (i) - (iii) بأنها ما زالت قائمة .

نرغب في تعريف  $a^x$  للأعداد القياسية  $x$  بحيث أن الخواص (i) - (iii) تتحقق . الخطوات القادمة يمكن استخدامها كواجب . وفي كل الأحوال سنفترض أن  $a, b$  عددان حقيقيان كل منهما أكبر من الواحد الصحيح .

(\*) مشروعات يقصد بها أن تكون أحياناً أكثر تحديات للقارئ ، ولكن باعتبار المشروعات تختلف في الصعوبة . وقد وضعنا هذه (نوعاً ما صعبة) الثلاث مشروعات هنا لأنها تنتمي هنا منطقياً . والقارئ فيما بعد سيرجع إليها بعد تجميع خبرة أكثر عن العلو أو الأعلى .

(أ) إذا كانت  $r$  عددا قياسياً معطى بالعلاقة  $r = m/n$  حيث  $m, n$  أعداد صحيحة ،  $n > 0$  . نعرف  $S_r(a) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x^n \leq a^m\}$  . وضح أن  $S_r(a)$  هي فئة جزئية غير خالية محدودة للفئة  $\mathbb{R}$  وعرف  $a^r = \sup S_r(a)$  .

(ب) أثبت أن  $z = a^r$  هو الجذر الموجب الوحيد للمعادلة  $z^n = a^m$  إرشاد : يوجد مقدار ثابت  $K$  بحيث إنه إذا كانت  $0 < \varepsilon < 1$  فإن  $1 + K\varepsilon < (1 + \varepsilon)^n$  . إذن إذا كانت  $x^n < a^m < y^n$  فيوجد  $\varepsilon > 0$  بحيث إن  $x^n(1 + \varepsilon)^n < a^m < y^n/(1 + \varepsilon)^n$  .

(ج) أثبت أن قيمة المقدار  $a^r$  المعطى في الجزء (أ) لا يعتمد على تمثيل  $r$  في الصورة  $m/n$  . أيضاً وضح أنه إذا كانت  $r$  عدد صحيح موجب فإن التعريف الجديد للمقدار  $a^r$  يعطى نفس القيمة التي يعطيها التعريف القديم .

(د) وضح أنه إذا كانت  $r, s \in \mathbb{Q}$  فإن  $a^{r+s} = a^r a^s$  ،  $(a^r)^s = a^{rs}$  .

(هـ) وضح أن  $a^r b^r = (ab)^r$  .

(و) إذا كانت  $r \in \mathbb{Q}, r > 0$  فإن  $a < b$  إذا وإذا فقط  $a^r < b^r$  .

(ز) إذا كانت  $r, s \in \mathbb{Q}$  فإن  $r < s$  إذا وإذا فقط  $a^r < a^s$  .

(ح) إذا كانت  $c$  عدد حقيقى يحقق  $0 < c < 1$  ، نعرف  $c^r = (1/c)^{-r}$  . وضح أن الأجزاء (د) ، (هـ) ، (و) ، (ز) وتظل أيضاً نتيجة مشابهة للجزء (ج) ولكن بعكس المتباينة .

٦-  $\beta$  المقدار  $a^x$  قد عرف لأعداد قياسية ونرغب في تعريفه لمقدار حقيقى  $x$  . ولعمل هذا نتمتع ببحرية النتائج السابقة في المشروعات . وكما سبق إذا فرضنا أن  $a, b$  عددان حقيقيان كلا منهما أكبر من الواحد الصحيح . إذا كانت  $u \in \mathbb{R}$  ، نفرض أن

$$T_u(a) = \{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \leq u\}$$

وضح أن  $T_u(a)$  فئة جزئية غير خالية ومحدودة للفئة  $\mathbb{R}$  وعرف

$$a^u = \sup T_u(a)$$

أثبت أن هذا التعريف يعطى نفس النتيجة السابقة عندما تكون  $u$  قياسية . كون الخواص المناظرة للتقارير المعطاة في الأجزاء (د) - (ز) للمشروع السابق . الدالة المهمة جداً التي عرفت على  $\mathbb{R}$  في هذا المشروع تسمى بالدالة الأسية (للأساس  $a$ ) . بعض التعريفات المباشرة مستعنى في الأبواب القادمة . من المناسب أحياناً أن نرمز لهذه الدالة بالرمز

$$\exp_a$$

ونرمز لقيمتها عند العدد الحقيقى  $u$  بالرمز  $\exp_a(u)$  بدلا من  $a^u$  .

٦ -  $\gamma$  باستخدام خواص الدالة الأسية التي أسست في المشروع السابق . وضع أن  $\exp_a$  دالة إدخالية نطاقها  $R$  ومداها  $\{y \in R : y > 0\}$  . ونتيجة لفرضنا أن  $a > 1$  فهذه الدالة الأسية تزايدية دقيقة بمعنى أن إذا كانت  $x < u$  فإن  $\exp_a(x) < \exp_a(u)$  ولذلك الدالة العكسية يكون لها وجود بنطاق  $\{v \in R : v > 0\}$  ، وعلى  $R$  . تسمى الدالة العكسية باللوغاريتم ( للأساس  $a$  ) ويرمز له بالرمز

$$\log_a$$

وضع أن  $\log_a$  دالة تزايدية دقيقة وأن

$$\exp_a[\log_a(v)] = v \text{ عند } v > 0 , \log_a[\exp_a(u)] = u \text{ عند } u \in R$$

أيضاً وضع أن  $\log_a(1) = 0, \log(a)_a(a) = 1$  وأن

$$\log_a(v) < 0 \text{ عند } v < 1 , \log_a(v) > 0 \text{ عند } v > 1 .$$

أثبت أنه إذا كانت  $v, w > 0$  فإن .

$$\log_a(vw) = \log_a(v) + \log_a(w)$$

وبالإضافة إلى ذلك إذا كانت  $v > 0$  ،  $x \in R$  فإن

$$\log_a(v^x) = x \log_a(v)$$

## الباب السابع - القواطع ، الفترات والفئة المائلة :

طريقة أخرى لإتمام الأعداد القياسية للحصول على  $R$  ابتكرها ديدى كيند(\*) المؤسسة على فكرة « القاطع » .

٧ - ١ تعريف الزوج المرتب  $(A, B)$  لفتتين جزئيتين غير خاليتين للمقدار  $R$  يقال إنه يكون قاطعاً إذا كان  $A \cup B = R, A \cap B = \emptyset, a < b$  لكل  $a \in A$  ولكل  $b \in B$  .

وكثال نموذجي لقاطع في  $R$  يحصل عليه لعنصر ثابت  $\xi \in R$  بالتعريف

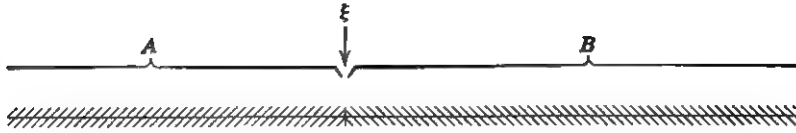
$$A = \{x \in R : x \leq \xi\}, \quad B = \{x \in R : x > \xi\}$$

وبالتناوب يمكننا أخذ

$$A_1 = \{x \in R : x < \xi\}, \quad B_1 = \{x \in R : x \geq \xi\}$$

(\*) ريشارد ديدى كيند (١٨٣١ - ١٩١٦) كان تلميذاً لجاوس . لقد أسهم في نظرية العدد ولكن من أحسن أعماله هو تشييد نظام العدد الحقيقي .

خاصية هامة للمقدار  $R$  هي أن كل قاطع في  $R$  يعين بعدد حقيقي ما . وسنؤسس هذه الخاصية .



( شكل ٧ - ١ ) قاطع ديدى كيند

٧ - ٢ خاصية القطع ( القص ) . إذا كانت  $(A, B)$  قاطعاً في  $R$  فإنه يوجد عدد وحيد  $\xi \in R$  بحيث إن  $a \leq \xi$  لكل  $a \in A$  ،  $b \leq \xi$  لكل  $b \in B$  .

البرهان . من الفرض تكون الفئتان  $A$  ،  $B$  غير خاليتين . أى عنصر من  $B$  هو حد أعلى للفئة  $A$  . فحينئذ  $A$  لها أعلى والذي سترمز له بالرمز  $\xi$  . وحيث إن  $\xi$  هو حد أعلى للفئة  $A$  ، فيكون  $\xi \leq a$  لكل  $a \in A$  .

إذا كانت  $b \in B$  فن تعريف القطع يكون  $a \leq b$  لكل  $a \in A$  فحينئذ  $b$  هي الحد الأعلى للفئة  $A$  وكذلك  $b \leq \xi$  . أى إنه أمكن إثبات وجود عدد له الخواص المعطاة في الفرض .

لإثبات أن المقدار  $\xi$  وحيد، نفرض أن  $\eta \in R$  حيث إن  $a \leq \eta$  لكل  $a \in A$  ،  $\eta \leq b$  لكل  $b \in B$  . من ذلك ينتج أن  $\eta$  هي الحد الأعلى للمقدار  $A$  ، إذن  $\xi \leq \eta$  . وإذا كانت  $\eta < \xi$  فحينئذ يوجد عدد  $\zeta = (\xi + \eta)/2$  بحيث إن  $\xi < \zeta < \eta$  الآن إما  $\zeta \in A$  أو  $\zeta \in B$  فإذا كانت  $\zeta \in A$  فيكون لدينا تناقض للحقيقة التي تقول إن  $a \leq \xi$  لكل  $a \in A$  وإذا كانت  $\zeta \in B$  فيكون لدينا تناقض للحقيقة التي تقول إن  $\eta \leq b$  لكل  $b \in B$  ولذلك يجب أن يكون  $\xi = \eta$  وهو المطلوب إثباته

وبالضبط الذى عمله ديدى كيند في الجوهر لتعريف العدد الحقيقي بأنه قاطع في نظام العدد القياسى . وهذه العملية تمكن الفرد من تركيب مجموعة العدد الحقيقي  $R$  من الفئة  $Q$  للأعداد القياسية .

## الخلايا والفترات :

إذا كانت  $a \in R$  ، فإن الفئتين

$$\{x \in R : x < a\}, \quad \{x \in R : x > a\}$$

تسمى شعاعان مفتوحان ومحددان بالمقدار  $a$  . بالمثل الفئتان



$$\{x \in \mathbf{R} : x \leq a\}, \quad \{x \in \mathbf{R} : x \geq a\}$$

تسمى شعاعان متعلقان ومحددان بالمقدار  $a$  . النقطة  $a$  تسمى النقطة الأخيرة لهذه الأشعة .  
وغالباً يرمز لهذه الفئات بالرموز

$$(-\infty, a), \quad (a, +\infty), \quad (-\infty, a], \quad [a, +\infty)$$

على الترتيب ، وهنا  $-\infty$  ،  $+\infty$  هي رموز فقط ولا يمكن اعتبارها عناصر في  $\mathbf{R}$  .  
إذا كانت  $a, b \in \mathbf{R}$  و  $a \leq b$  فحينئذ الفتة

$$\{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$$

تسمى الخلية المفتوحة المحددة بالمقدارين  $a$  ،  $b$  ويرمز لها غالباً بالرمز  $(a, b)$  . الفتة

$$\{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$$

تسمى الخلية المغلقة المحددة بالمقدارين  $a$  ،  $b$  ويرمز لها بالرمز  $[a, b]$  . الفتتان

$$\{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\}, \quad \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}$$

تسميان بالخلايا نصف المفتوحة (أو نصف المغلقة) المحددة بالمقدارين  $a$  ،  $b$  ويرمز  
لها بالرمز

$$[a, b), \quad (a, b],$$

على الترتيب . النقطتان  $a$  ،  $b$  تسميان النقطتان النهائيان لهذه الخلايا .

الفترة في  $\mathbf{R}$  يقصد بها إما شعاع أو خلية أو كل  $\mathbf{R}$  . ولذلك يوجد عشرة أنواع مختلفة  
من الفترات في  $\mathbf{R}$  هي

$$\emptyset, \quad (-\infty, a), \quad (-\infty, a], \quad [a, b], \quad [a, b) \\ (a, b], \quad (a, b), \quad [b, +\infty), \quad (b, +\infty), \quad \mathbf{R}$$

حيث  $a, b \in \mathbf{R}$  ،  $a < b$  . وخمس من هذه الفترات محدودة واثنين محدودة من أعلى  
وليس من أسفل واثنين محدودة من أسفل وليس من أعلى .

وحدة الخلية (أو وحدة الفترة) هي الفتة  $[0, 1] = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq 1\}$  ويرمز لها  
بالرمز القياسي  $I$  .

سنقول إن المتتابعة الفترات  $I_n$ ،  $n \in \mathbf{N}$  متداخلة في حالة تحقق سلسلة الاشتمالاتية .

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$$

ومن المهم أن نلاحظ أن المتتابعة المتداخلة من الفترات لا تحتاج إلى وجود نقطة مشتركة .  
وفي الحقيقة يكون كترتيب لتوضيح أنه إذا كانت  $I_n = (n, +\infty)$ ،  $n \in \mathbf{N}$  فحينئذ

المتتابعة للفترة التي حصل عليها تكون متداخلة وليس لها نقطة مشتركة بالمثل إذا كانت  $J_n = (0, 1/n), n \in \mathbb{N}$  فإن المتتابعة متداخلة وليس لها نقطة مشتركة .

كيفما كان فإن الخاصية الهامة للمقدار  $\mathbb{R}$  هي أنه متتابعة متداخلة لخلايا مغلقة نقطة مشتركة .  
والآن سنبرهن هذه الحقيقة .

٧ - ٣ خاصية الخلايا المتداخلة . إذا كانت  $n \in \mathbb{N}$  وبفرض أن  $I_n$  خلية مغلقة غير خالية في  $\mathbb{R}$  ونفرض أن هذه المتتابعة متداخلة بهذا التفسير

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$$

فحينئذ يوجد عنصر ينتمي إلى كل هذه الخلايا .

البرهان . نفرض أن  $I_n = [a_n, b_n]$  حيث  $a_n \leq b_n$  لكل  $n \in \mathbb{N}$  فنلاحظ أن  $I_n \subseteq I_1$  لكل  $n$  وحينئذ  $a_n \leq b_1$  لكل  $n$  . إذن الفئة  $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  محدودة من أعلى . سنفرض أن  $\xi$  هي أعلى الفئة حينئذ  $\xi \leq a_n$  لكل  $n$  .

سنزعم أن  $\xi \leq b_n$  لكل  $n \in \mathbb{N}$  فإن لم يكن فيوجد مقدار ما  $m \in \mathbb{N}$  بحيث إن  $b_m < \xi$  بما أن  $\xi$  هي أعلى الفئة  $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  فيجب وجود  $a_p$  بحيث إن  $b_m < a_p$  الآن نفرض أن  $q$  هي أكبر العددين الطبيعيين  $p, m$  . بما أن  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$  ،  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq \dots$  فإننا نستنتج أن  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq \dots$  . لكن هذا يعني أن  $b_n \leq \xi$  تناقض الفرض  $I_q = [a_q, b_q]$  خلية مغلقة غير خالية . لذلك  $\xi \leq b_n$  لكل  $n \in \mathbb{N}$  وحيث إن  $a_n \leq \xi \leq b_n$  فنستنتج أن  $\xi \in I_n = [a_n, b_n]$  لكل  $n \in \mathbb{N}$  .

وهو المطلوب إثباته

ونلاحظ أن تحت فرض ٣ - ٧ فرما يوجد أكثر من عنصر واحد مشترك . وفي الحقيقة إذا فرضنا  $\eta = \inf \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$  فيمكن - كثرين - توضيح أن .

$$[\xi, \eta] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

### فئة كانتور (C)

سنقدم الآن فئة جزئية من وحدة الخلية  $I$  وهي تعتبر شيقة وفي معظم الأحيان مفيدة في تركيب أمثلة وأمثلة مضادة . وسنرمز لهذه الفئة بالرمز  $F$  وسنشير إليها بفئة كانتور (مع إنها أحيانا تسمى فئة كانتور الثلاثية أو عدم الاتصال لكانتور بمعنى فئة كانتور غير المستمرة) .

وأحد الطرق لوصف  $F$  هو كفاءة لأعداد حقيقية في  $I$  التي لها مفكوك ثلاثي (= الأساس 3) باستخدام الرقبن 0 و 2 فقط . كيفما كان سنختار تعريفها بحدود مختلفة . والمعنى

الذى يجعلها أكثر دقة هي كون  $F$  تتكون من هذه النقط في  $I$  التى تبقى بعد إزالة الفترات التى تكون « الثلث الأوسط » على التعاقب .

وأكثر صراحة نجد أنه إذا أزلنا الثلث الأوسط المفتوح من  $I$  فإننا نحصل على الفشة

$$F_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$$

وإذا أزلنا الثلث الأوسط المفتوح لكل من الفترتين المغلقتين في  $F_1$  نحصل على الفشة

$$F_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$$

إذن  $F_2$  هي اتحاد  $(2^2 = 4)$  فترات مغلقة كل منها في الصورة  $[k/3^2, (k+1)/3^2]$  . ونحصل الآن على الفشة  $F_3$  بحذف الثلث الأوسط المفتوح لكل من هذه الفترات وفي الحالة العامة نجد أنه إذا تركبت  $F_n$  بحيث تتكون من اتحاد  $2^n$  فترات في الصورة  $[k/3^n, (k+1)/3^n]$  فحينئذ نحصل على  $F_{n+1}$  بحذف الثلث الأوسط المفتوح لكل من هذه الفترات . فئة كانتور هي التى تبقى بعد إجراء هذه العملية لكل  $n$  في  $N$  .

٧ - تعريف . فئة كانتور  $F$  هي تقاطع الفئات  $F_n$  ،  $n \in N$  ، الناتجة من إزالة أثلث وسطي مفتوحة على التعاقب .

ومن لحة أولى ربما يظهر أن كل نقطة تزال نهائياً بهذه العملية . ولكن واضح أن هذه الحالة ليست صحيحة لأن النقط  $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$  تنتمى إلى كل الفئات  $F_n$  ،  $n \in N$  ، ومن ثم تنتمى إلى فئة كانتور  $F$  . وفي الحقيقة يكون من السهل ملاحظة أن هناك عددا لا نهائياً من النقط في  $F$  حتى إذا كانت  $F$  رفيعة نسبياً في هذا الصدد . وفي الواقع ليس من الصعب أن نوضح أنه وجد عدد غير تنازلى لعناصر  $F$  وأن نقط  $F$  يمكن وضعها كتناظر أحادى مع نقط  $I$  . أى إن الفئة  $F$  تحتوى على عدد كبير من العناصر .



( شكل ٧ - ٢ ) فئة كانتور

الآن سنطلى معنيين اللذين تكون فيهما  $F$  رفيعة . أولاً نلاحظ أن  $F$  لا تحتوى أى فترة . خالية لأنه إذا كانت  $x$  تنتمى إلى  $F$  ،  $(a, b)$  فترة مفتوحة محتوية  $x$  فإن  $(a, b)$  تحتوى بعض الأثلاث الوسطى التى أزيلت لنحصل على  $F$  (لماذا ؟) إذن  $(a, b)$  ليست فترة جزئية من فترة كانتور لكن تحتوى نقطاً كثيرة لا نهائية في متممها  $(F)^c$  .

المعنى الثانى الذى فيه تكون  $F$  رفيعة يرجع أو يشير للطول بينما يكون من غير الممكن تعريف الطول لفترة جزئية اختيارية لفترة  $R$  . نجد من السهل إقناع الفرد بأن  $F$  لا يمكن أن يكون لها طول موجب لأن طول  $F_1$  هو  $\frac{1}{3}$  ، وطول  $F_2$  هو  $\frac{1}{9}$  . وعلى العموم طول  $F_n$  هو  $\frac{1}{3^n}$  . حيث إن  $F$  هى فترة جزئية من  $F_n$  ، فلا يمكن أن يكون طولها يزيد عن  $F_n$  . حيث إن هذا يجب أن يكون صحيحاً لكل  $n$  في  $N$  فنستنتج أن  $F$  — مع إنها غير قابلة للعد — لا يمكن أن يكون لها طول موجب .

ومن الغريب كما تبدو فترة كانتور ، نجد أن لها سلوكاً منتظماً نسبياً في أحوال كثيرة . فهى تمدنا بحزم من الفراسة إلى كيفية تكوين فترات جزئية معقدة من  $R$  . ومقدار القليل الذى تقودنا إليه بدهياً وهى أيضاً تفيد كاختبار للتصورات التى سنقدمها في الأبواب التالية والتى دلالتها لم تدرك كلية بدلالة الفترات وفترات جزئية أولية جداً .

## نماذج من $R$ :

في الأبواب ٤ - ٦ قدمنا  $R$  بدهياً بمعنى أننا دوننا قائمة لبعض الخواص التى افترضنا وجودها . وهذا يقربنا للسؤال عما إذا كانت مثل هذه الفترة موجودة بالفعل وإلى أى درجة تكون محددة وحيدة . وبينما سوف لا نقرر هذه الأسئلة فإنه من المناسب بالتأكيد ذكر الملاحظات الآتية عليها .

وجود الفترة التى هى حقل مرتب كامل يمكن توضيحها بتركيب فعل فإذا كان شخص له دراية كافية بالحقل القياسى  $Q$  فإنه يمكنه تعريف الأعداد الحقيقية كثفات جزئية خاصة للفترة  $Q$  ويعرف الجمع والضرب والعلاقات المرتبة بين هذه الكثافات الجزئية بطريقة تمكن من الحصول على حقل مرتب كامل . ويوجد عمليتان قياسيتان لإجراء هذا إحداها طريقة ديد كيند « للقواطع » والتى تناقش في كتاب رودن المدون في المراجع . الطريقة الثانية هى طريقة كانتور « لمتابعات كوشى » والتى تناقش في كتاب هاملتون ولاندن .

وفي البند السابق أكدنا أنه من الممكن تركيب نموذج للمقدار  $R$  من  $Q$  (في — على الأقل — طريقتين مختلفتين) . ومن الممكن أيضاً تركيب نموذج للمقدار  $R$  من الفترة  $N$  للأعداد الطبيعية

وهذا غالباً أخذ كنقطة البداية بواسطة هؤلاء مثل رونكر (\*) الذين يعتبرون الأعداد الطبيعية وكأنها معطاة من الله ومهما كان ، حيث إن فئة الأعداد الطبيعية لها حلقها ودهائها ( مثل خاصية الترتيب الأفضل ) فنشعر بأن العملية الأكثر إقناعاً هي أولاً عملية تركيب الفئة  $N$  من تصورات مبدئية لنظرية الفئة وبعد ذلك ننشئ الفئة  $Z$  للأعداد ثم بعد ذلك نكون الحقل  $Q$  للأعداد القياسية وأخيراً الفئة  $R$  وهذه العملية ليست على الأخص صعبة في اتباعها ويمكن استخدامها ولكنها طويلة نوعاً ما . وحيث إنها مذكورة بالتفصيل في كتاب هاملتون ولاندن فسوف لا نعرض لها هنا .

ومن الملاحظات السابقة يكون من الواضح أن الحقول المرتبة الكاملة يمكن تكوينها بطرق مختلفة . أى إن لا يمكن أن نقول أن هناك حقلاً مرتباً كاملاً وحيداً . بمعنى أن جميع الطرق للتركيب السابق اقتراحها تؤدي إلى حقول مرتبة كاملة وهي حقول « متشاكلة » ( هذا معناه أنه إذا كانت  $R_1$  ،  $R_2$  حقليْن مرتبين كاملين ، حصلنا عليهما بهذه التركيبات فحينئذ يوجد راسم أحادى  $\phi$  للحقل  $R_1$  فوق  $R_2$  بحيث إن  $\phi(i)$  يرسل عنصراً قياسياً في الحقل  $R_1$  إلى العنصر القياسى المناظر في الحقل  $R_2$  ،  $\phi(ii)$  ترسل  $a+b$  إلى  $\phi(a) + \phi(b)$  ،  $\phi(iii)$  ترسل  $ab$  إلى  $\phi(a)\phi(b)$  ،  $\phi(iv)$  ترسل عنصراً موجباً في الحقل  $R_1$  إلى عنصر موجب في الحقل  $R_2$  ) . وفي داخل نظرية الفئات الأصلية يمكننا تقديم تدليل أو برهانا موضحين أنه أى حقليْن مرتبين كاملين يكونان متشاكليْن بالمعنى الذى سبق وصفه . وكون هذا التدليل يمسكن صياغته في نظام معطى المنطق الرياضى يعتمد على قواعد الاستنتاج المستعملة في النظام . وهكذا يكون السؤال عن الحد الذى يمكن اعتباره لنظام العدد من حيث كونه محدوداً وحيداً هو نتيجة منطقية دقيقة . وكيفما كان فإن كون الحل وحيداً ( أو الحاجة إليه ) ليس هاماً لأغراضنا لأننا يمكننا اختيار أى حقل خاص مرتب كامل كنموذج لنا لنظام العدد الحقيقى .

### تمارين :

- ٧ - ( أ ) إذا كانت  $(A, B)$  قاطماً في  $R$  فوضح أن  $\sup A = \inf B$  .
- ٧ - ( ب ) إذا كان القاطمان  $(A, B)$  ،  $(A', B')$  يعينان العددين الحقيقيين  $\xi$  ،  $\xi'$  على الترتيب ، فوضح أن  $\xi' < \xi$  تسمى أن  $A \subseteq A'$  ،  $A \neq A'$  .
- ٧ - ( ج ) هل عكس التمرين السابق يكون صحيحاً ؟ .
- ٧ - ( د ) بفرض  $A = \{x \in R : x \leq 0\}$  أو  $B = \{x \in R : x > 0\}$  ،  $x^2 \leq 2$  فوضح أن  $\{x^2 > 2\}$  قاطع في  $R$  .

( \* ) ليوبولد رونكر ( ١٨٢٣ - ١٨٩١ ) درس مع ديريشلت في برلين وكيومر في مدينة بون وبعد تكوينه ثروة قبل أن يصل للثلاثين رجع للرياضيات . وهو معروف بعمله في الجبر ونظرية العدد ومعارضته الشخصية لأفكار كانتور على نظرية الفئة .

٧ - (أ) بفرض  $I_n = (n, +\infty)$  عند  $n \in \mathbb{N}$  أثبت أن متتابعة الفترات متداخلة لكن لا توجد نقطة مشتركة .

٧ - (و) بفرض  $J_n = (0, 1/n)$  عند  $n \in \mathbb{N}$  . وضح أن هذه المتتابعة للفترات متداخلة لكن لا توجد نقطة مشتركة .

٧ - (ز) إذا كان  $I_n = [a_n, b_n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , متتابعة متداخلة لخلايا مغلقة أثبت أن

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$$

وإذا وضعنا  $\eta = \inf \{b_m : m \in \mathbb{N}\}$  ,  $\xi = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  فاثبت أن  $[\xi, \eta] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$

٧ - (ح) وضح أن كل عدد من فئة كانتور له مفكوك ثلاثي (= قاعدة 3) مستخدماً فقط الرقمين 0, 2 .

٧ - (ط) وضح أن المجموعة لنقط النهاية اليمنى في  $F$  هي عددية تنازلية . وضح أنه إذا حذفنا جميع هذه النقط للنهاية اليمنى من  $F$  فإن ما يتبقى يمكن وضعه في تناظر أحادي مع جميع عناصر الفئة  $[0, 1]$  . ثم استنتج أن  $F$  غير قابلة للعد .

٧ - (ي) كل فترة مفتوحة  $(a, b)$  التي تحتوى نقطة من  $F$  تحتوى أيضاً فئة (ثلث أوسط) بأكمله والتي تنتمى إلى  $\mathcal{C}(F)$  . إذن  $F$  لا تحتوى أى فترة مفتوحة خالية .

٧ - (ك) بإزالة الفئات المتناقصة الطول دائماً يثبت أننا يمكننا من تكوين فئة « كانتور المشابهة » بحيث يكون طولها موجبا . ما هو أكبر طول لهذه الفئة يمكننا الحصول عليه ؟

٧ - (ل) وضح أن  $F$  ليست اتحاد مجموعة قابلة للعد لفترات مغلقة

## توبولوجيا الفراغات الكارتيزية

خصصت أبواب الفصل الأول لتطوير الخواص الجبرية وخواص الترتيب وخاصية الإتمام لنظام الأعداد الحقيقية . واستعمال كبير لهذه الخواص سيستخدم في هذا الفصل والفصول القادمة .

ومع إنه من الممكن حالا مناقشة المتتابعات للأعداد الحقيقية والدوال الحقيقية المستمرة فإننا نفضل تأجيل دراسة هذه الموضوعات لفترة قصيرة . وفي الحقيقة سندخل هنا تعاريف لفراغ المتجه ، فراغ المودى وفراغ حاصل الضرب العدى . ونفعل ذلك لأنه من السهل فهم هذه المدلولات ولأن مثل هذه الفراغات تظهر خلال كل التحليل ( بدون ذكر شيء عن استعمالها في علم الهندسة ( الجيومترية والفيزياء والهندسة والاقتصاديات الخ ) والفراغات الكارتيزية  $R^p$  ستكون من الطبع مشوقة لنا بوجه خاص . ولحسن الحظ نجد أن بصيرتنا للفراغين  $R^2$  ،  $R^3$  تحملنا عادة بدون تغيير كبير للفراغ  $R^p$  وتساعد المعلومات عن هذه الفراغات في تحليل فراغات أكثر عموماً .

### الباب الثامن — متجه وفراغات كارتيزية :

« فراغ المتجه » هو الفئة التي فيها يمكن جمع عنصرين ويمكن ضرب عنصر في عدد حقيق بطريقة تحقق خواص معينة معروفة وسوف تكون أكثر تدقيقاً .

٨ - ١ تعريف . فراغ المتجه هو الفئة  $V$  ( التي عناصرها تسمى متجهات ) المجهزة بعمليتين ثنائيتين تسميان جمع متجه وضرب عددي .

إذا كانت  $x, y \in V$  فيوجد عنصر  $x+y$  في  $V$  يسمى جمع متجه المقدارين  $x$  ،  $y$  . وهذه عملية جمع المتجه تحقق الخواص التالية :

$$(A1) \quad x+y=y+x \quad \text{لكل } x \text{ و } y \text{ في } V .$$

$$(A2) \quad (x+y)+z=x+(y+z) \quad \text{لكل } x \text{ و } y \text{ و } z \text{ في } V .$$

(A<sub>3</sub>) يوجد عنصر 0 في  $V$  بحيث إن  $x+0=x$  ،  $0+x=x$  لكل  $x$  في  $V$  .

(A<sub>4</sub>) بفرض  $x$  في  $V$  فيوجد عنصر  $-x$  في  $V$  بحيث إن  $x+(-x)=0$   $(-x)+x=0$

إذا كانت  $x \in V$  ،  $a \in \mathbb{R}$  فيوجد عنصر  $ax$  في  $V$  تسمى مضاعف  $a$  ،  $x$  . وهذه عملية الضرب الممدى تحقق الخواص الآتية :

$$1x = x \quad \text{لكل } x \in V \quad (M1)$$

$$a(bx) = (ab)x \quad \text{لكل } a, b \in \mathbb{R} , x \in V \quad (M2)$$

$$(a+b)x = ax + bx \quad , \quad a(x+y) = ax + ay \quad (D) \quad \text{لكل } a, b \in \mathbb{R} , x, y \in V$$

الآن سنطلي بعض أمثلة أولية ولكنها هامة للفراغات المتجهة .

٨ - أمثلة . (أ) نظام الأعداد الحقيقية هو فراغ متجه حيث عملية الجمع وعملية الضرب الممدى هما عمليتا الجمع والضرب العادي للأعداد الحقيقية .

(ب) بفرض أن  $\mathbb{R}^2$  تدل على حاصل الضرب الكارتيلى  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  فحينئذ  $\mathbb{R}^2$  تحتوى كل الأزواج المرتبة  $(x_1, x_2)$  للأعداد الحقيقية . وإذا عرفنا جمع المتجه والضرب الممدى بالآتي :

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$$

فحينئذ يمكن أن نتأكد أن الخواص المذكورة في تعريف ٨ - ١ تكون قد تحققت .

هنا  $0 = (0, 0)$  ،  $-(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$  . حينئذ  $\mathbb{R}^2$  هو فراغ متجه تحت هذه العمليات .

(ج) بفرض  $p \in \mathbb{N}$  وبفرض أن  $\mathbb{R}^p$  تدل على المجموعة لكل الترتيبات من العليات «

$$(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

حيث  $x_i \in \mathbb{R}$  عند  $i = 1, \dots, p$  . وإذا عرفنا جمع المتجه والضرب الممدى بالآتي :

$$(x_1, x_2, \dots, x_p) + (y_1, y_2, \dots, y_p) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_p + y_p)$$

$$a(x_1, x_2, \dots, x_p) = (ax_1, ax_2, \dots, ax_p)$$



فحينئذ يمكن أن نتأكد أن  $R^p$  هو فراغ متجه تحت هذه العمليات هنا نرى أن :

$$-(x_1, x_2, \dots, x_p) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_p). \quad 0 = (0, 0, \dots, 0)$$

(د) بفرض  $S$  أى فئة وبفرض  $R^S$  تدل على المجموعة لكل الدوال  $u$  الى نطاقها  $S$  ومداها  $R$  . ( حينئذ  $R^S$  هو مجموع كل الدوال حقيقية القيمة المعرفة في  $S$  ) وإذا عرفنا  $u+v$  ،  $au$  بالتالي :

$$(u+v)(s) = u(s) + v(s)$$

$$(au)(s) = au(s)$$

لكل  $s \in S$  حينئذ يمكن أن نتأكد أن  $R^S$  هو فراغ متجه تحت هذه العمليات .

[ هنا  $0$  هو دالة تطابقيا مساوية للصفر ،  $-u$  دالة قيمتها عند  $s \in S$  هي  $-u(s)$  ]

وفي الأبواب القادمة سنقابل فراغات متجهة كثيرة أخرى .

وعموما سنكتب  $x-y$  بدلا من  $x+(-y)$  .

### حواصل ضرب العددي والاعمدة العددية :

سيلاحظ القارىء أن ضرب العددي في فراغ متجه  $R \times V$  هو دالة نطاقها  $R \times V$  ومداها  $V$  . وفراغات متجهة كثيرة مجهزة أيضاً بدالة نطاقها  $V \times V$  ومدى  $R$  والتي لها أهمية .

٨ - ٣ تعريف . إذا كانت  $V$  فراغ متجه فحينئذ ضرب العددي (أو ضرب نقطة) هو دالة على  $V \times V$  إلى  $R$  ويرمز لها بالرمز  $x \cdot y \mapsto (x, y)$  وتحقق الخواص .

$$(i) \quad x \cdot x \geq 0 \quad \text{لكل } x \in V$$

$$(ii) \quad x \cdot x = 0 \quad \text{إذا وإذا فقط } x = 0$$

$$(iii) \quad x \cdot y = y \cdot x \quad \text{لكل } x, y \in V$$

$$(iv) \quad (x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \quad , \quad x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$$

لكل  $x, y, z \in V$

$$(v) \quad (ax) \cdot y = a(x \cdot y) = x \cdot (ay) \quad \text{لكل } a \in R, x, y \in V$$

يسمى فراغ المتجه الذى قد عرف فيه ضرب العددي بفراغ الضرب العددي .

ومن الممكن تعريف حواصل ضرب عددية مختلفة في فراغ نفس المتجه ( تمرين ٨ - د ) .

٨ - ٤ أمثلة . ( أ ) الضرب العادى فى  $R$  يحقق الخواص السابقة وإذن هى فراغ ضرب عددى .

(ب) فى  $R^2$  ، نعرف .

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

ومن السهل أن نتأكد أن هذا يعرف ضرباً عددياً على  $R^2$  .

(ج) فى  $R^p$  ، نعرف .

$$(x_1, x_2, \dots, x_p) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_p) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_p y_p$$

ومن السهل أن نتأكد أن هذا يعرف ضرباً عددياً على  $R^p$  .

٨ - ٥ تعريف . إذا كانت  $V$  هى فراغ متجه حينئذ الممود على  $V$  هو دالة على  $V$  إلى  $R$  يرمز لها بالرمز  $\|x\|$  وتحقق الخواص .

$$\|x\| \geq 0 \quad \text{لكل } x \in V \quad (i)$$

$$\|x\| = 0 \quad \text{إذا وإذا فقط } x = 0 \quad (ii)$$

$$\|ax\| = |a| \|x\| \quad \text{لكل } a \in R, x \in V \quad (iii)$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{لكل } x, y \in V \quad (vi)$$

يسمى فراغ متجه الذى عرف فيه الممود بفراغ عمود .

كما سنرى فى التمرينات ، يمكن أن يكون لنفس فراغ المتجه أعمدة متقاطعة متعددة .

٨ - ٦ أمثلة . ( أ ) الدالة مطلقة القيمة على  $R$  تحقق الخواص فى ٨ - ٥ .

(ب) فى  $R^2$  ، نعرف

$$\|(x_1, x_2)\| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}.$$

حيث الخواص (i) ، (ii) ، (iii) تتأكد بسهولة جداً وخاصية (iv) تكون معقدة أكثر .

(ج) فى  $R^p$  نعرف

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_p)\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2)^{1/2}.$$

حيث الخواص (i) ، (ii) ، (iii) تكون سهلة الإثبات مرة ثانية .

الآن سنعطى نظرية تؤكد أن حاصل الضرب العادى يمكن دائماً استعماله لتعريف عمود بطريقة طبيعية جداً .

٨ - ٧ نظرية . بفرض  $V$  هو حاصل الضرب المزدوج ويفرض تعريف  $\|x\|$  بالتالي

$$x \in V \text{ حيث } \|x\| = \sqrt{x \cdot x}$$

فإن  $\|x\| \mapsto x$  هو عود على  $V$  ويحقق الخاصية التالية

$$(*) \quad x \cdot y \leq \|x\| \|y\|$$

وبالإضافة إلى ذلك إذا كانت  $x$  ،  $y$  ليس صفر فيكون التساوى في (\*) إذا وإذا فقط كان يوجد عدد ما حقيق موجب مضبوط  $c$  بحيث إن  $x = cy$

البرهان . بما أن  $x \cdot x \geq 0$  لكل  $x \in V$  فحينئذ الجذر التربيعي للمقدار  $x \cdot x$  موجود لذلك تكون  $\|x\|$  قد عرفت جيداً . الخواص الثلاث الأولى للمود نتائج مباشرة من ٨ - ٣ (i) ، (ii) و (v) . لبرهنة (\*) ، نفرض  $a, b \in \mathbb{R}, x, y \in V$  ونفرض  $z = ax - by$  . فإذا استخدمنا خواص ٨ - ٣ (i) ، (iii) ، (iv) ، (v) نحصل على

$$0 \leq z \cdot z = a^2 x \cdot x - 2ab x \cdot y + b^2 y \cdot y$$

الآن نأخذ  $a = \|y\|$  ،  $b = \|x\|$  فإننا نحصل على .

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|y\|^2 \|x\|^2 - 2 \|y\| \|x\| x \cdot y + \|x\|^2 \|y\|^2 \\ &= 2 \|x\| \|y\| (\|x\| \|y\| - x \cdot y) \end{aligned}$$

إذن المتباينة (\*) تظل قائمة .

وإذا كانت  $x = cy$  مع  $c > 0$  فإن  $\|x\| = c \|y\|$  وكذلك

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (cy) \cdot y = c(y \cdot y) = c \|y\|^2 \\ &= \|x\| \|y\| \end{aligned}$$

إذن التساوى في (\*) موجود وبالعكس إذا كانت  $\|x\| \|y\| = x \cdot y$  فإن الحساب في البند السابق يوضح أن  $z = \|y\| x - \|x\| y$  لها الخاصية التي تقول إن  $z \cdot z = 0$  . لذلك  $z = 0$  وبما أن  $x$  ،  $y$  متجهان غير صفريين فيمكننا أخذ  $c = \|x\|/\|y\|$  ولإثبات ٨ - ٥ (iv) نستعمل (\*) لنوضح أن

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y) \cdot (x + y) \\ &= x \cdot x + x \cdot y + y \cdot x + y \cdot y \\ &= \|x\|^2 + 2(x \cdot y) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

ومن ذلك ينتج أن  $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$  لكل  $x, y \in V$  وهو المطلوب إثباته  
سنترك برهان النتيجة الآتية كتمرين .

٨ - ٨ نتيجة . إذا كانت  $x, y$  عنصرين من  $V$  ، فإن

$$(**) \quad |x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$$

وبالإضافة إلى ذلك إذا كانت  $y \neq 0$  فإن التساوي يمكن أن يكون موجبا في  $(*)$  .  
إذا وإذا فقط كان يوجد عدد حقيقى  $c$  بحيث إن  $x = cy$  .

كل من المتباينة  $(*)$  والمتباينة  $(**)$  تسمى متباينة (شفارتز) أو متباينة (كوشى -  
بينيا كوفسكى - شفارتز)  $(**)$  وهى كثيرة الاستعمال والمتباينة ٨-٥ (iv) تسمى متباينة  
المثلث وستترك للقارئ إثبات أن

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

لأى  $x, y$  فى فراغ عمود .

## الفراغ الكارتيذى $R^n$ :

نقصد بالفراغ الكارتيذى الحقيقى فى  $R^n$  من الأبعاد  $n$  المجهزة بجمع المتجه وبضرب  
عددى المعرفين فى مثال ٨ - ٢ (ج) وبمحاصل الضرب العدى المعرف فى مثال ٨ - ٤ (ج) .  
وكما رأينا هذا الضرب العدى ينتج العمود

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

$(**)$  أوجستن - لويس كوشى (١٧٨٩ - ١٨٥٧) هو منشئ التحليل الحديث ولكنه  
قدم أيضاً تطويراً عميقاً فى قطاعات الرياضيات المختلفة وعمل كهندس عند نابليون ولحق  
بشارلس العاشر فى منفاه الجبرى واستبعد من وظيفته فى كلية فرنسا خلال سنى الحكم الملكى  
لأنه لم يؤد قسم ولاء للحاكم . وبالرغم من نشاطه الدينى والسياسى فقد وجد وقتاً لكتابة ٧٨٩  
بحثاً فى الرياضيات .

فكتور بينيا كوفسكى (١٨٠٤ - ١٨٨٩) كان أستاذاً فى (بيترزبورج) أعطى تعميماً  
لمتباينة كوشى للتكاملات فى عام ١٨٥٩ . ولم يهتم كتاب الغرب لمساهماته فى الرياضيات . وقد  
اكتشفها شفارتز مستقلة فيما بعد .

هيرمان أماندوس شفارتز (١٨٤٣ - ١٩٢١) كان طالباً وخلفاً لثيرشترامن فى برلين  
وله إسهامات كثيرة وخاصة فى تحليل العدد المركب .

الأعداد الحقيقية  $x_1, x_2, \dots, x_p$  تسمى بالأحداثيات الأولى ، والثاني ، ... ، الأحداثيات  
التي ترتبها  $P$  (أو المركبات) للمتجه  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$

وفي  $R^n$  ، العدد الحقيقي  $\|x\|$  يمكن أن تعتبر إما طولاً للمقدار  $x$  أو المسافة من  $x$   
إلى الصفر . وأكثر عموماً نعتبر  $\|x-y\|$  كسافة من  $x$  إلى  $y$  . وبهذا التفسير تؤكد  
خاصية ٨-١ (ii) أن المسافة من  $x$  إلى  $y$  هي صفر إذا وإذا فقط  $x=y$  وتؤكد خاصية  
٨-١ (iii) حيث  $a = -1$  أن  $\|x-y\| = \|y-x\|$  والتي تعني أن المسافة من  $x$   
إلى  $y$  تساوي المسافة من  $y$  إلى  $x$  . ومتباينة المثلث تعني أن

$$\|x-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|$$

التي معناها أن المسافة من  $x$  إلى  $y$  ليست أكبر من مجموع المسافة من  $x$  إلى  $z$  والمسافة من  
 $z$  إلى  $y$  .

٨-٩ تعريف . بفرض  $x \in R^n$  وبفرض  $r > 0$  فإن الفئة  $\{y \in R^n : \|x-y\| < r\}$   
تسمى الكرة المفتوحة التي مركزها  $x$  ونصف قطرها  $r$  . الفئة  $\{y \in R^n : \|x-y\| \leq r\}$   
تسمى الكرة المغلقة التي مركزها  $x$  ونصف قطرها  $r$  . الفئة  $\{y \in R^n : \|x-y\| = r\}$   
تسمى الكرة التي مركزها  $x$  ونصف قطرها  $r$  .

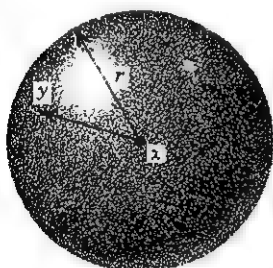
مفهوم الكرة أو تصورها يعتمد على العمود . وسيرى في التمرينات أن بعض الكور  
ليست مستديرة بالكامل .

ومن المناسب غالباً أن تكون لدينا علاقات بين العمود للمتجه في  $R^n$  ومقدار مركباته .

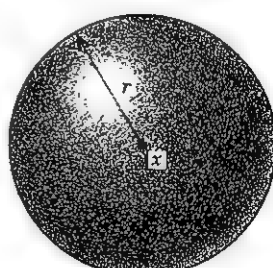
٨-١٠ نظرية . إذا كانت  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  أي عنصر من  $R^p$  فإن

$$|x_i| \leq \|x\| \leq \sqrt{p} \sup \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_p|\}$$

البرهان . بما أن  $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2$  فن الواضح أن  $|x_i| \leq \|x\|$



كرة مغلقة مركزها  $x$



كرة مفتوحة مركزها  $x$

(شكل ٨-١)

لكل  $i$  ، وبالمثل إذا كانت  $M = \sup \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_p|\}$  فإن  $\|x\|^2 \leq pM^2$  واذن  $\|x\| \leq \sqrt{p} M$  . وهو المطلوب إثباته .

المتباينة السابقة تؤكد في صورة كمية أنه إذا كان العمود المقدار  $x$  صغيراً فإن أطوال مركباته تكون صغيرة وبالعكس .

### تعريفات :

٨ - (أ) إذا كانت  $V$  هو فراغ متجه وإذا كانت  $x + z = x$  لبعض  $z \in V$  ، فيبين أن  $z = 0$  . حيث  $0$  يكون عنصر الصفر في  $V$  يكون وحيداً .

٨ - (ب) إذا كانت  $x + y = 0$  لبعض  $x, y \in V$  فيبين أن  $y = -x$  .

٨ - (ج) بفرض  $S = \{1, 2, \dots, p\}$  لبعض  $p \in \mathbb{N}$  فوضح أن فراغ المتجه  $\mathbb{R}^S$  يكون ضرورياً مثل فراغ  $\mathbb{R}^p$  .

٨ - (د) إذا كانت  $w_1, w_2$  موجبين مضبوطين . فاثبت أن التعريف يؤدي إلى حاصل

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 w_1 + x_2 y_2 w_2$$

الضرب الممدى على  $\mathbb{R}^2$  . اذكر الحالة العامة على  $\mathbb{R}^p$  .

٨ - (هـ) التعريف .

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1$$

ليس حاصل ضرب عددي على  $\mathbb{R}^2$  . لماذا ؟

٨ - (و) إذا كانت  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$  تعرف  $\|x\|_1$  بالمقدار

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_p|$$

أثبت أن  $\|x\|_1 \mapsto x$  عمود على  $\mathbb{R}^p$  .

٨ - (ز) إذا كانت  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$  تعرف  $\|x\|_\infty$  بالمقدار

$$\|x\|_\infty = \sup \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_p|\}$$

أثبت أن  $\|x\|_\infty \mapsto x$  عمود على  $\mathbb{R}^p$  .

٨ - (ح) في الفئة  $\mathbb{R}^2$  ، صف الفئات .

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_1 < 1\}, \quad S_\infty = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty < 1\}$$

٨ - (ط) إذا كانت  $x, y \in \mathbb{R}^p$  العمود المعرف في ٨ - ٤ (ج) تحقق خاصية

متوازي الأضلاع

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

فأثبت هذا ووضح انه يمكن تفسيرها بقولنا أن مجموع مربعات الأطوال الأربعة لأضلاع متوازي الأضلاع تساوى مجموع مربعي القطرين .

٨ - (ى) أثبت أن العمود المعرف في تمرين ٨ - ف ، والعمود المعرف ٨ - ز لا يحققان خاصية متوازي الأضلاع .

٨ - (ك) وضح أنه يوجد ثابتان موجبان  $a, b$  بحيث أن

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad a \|x\|_1 \leq \|x\| \leq b \|x\|_1$$

أوجد أكبر ثابت  $a$  وأصغر ثابت  $b$  في هذه الخاصية

٨ - (ل) وضح أنه يوجد ثابتان موجبان  $a, b$  بحيث أن

$$\forall x \in \mathbb{R}^p \quad a \|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq b \|x\|_1$$

أوجد أكبر ثابت  $a$  وأصغر ثابت  $b$  يحققان هذه الخاصية

٨ - (م) إذا كانت  $x, y$  تنتمى إلى  $\mathbb{R}^p$  ، هل صحيح أن

$$|x \cdot y| \leq \|x\|_\infty \|y\|_\infty \quad |x \cdot y| \leq \|x\|_1 \|y\|_1$$

٨ - (ن) إذا كانت  $x, y$  تنتمى إلى  $\mathbb{R}^p$  ، حينئذ هل صحيح أن العلاقة

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$$

تكون صحيحة إذا وإذا فقط كان  $x = cy$  أو  $y = cx$  حيث  $c \geq 0$  ؟

٨ - (س) بفرض  $x, y$  تنتمى إلى  $\mathbb{R}^p$  ، حينئذ هل صحيح أن العلاقة

$$\|x + y\|_\infty = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

تظل قائمة إذا وإذا فقط كانت  $x = cy$  أو  $y = cx$  حيث  $c \geq 0$  ؟

٨ - (ع) إذا كانت  $x, y$  تنتمى إلى  $\mathbb{R}^p$  ، حينئذ

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

تكون صحيحة إذا وإذا فقط كانت  $x \cdot y = 0$  وفي هذه الحالة يقال إن  $x, y$  عموديان أو متعامدان .

٨ - (ف) فئة جزئية  $K$  من  $\mathbb{R}^p$  يقال إنها محدبة إذا كانت لكل  $x, y$  تنتمى إلى  $K$

فإنه يوجد عدد حقيقي  $t$  بحيث إن  $0 \leq t \leq 1$  فإن النقطة

$$(1-t)x + ty = x + t(y-x)$$

تنتمى أيضاً إلى  $K$  . فسر هذا الشرط هندسيا ووضح أن الفئات الجزئية

$$K_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\},$$

$$K_2 = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \xi < \eta\},$$

$$K_3 = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \eta \leq \xi \leq 1\}$$

تكون محدبة لكن الفئة الجبرية

$$K_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$$

ليست محدبة .

٨ - (ص) تقاطع أى مجموعة لفئات جزئية محدبة للفراغ  $\mathbb{R}^n$  تكون محدبة . والاتحاد فئتين جزئيتين محدبتين للمقدار  $\mathbb{R}^n$  ربما لا تكون محدبة .

٨ - (ق) إذا كانت  $M$  أى فئة فحينئذ الدالة  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  تسمى مترية على  $M$  إذا كانت تحقق

$$(i) \quad d(x, y) \geq 0 \quad \text{لكل } x \text{ و } y \text{ فى } M$$

$$(ii) \quad d(x, y) = 0 \quad \text{إذا وإذا فقط } x = y$$

$$(iii) \quad d(x, y) = d(y, x) \quad \text{لكل } x \text{ و } y \text{ فى } M$$

$$(iv) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \text{لكل } x \text{ و } y \text{ و } z \text{ فى } M .$$

وضح أنه إذا كانت  $x \mapsto \|x\|$  أى عمود على فراغ المتجه  $V$  وإذا عرفنا  $d$  بأنه

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad \text{حيث } x, y \in V$$

فإن  $d$  تكون مترية على  $V$  .

٨ - (ر) يفرض أن  $d$  مترية على الفئة  $M$  فباستخدام تعريف ٩ - ٨ كنموذج ، عرف الكرة المفتوحة التى مركزها  $x \in M$  ونصف قطرها  $r$  . فسر الفئتين  $S_1$  ،  $S_\infty$  فى تمرين (٨ - ح) كمكثرتين مفتوحتين فى  $\mathbb{R}^2$  بالنسبة إلى مترين مختلفين . فسر (تمرين ٨ - ك) كقولنا إن الكرة التى مركزها 0 بالنسبة إلى مترى  $d_2$  (مستنتج من العمود فى ٨ - ٦) (ب) يحتوى ومحتوى فى كود مركزها 0 بالنسبة إلى المترى  $d_1$  المستنتج من  $\| \cdot \|_1$  ، اعمل نفس التفسير على تمرين (٨ - ل) . ونظرية ٨ - ١٠ .

٨ - (ش) بفرض  $M$  أى فئة ونفرض أن  $d$  معرفة على  $M \times M$  بمتطلبات أن

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{إذا } x = y, \\ 1 & \text{إذا } x \neq y. \end{cases}$$

وضع أن  $d$  مترية على  $M$  بالمعنى المعروف فى (تمرين ٨ - ق) . إذا كانت  $x$  أى نقطة فى  $M$  فحينئذ تكون الكرة المفتوحة بمركز  $x$  ونصف قطر واحد ( بالنسبة إلى المترية  $d$  ) محتوية بالضبط على نقطة واحدة . كيفما تكون الكرة المفتوحة التى مركزها  $x$  ونصف قطرها 2 ( بالنسبة إلى  $d$  ) محتوية على كل  $M$  . هذه المترية  $d$  أحياناً تسمى المترية المنفصلة على الفئة  $M$  .



## مشروعات :

٨ -  $a$  في هذه الخطوة سنظهر متباينات هامة .

(أ) بفرض أن  $a$  ،  $b$  عدنان حقيقيان موجبان . أثبت أن

$$ab \leq (a^2 + b^2)/2$$

وأن التساوى يكون إذا وإذا فقط كان  $a = b$  . [ إرشاد : اعتبر  $(a - b)^2$  ]

(ب) بفرض  $a_1$  ،  $a_2$  عدنان حقيقيان موجبان . أثبت أن

$$\sqrt{a_1 a_2} \leq (a_1 + a_2)/2$$

وأن التساوى يتحقق إذا وإذا فقط كان  $a_1 = a_2$  .

(ج) بفرض  $a_1, a_2, \dots, a_m$  حيث  $m = 2^n$  أعداداً حقيقية موجبة . فبين أن

$$(*) \quad (a_1 a_2 \cdots a_m)^{1/m} \leq (a_1 + a_2 + \cdots + a_m)/m$$

وأن التساوى يتحقق إذا وإذا فقط كان  $a_1 = \cdots = a_m$

(د) وضع أن المتباينة (\*) بين المتوسط الهندسى والمتوسط الحسابى تكون صحيحة حتى

عندما  $m$  لاتساوى قوة للمقدار 2 (إرشاد : إذا كانت  $2^{n-1} < m < 2^n$  نفرض

$b_j = a_j$  حيث  $j = 1, \dots, m$  ونفرض

$$b_j = (a_1 + a_2 + \cdots + a_m)/m$$

حيث  $j = m+1, \dots, 2^n$  . الآن استخدام جزء (ج) للأعداد  $b_1, b_2, \dots, b_{2^n}$

(هـ) بفرض  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ،  $b_1, b_2, \dots, b_n$  فبين لأعداد حقيقية . أثبت متطابقة

لإجرائي (\*)

$$\left\{ \sum_{j=1}^n a_j b_j \right\}^2 = \left\{ \sum_{j=1}^n a_j^2 \right\} \left\{ \sum_{j=1}^n b_j^2 \right\} - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n (a_j b_k - a_k b_j)^2$$

(إرشاد : ابدأ بتجربة الحالتين  $n = 2$  ،  $n = 3$  ) .

(و) استخدم جزء (هـ) لتركيب متباينة كوشى

$$\left\{ \sum_{j=1}^n a_j b_j \right\}^2 \leq \left\{ \sum_{j=1}^n a_j^2 \right\} \left\{ \sum_{j=1}^n b_j^2 \right\}$$

(\*) جوزيف - لويس لاجرانج (١٧٣٦ - ١٨١٣) ولد في (تورين) حيث أصبح

أستاذاً وعمره تسع عشرة سنة وذهب بعد ذلك إلى برلين لمدة عشرين عاماً كخلف لأيلر وبعد ذلك إلى باريس ، وهو معروف بعمله في تفاضل وتكامل المتغيرات وأيضاً الميكانيكا التحليلية .

وضح أن التساوى يكون صحيحاً إذا وإذا فقط كانت الفئتان المرتبتان  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  ،  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  متناسبتين .

( ز ) استخدم جزء (ف) لتركيب متباينة المثلث

$$\left\{ \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \right\}^{1/2} \leq \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^2 \right\}^{1/2} + \left\{ \sum_{i=1}^n b_i^2 \right\}^{1/2}$$

٨ .  $\beta$  هذا المشروع أقرض أن  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  وما إلى آخره فئات أعداد حقيقية موجبة عددها  $n$  .

( أ ) من الممكن البرهنة ( مثال ذلك باستخدام نظرية القيمة المتوسطة ) على أنه إذا كانت  $a, b$  موجبين وأيضاً  $0 < \alpha < 1$  فإن

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b$$

وأن التساوى يكون صحيحاً إذا وإذا فقط كان  $a = b$  . بفرض هذا ، وبفرض  $r > 1$  وأن  $s$  تحقق

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$$

( أى إن  $s > 1$  ،  $r + s = rs$  ) أثبت أنه إذا كانت  $A$  و  $B$  موجبين فإن

$$AB \leq \frac{A^r}{r} + \frac{B^s}{s}$$

وأثبت أيضاً أن المطابقة تكون صحيحة إذا وإذا فقط كان  $A^r = B^s$

(ب) بفرض  $\{a_1, \dots, a_n\}$  ،  $\{b_1, \dots, b_n\}$  أعداداً حقيقية موجبة وبفرض  $(1/r) + (1/s) = 1$  ،  $r, s > 1$  أثبت متباينة هولدر (\*)

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^r \right\}^{1/r} \left\{ \sum_{i=1}^n b_i^s \right\}^{1/s}$$

( ارشاد : إقرض أن  $A = \{\sum a_i^r\}^{1/r}$  ،  $B = \{\sum b_i^s\}^{1/s}$  واستخدم جزء ( أ ) على  $a_i/A$  ،  $b_i/B$  )

(ج) باستخدام متباينة هولدر كون متباينة مينكوسكى (\*\*)

(\*) أتوهولدر ( ١٨٥٩ - ١٩٣٧ ) درس في جيتنجن وتعلم في ليزج وعمل بكلا الجبر والتحليل .

(\*\*) هيرمان مينوسكى ( ١٨٦٤ - ١٩٠٩ ) كان أستاذاً في كنجزبرج و جيتنجن ومن أحسن أعماله الفئات المحدبة وهنسة الأعداد .

$$\left\{ \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^r \right\}^{1/r} \leq \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^r \right\}^{1/r} + \left\{ \sum_{i=1}^n b_i^r \right\}^{1/r}$$

إرشاد :  $(a+b)^r = (a+b)(a+b)^{r-1} = a(a+b)^{r-1} + b(a+b)^{r-1}$

(د) باستخدام متباينة هولدر ، أثبت أن

$$(1/n) \sum_{i=1}^n a_i \leq \left\{ (1/n) \sum_{i=1}^n a_i^r \right\}^{1/r}$$

(هـ) إذا كانت  $a_1 \leq a_2$  ،  $b_1 \leq b_2$  فإن  $(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \geq 0$  ومن ثم

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \geq a_1 b_2 + a_2 b_1$$

أثبت أنه إذا كانت  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  ،  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$  فإن

$$n \sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \right\} \left\{ \sum_{i=1}^n b_i \right\}$$

(و) بفرض أن

$$0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \quad \text{و} \quad r \geq 1 \quad \text{و} \quad 0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$$

$r \geq 1$  كون متباينة شيبشيف (\*)

$$\left\{ (1/n) \sum_{i=1}^n a_i^r \right\}^{1/r} \left\{ (1/n) \sum_{i=1}^n b_i^r \right\}^{1/r} \leq \left\{ (1/n) \sum_{i=1}^n (a_i b_i)^r \right\}^{1/r}$$

أثبت أن هذه المتباينة تعكس إذا كانت  $\{a_i\}$  متزايدة ،  $\{b_i\}$  متناقصة .

## الباب التاسع - الفئات المغلقة والمفتوحة :

كثير من الخواص العميقة للتحليل الحقيقي تعتمد على مدلولات توبولوجية معينة . وفي الأبواب القليلة القادمة سنقدم التصورات الأساسية ونستنتج منها بعضاً من أهم الخواص التوبولوجية الهامة للفراغ  $R^n$  . وهذه النتائج ستشتمل بكثرة في الفصول القادمة .

٩ - ١ تعريف . الفئة  $G$  في  $R^n$  يقال إنها مفتوحة في  $R^n$  ( أو مجرد مفتوحة ) إذا كان ، لكل نقطة  $x$  في  $G$  يوجد عدد حقيقي  $r > 0$  بحيث إن كل نقطة  $y$  في  $R^n$  وتحقق  $\|x - y\| < r$  تنتمي أيضاً إلى الفئة  $G$  ( انظر شكل ٩ - ١ ) .

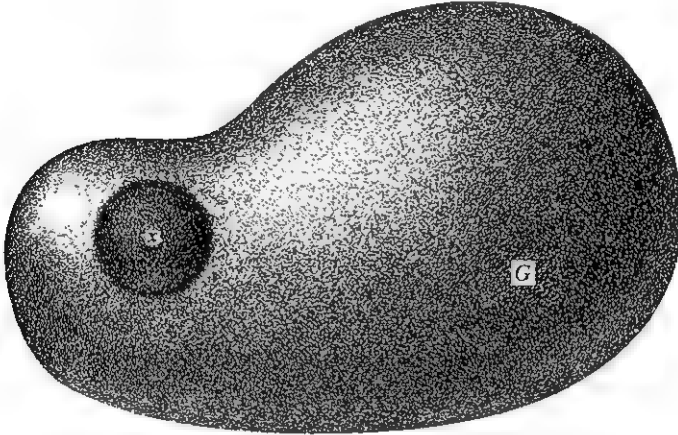
باستخدام تعريف ٩ - ٨ يمكننا إعادة صياغة هذا التعريف بقولنا إن الفئة  $G$

(\*) بانفوق شيبشيف ( ١٨٢١ - ١٨٩٤ ) كان أستاذاً في بيتربرج وسام كبيراً في الرياضيات ولكن أهم عمل له كان في نظرية العدد ، الاحتمالات ونظرية التقريب .

نكون مفتوحة إذا كانت كل نقطة في  $G$  هي مركز لكرة ما مفتوحة تكون بأكملها محتوية في  $G$  .

٩-٧ أمثلة . (أ) الفئة الشاملة  $R^p$  تكون مفتوحة لأنه يمكننا أخذ  $r = 1$  لأي  $x$ .

(ب) الفئة  $G = \{x \in R : 0 < x < 1\}$  تكون مفتوحة في  $R = R^1$  . الفئة  $F = \{x \in R : 0 \leq x \leq 1\}$  ليست مفتوحة في  $R$  . (لماذا ؟)



(شكل ٩-١) فئة مفتوحة

(ج) الفئات:  $H = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$  ،  $G = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1\}$  مفتوحة لكن الفئة  $F = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$  ليست مفتوحة في  $R^2$  (لماذا ؟) .

(د) الفئة  $G = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < 1, y = 0\}$  ليست مفتوحة في  $R^2$  (قارن هذا مع (ب) .) . الفئة  $H = \{(x, y) \in R^2 : 0 < y < 1\}$  مفتوحة لكن الفئة  $K = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq y < 1\}$  ليست مفتوحة في  $R^2$  .

(هـ) الفئة  $G = \{(x, y, z) \in R^3 : z > 0\}$  مفتوحة في  $R^3$  مثل الفئة  $H = \{(x, y, z) \in R^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}$  ومن ناحية أخرى الفئة  $F = \{(x, y, z) \in R^3 : x = y = z\}$  ليست مفتوحة .

(و) الفئة الخالية  $\emptyset$  مفتوحة في  $R^p$  لأنها لا تحتوي نقطة بالمرّة ولذلك تتحقق المتطلبات في تعريف ٩-١ ببساطة .

(ز) إذا كانت  $B$  كرة مفتوحة مركزها  $z$  ونصف قطرها  $a > 0$  وإذا كانت  $x \in B$  حينئذ الكرة التي مركزها  $x$  ونصف قطرها  $a - \|z - x\|$  تكون محتوية في  $B$  . أي أن  $B$  تكون مفتوحة في  $R^p$  .

الآن سنقرر الخواص الأساسية للفئات المفتوحة في  $R^p$  ، وفي مناهج التوبولوجي تتلخص هذه النتيجة القادمة بقولنا أن الفئات المفتوحة كما عرفت في تعريف ٩ - ١ تكون توبولوجيا لأجل  $R^p$  .

٩ - ٣ خواص الفئة المفتوحة . (أ) كل من الفئة الخالية  $\emptyset$  والفراغ الشامل  $R^p$  تكون مفتوحة في  $R^p$  .

(ب) تقاطع أى فئتين مفتوحتين هو فئة مفتوحة في  $R^p$  .

(ج) اتحاد أى مجموعة من الفئات المفتوحة هو فئة مفتوحة في  $R^p$  .

البرهان . قد علقنا من قبل على الصفة المفتوحة للفئات  $\emptyset$  ،  $R^p$  لإثبات (ب) نفرض أن  $G_1$  و  $G_2$  مفتوحتان ونفرض أن  $G_3 = G_1 \cap G_2$  ولنوضح أن  $G_3$  مفتوحة نفرض أن  $x \in G_1$  . بما أن  $x$  تنتمي إلى الفئة المفتوحة  $G_1$  فيوجد  $r_1 > 0$  بحيث إنه إذا كانت  $\|x - z\| < r_1$  فإن  $z \in G_1$  بالمثل يوجد  $r_2 < 0$  بحيث إنه إذا كانت  $\|x - w\| < r_2$  فإن  $w \in G_2$  . باختيار  $r_3$  بحيث تكون أقل من  $r_1$  ،  $r_2$  . نستنتج أنه إذا كان  $y \in R^p$  بحيث إن  $\|x - y\| < r_3$  حيث  $y$  تنتمي إلى كلا من  $G_1$  ،  $G_2$  ، إذن هذه العناصر مثل  $y$  تنتمي إلى  $G_3 = G_1 \cap G_2$  مما يثبت أن  $G_3$  مفتوحة في  $R^p$  .

لبرهنة (ج) نفرض أن  $\{G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \dots\}$  هي مجموعة من فئات مفتوحة ونفرض أن  $G$  هو اتحادها . ولتوضح أن  $G$  مفتوحة نفرض  $x \in G$  . ومن تعريف الاتحاد يترتب على ذلك أنه لفئة ما ولتكن  $G_{\alpha_k}$  مثلاً يوجد لدينا  $x \in G_{\alpha_k}$  . وحيث أن  $G_{\alpha_k}$  مفتوحة فيوجد كرة مركزها  $x$  وتقع بأكملها في  $G$  . وبما أن  $G_{\alpha_k} \subseteq G$  تكون هذه الكرة محتوية بأكملها في  $G$  مما يثبت أن  $G$  مفتوحة في  $R^p$  . وهو المطلوب إثباته

بالاستنتاج ينتج من خاصية (ب) المذكورة في أعلى أن تقاطع أى مجموعة محدودة من الفئات المفتوحة هي أيضاً فئة مفتوحة في  $R^p$  . ويمكن ملاحظة أن هذا التقاطع لمجموعة غير محددة لفئات مفتوحة ربما لا تكون فئة مفتوحة .

من المثال :

$$(9.1) \quad G_n = \left\{ x \in R : -\frac{1}{n} < x < 1 + \frac{1}{n} \right\}, \quad n \in N$$

نجد أن تقاطع الفئات  $G_n$  هو الفئة  $F = \{x \in R : 0 \leq x \leq 1\}$  وهي ليست مفتوحة .

### الفئات المغلقة :

الآن سنقدم تصوراً هاماً لفئة المغلقة في  $R^p$  .

٩-٤ : تعريف . الفئة  $F$  في  $R^p$  يقال إنها مغلقة في  $R^p$  ( أو مجرد مغلقة ) في حالة كون قيمتها  $\mathcal{C}(F) = R^p \setminus F$  مفتوحة في  $R^p$  .

٩-٥ أمثلة . ( أ ) الفئة الشاملة  $R^p$  مغلقة في  $R^p$  حيث متممها هي الفئة الخالية وهي فئة مفتوحة في  $R^p$  كما رأيناها في ٩-٢ ( و ) .

( ب ) الفئة الخالية  $\emptyset$  مغلقة في  $R^p$  حيث قيمتها في  $R^p$  هو كل  $R^p$  وهي فئة مفتوحة في  $R^p$  كما بينا في ٩-٢ ( أ ) .

( ج ) الفئة  $F = \{x \in R : 0 \leq x \leq 1\}$  مغلقة في  $R$  . وإحدى الطرق لرؤية ذلك هو أن متصلة  $F$  في  $R$  هو اتحاد الفئتين  $\{x \in R : x > 1\}$  ,  $\{x \in R : x < 0\}$  , والتي كل منهما مفتوحة . بالمثل الفئة  $\{x \in R : 0 \leq x\}$  مغلقة .

( د ) الفئة  $F = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$  مغلقة لأن متممها في  $R^2$  هي الفئة

$$\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 > 1\}$$

وهي فئة مفتوحة .

( هـ ) الفئة  $H = \{(x, y, z) \in R^3 : x \geq 0\}$  مغلقة في  $R^3$  ، وأيضاً الفئة

$$F = \{(x, y, z) \in R^3 : x = y = z\}$$

( و ) الكرة المغلقة  $B$  التي مركزها  $x$  في  $R^p$  ونصف قطرها  $r > 0$  فئة مغلقة للفراغ  $R^p$  . لأنه إذا كانت  $z \notin B$  فإن الكرة المفتوحة التي مركزها  $z$  ونصف قطرها  $r$  تكون محتوية في  $\mathcal{C}(B)$  ولذلك تكون  $\mathcal{C}(B)$  مفتوحة ،  $B$  مغلقة في  $R^p$  .

وبالحديث العادي عند الاستعمال على الأبواب والنوافذ والمقولات والكلمات مفتوح ومغلق يكون معناها عكس ماسبق . كيفما كان فعند استعمالها للفئات الجزئية من  $R^p$  فمعنى هذه الكلمة ليس العكس . فثلاً لاحظنا أعلاه أن الفئتين  $R^p$  و  $\emptyset$  مفتوحتان أو مغلفتان في  $R^p$  ( من المحتمل أن يشعر القارئ بالراحة ليعرف أنه لا يوجد فئات جزئية أخرى للمقدار  $R^p$  التي لها كلا الخاصيتين السابقتين ) . وبالإضافة إلى ذلك فإنه يوجد فئات جزئية كثيرة للمقدار  $R^p$  والتي ليست مفتوحة وليست مغلقة . وفي الحقيقة معظم الفئات الجزئية للفراغ  $R^p$  لها صفة التعادل . وكثال بسيط سنقتبس الفئة

$$(9.2) \quad A = \{x \in R : 0 \leq x < 1\}$$

هذه الفئة  $A$  تقبل في أن تكون مفتوحة في  $R$  حيث إنها تحتوي على النقطة 0 وبالمثل تفشل في أن تكون مغلقة في  $R$  لأن متممها في  $R$  هي الفئة  $\{x \in R : x < 0 \text{ or } x \geq 1\}$  والتي ليست مفتوحة لأنها تحتوي النقطة 1 . والقارئ يجب أن يركب أمثلة أخرى من الفئات بحيث تكون ليست مفتوحة وليست مغلقة في  $R^p$  .

الآن سنقرر الخواص الأساسية للفئات المغلقة وبرهان هذه النتيجة تنتج مباشرة من نظرية ٩-٣ باستخدام قوانين دى مرجان (نظرية ١-٨ وتمرين ١-ك) .

٩-٦ خواص الفئات المغلقة . (أ) كل من الفئة الخالية  $\emptyset$  والفراغ الشامل  $R^n$  منغلقة في  $R^n$  .

(ب) اتحاد أى فئتين منغلقتين فئة منغلقة في  $R^n$  .

(ج) تقاطع أى مجموعة من فئات منغلقة هو فئة منغلقة في  $R^n$  .

### متاخمات ( الجيرة أو الجوار ) :

سنقدم الآن بعضاً من المدلولات التوبولوجية الإضافية والتي ستكون مفيدة وتسمح لنا بوصف الفئات المفتوحة والفئات المغلقة بواسطة مدلولات أخرى .

٩-٧ تعريف . (أ) إذا كانت  $x \in R^n$  فإن فئة تحتوى على فئة مفتوحة تحوى  $x$  تسمى متاخمة أو جوار للعنصر .

(ب) نقطة  $x \in R^n$  تسمى نقطة داخلية لفئة  $A \subseteq R^n$  في حالة وجود جوار للعنصر  $x$  والتي تكون محتوية كلية في  $A$  .

(ج) نقطة  $x \in R^n$  تسمى نقطة حدودية لفئة  $A \subseteq R^n$  في حالة كون كل جوار أو جيرة للعنصر  $x$  تحتوى نقطة في  $A$  ونقطة في  $\mathcal{C}(A)$  .

(د) نقطة  $x \in R^n$  تسمى بنقطة خارجية لفئة  $A \subseteq R^n$  في حالة وجود جوار للمقدار  $x$  الذى يكون بأكمله محتوياً في  $\mathcal{C}(A)$  .

ومن الملاحظ أنه إذا كان  $x \in R^n$  ،  $A \subseteq R^n$  فإنه يوجد ثلاث إمكانيات منفردة متبادلة (i) نقطة داخلية للفئة  $A$  ، (ii) نقطة حدودية للفئة  $A$  ، أو (iii) نقطة خارجية للفئة  $A$  .

٩-٨ أمثلة . (أ) فئة  $U$  تكون جيرة لنقطة  $x$  إذا وإذا فقط كان يوجد كرة مركزها  $x$  محتوية بأكملها في  $U$  .

(ب) نقطة  $x$  تكون نقطة داخلية للفئة  $A$  إذا وإذا فقط كان يوجد كرة مركزها  $x$  محتوية بأكملها في  $A$  .

(ج) نقطة  $x$  تكون نقطة حدودية للفئة  $A$  إذا وإذا فقط كان يوجد لكل عدد طبيعى

$n$  نقط  $a_n \in A$  ،  $b_n \in \mathcal{C}(A)$  بحيث إن :

$$\|x - b_n\| < 1/n \quad \|x - a_n\| < 1/n$$

(د) كل نقطة في الفترة  $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$  هي نقطة داخلية ، النقطتان 0 ، 1 هما نقطتان حدوديتان للفترة  $(0, 1)$  .

(هـ) بفرض  $A \subseteq [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  حيث النقطة الداخلية للفترة  $A$  هي النقطة في الفترة المفتوحة  $(0, 1)$  ، النقطتان 0 ، 1 هما النقطتان الحدوديتان للفترة  $A$  .

(و) النقطة الحدودية للفترة المفتوحة والمغلقة التي مركزها  $x \in \mathbb{R}^p$  ونصف قطرها  $r > 0$  هي النقطة في الكرة التي مركزها  $x$  ونصف قطرها  $r$  . (انظر تعريف ٨ - ٩) الآن سنبين الفئات المفتوحة بدلالة متاخات ونقط داخلية .

٩ - ٩ نظرية . إذا كانت  $B \subseteq \mathbb{R}^p$  فإن النصوص الآتية تكون متكافئة :  
(أ)  $B$  تكون مفتوحة .

(ب) كل نقطة من  $B$  تكون نقطة داخلية من  $B$  .

(ج)  $B$  تكون جيرة لكل من نقطها .

البرهان . إذا كانت (أ) صحيحة وكانت  $x \in B$  ، فحيث تكون الفئة المفتوحة  $B$  جيرة للعنصر  $x$  ولذلك تكون  $x$  نقطة داخلية للمقدار  $B$  .

من السهل إثبات أن (ب) تعني (ج) .

إذا كانت (ج) صحيحة فإنه لكل  $x \in B$  يوجد فئة مفتوحة  $G_x \subseteq B$  حيث  $x \in G_x$  إذن  $B = \bigcup \{G_x : x \in B\}$  وينتج من نظرية ٩ - ٣ (ج) أن  $B$  تكون مفتوحة في  $\mathbb{R}^p$  .

وينتج مما أوضحنا أن الفئة المفتوحة لا تحتوي على أي نقطة من نقطها الحدودية حيث الفئات المغلقة تكون الطرف الآخر في هذا الصدد .

٩ - ١٠ نظرية . فئة  $F \subseteq \mathbb{R}^p$  تكون مغلقة إذا وإذا فقط كانت تحتوي جميع نقطها الحدودية .

البرهان . نفرض أن  $F$  مغلقة وأن  $x$  هي نقطة حدودية لفئة  $F$  . إذا كانت  $x \notin F$  ، فإن الفئة المفتوحة  $\mathcal{G}(F)$  تحتوي  $x$  ولا تحتوي أي نقطة من  $F$  بخلاف الفرض الذي يقول أن  $x$  هي نقطة حدودية للمقدار  $F$  إذن يجب أن يكون  $x \in F$  .



وبالعكس ، نفرض أن  $F$  تحتوي جميع نقطها الحدودية . إذا كانت  $y \notin F$  فحينئذ  $y$  ليست نقطة من  $F$  وليست نقطة حدودية من  $F$  . إذن فهي نقطة خارجة . ومن ثم توجد جيرة  $M$  للمقدار  $y$  محتوية بأكملها في  $\mathcal{C}(F)$  . بما أن هذا صحيح لكل  $y \notin F$  فنستدل أن  $\mathcal{C}(F)$  مفتوحة حيث  $F$  مغلقة في  $\mathbb{R}^p$  .

### مُتَات مَفْتُوحَة فِي $R$ :

سنُعمِّمُ هذا الباب بتمييز الصورة لفئة جزئية مفتوحة اختيارية للفراغ  $R$  .

٩ - ١١ نظرية . فئة جزئية للفراغ  $R$  تكون مفتوحة إذا وإذا فقط كانت اتحاد مجموعة عددية لفترات مفتوحة .

البرهان . بما أن الفترة المفتوحة هي مفتوحة ( لماذا ؟ ) فينتج من ٩ - ٣ ( ج ) أن الاتحاد لأي اتحاد محدود لفترات مفتوحة يكون مفتوحاً .

وبالعكس إذا فرضنا  $G \neq \emptyset$  فئة مفتوحة في  $R$  ونفرض  $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$  هي تعداد لكل النقط القياسية في  $G$  . لكل  $n \in \mathbb{N}$  نفرض  $m_n$  هو أقل عدد طبيعي بحيث إن الفترة  $J_n = (r_n - 1/m_n, r_n + 1/m_n)$  تكون محتوية كلية في  $G$  . ومن ذلك ينتج أن :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n \subseteq G$$

والآن نفرض أن  $x$  نقطة اختيارية في  $G$  ونفرض  $m \in \mathbb{N}$  حيث أن :

$$(x - 2/m, x + 2/m) \subseteq G$$

ومن ذلك ينتج من نظرية ٦ - ١٠ أنه يوجد عدد قياسي  $y$  في  $(x - 1/m, x + 1/m)$  وحيث  $y \in G$  وكذلك  $y = r_n$  لعدد ما طبيعي  $n$  . وإذا كانت  $x$  لا تنتمي إلى

$$J_n = (r_n - 1/m_n, r_n + 1/m_n)$$

فحينئذ يجب أن يكون  $1/m_n < 1/m$  ولكن بما أنه قد تبين حالا أن

$$\left(r_n - \frac{1}{m}, r_n + \frac{1}{m}\right) \subseteq \left(x - \frac{2}{m}, x + \frac{2}{m}\right) \subseteq G$$

فهذا يخالف الاختيار للمقدار  $m_n$  لذلك عندنا  $x \in J_n$  لهذه القيمة إلى  $n$  . وحيث  $x \in G$  اختياري فنتستدل على أن

$$G \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$$

لذلك تكون  $G$  مساوية لهذا الاتحاد .

ومن ذلك لا ينتج من النظرية ٩-١١ أن فئة جزئية للفراغ  $R$  مغلقة إذا وإذا فقط كان القاطع مجموعة معدودة لفترات مغلقة ( لماذا ؟ ) . ومن ذلك لا ينتج أن الاتحاد المحسوب لفترات مغلقة يجب أن يكون مغلقاً . وكل فئة مغلقة ليست لها هذه الخاصية .

تسمي هذه النتيجة سيمبلي في تمرين ( ٩-ز ) .

### تمريعات :

- ٩ - ( أ ) برر الإثبات الذي قدم عن الفئتين  $F$  و  $G$  في مثال ٩-٢ ( ب ) .
- ٩ - ( ب ) برر الإثبات الذي قدم في مثال ٩-٢ ( ج ) .
- ٩ - ( ج ) أثبت أن تقاطع أى مجموعة محدودة لفئات مفتوحة تكون مفتوحة في  $R^n$  ( إرشاد : استخدم ٩-٣ ( ب ) والاستنتاج ) .
- ٩ - ( د ) ما هي النقط الداخلة والمحدودة والخارجة في  $R$  للفئة ( ٥ ، ١ ) ثم استنتج أنها ليست مفتوحة ولا مغلقة .
- ٩ - ( هـ ) اعط مثالا في  $R^2$  بحيث يكون ليس مفتوحاً ولا مغلقاً . ثم أثبت صحة هذا المثال .
- ٩ - ( و ) اكتب بالتفصيل برهان نظرية ٩-٦ .
- ٩ - ( ز ) وضح أن فئة جزئية للمقدار  $R^n$  تكون مفتوحة إذا وإذا فقط كان الاتحاد لمجموعة محسوبة لكورات مفتوحة ( إرشاد : فئة كل النقط في  $R^n$  والتي كل إحداثياتها أعداد قياسية هي معدودة ) .

- ٩ - ( ح ) كل فئة جزئية مفتوحة من  $R^n$  هي اتحاد لمجموعة محسوبة لفئات مغلقة .
- ٩ - ( ط ) كل فئة جزئية مغلقة من  $R^n$  هي التقاطع لمجموعة معدودة لفئات مفتوحة .
- ٩ - ( ي ) إذا كانت  $A$  أى فئة جزئية من  $R^n$  وبفرض  $A^0$  قرمز إلى الاتحاد لكل الفئات المفتوحة المحتوية في  $A$  فإن الفئة  $A^0$  تسمى داخل الفئة الجزئية  $A$  . لاحظ أن  $A^0$  هي فئة مفتوحة . وضح أنها أكبر فئة مفتوحة محتوية في  $A$  . أثبت أن -

$$A^0 \subseteq A, \quad (A^0)^0 = A^0$$

$$(A \cap B)^0 = A^0 \cap B^0, \quad (R^n)^0 = R^n$$

اعط مثالا لتوضيح أن  $(A \cup B)^0 = A^0 \cup B^0$  ربما لا تكون صحيحة .

- ٩ - ( ك ) أثبت أن نقطة تنتمي إلى  $A^0$  إذا وإذا فقط إذا كانت نقطة داخلية لفئة  $A$  .
- ٩ - ( ل ) إذا كانت  $A$  أى فئة جزئية من  $R^n$  وبفرض أن  $A'$  تشير إلى تقاطع كل الفئات المغلقة التي تحتوى على  $A$  ، الفئة  $A'$  تسمى الأقوال لفئة الجزئية  $A$  . ونلاحظ أن  $A'$  فئة مغلقة . أثبت أنها أصغر فئة مغلقة تحتوى على  $A$  .

أثبت أن :

$$A \subseteq A^-, \quad (A^-)^- = A \\ (A \cup B)^- = A^- \cup B^-, \quad \emptyset^- = \emptyset$$

اعط مثالا لتوضح أن  $(A \cap B)^- = A^- \cap B^-$  ربما لا تكون صحيحة .

٩ - (م) أثبت أن نقطة تنتمي إلى  $A^-$  إذا وإذا فقط كانت إما نقطة داخلية أو نقطة حدودية للمقدار  $A$  .

٩ - (ن) اعط مثالا لفئة  $A$  في  $R^p$  بحيث أن  $A^0 = \emptyset$  ،  $A^- = R^p$  هل يمكن لهذه الفئة مثل  $A$  أن تكون عددية .

٩ - (س) بفرض  $A$  ،  $B$  فئتين جزئيتين للمقدار  $R$  فان حاصل الضرب الكارتيلى  $A \times B$  يكون مفتوحاً في  $R^2$  إذا وإذا فقط كانت  $A$  ،  $B$  مفتوحتين في  $R$  .

٩ - (ع) بفرض  $A$  ،  $B$  فئتين جزئيتين للمقدار  $R$  . حاصل الضرب الكارتيلى  $A \times B$  يكون مغلقاً في  $R^2$  إذا وإذا فقط كانت  $A$  ،  $B$  مغلقتين في  $R$  .

٩ - (ف) فسر الفكرة المقدمة في هذا الباب عن دالة كانتور  $F$  للتعريف ٧ - ٤ . وخاصة :

(أ) وضح أن  $F$  مغلقة في  $R$  .

(ب) لا توجد نقط داخلية في  $F$  .

(ج) لا يوجد فئات مفتوحة غير خالية محتوية في  $F$  .

(د) كل نقطة من  $F$  هي نقطة حدودية .

(هـ) الفئة  $F$  لا يمكن التعبير عنها كاتحاد لمجموعة محسوبة لفترات مغلقة .

(و) متمم الفئة  $F$  لا يمكن التعبير عنها كاتحاد لمجموعة محسوبة لفترات مفتوحة .

## الباب العاشر - نظريات الخلايا المتشابهة ( الوكرية ) وبولزانو فيرشتراس :

في هذا الباب سنقدم نتيجتين هامتين جدا والتي سوف تستعمل غالباً في الأبواب القادمة بمعنى أنه يمكن اعتبارها كخاصية متممة للمقدار  $R^p$  حيث  $p > 1$  .

سنستعيد من باب سبعة أنه إذا كانت  $a \leq b$  فإن الخلية المفتوحة في  $R$  والتي يرمز إليها بالرمز  $(a, b)$  هي الفئة المرفقة بالمقدار .

$$(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$$

وقد لوحظ حالا أن مثل هذه الفئة تكون مفتوحة في  $R$  . بالمثل الخلية المغلقة  $[a, b]$  في  $R$  هي الفئة

$$[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$$

والتي هي فئة مغلقة في  $R$  . حاصل الضرب الكارتيزي لفترتين يسمى عادة مستطيلا وحاصل الضرب الكارتيزي لثلاث فترات يسمى غالباً متوازي السطوح . وللتبسيط سنستعمل العبارة « خلية » بغض النظر عن بعد الفراغ .

١٠ - ١ تعريف . خلية مفتوحة  $J$  في  $R^p$  هي حاصل الضرب الكارتيزي لخلايا مفتوحة عددها  $p$  لأعداد حقيقية . وحينئذ  $J$  تأخذ الصورة

$$J = \{x = (x_1, \dots, x_p) \in R^p : a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \dots, p\}$$

بالمثل الخلية المغلقة  $I$  في  $R^p$  هي حاصل الضرب الكارتيزي لخلايا مغلقة عددها  $p$  لأعداد حقيقية . وحينئذ  $I$  تأخذ الصورة

$$I = \{x = (x_1, \dots, x_p) \in R^p : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, p\}$$

تكون الفئة الجزئية من  $R^p$  تكون محدودة إذا كانت محتوية في خلية ما .

وكثيرين بين أن خلية مفتوحة في  $R^p$  تكون فئة مفتوحة وأن خلية مغلقة هي فئة مغلقة . وأيضاً الفئة الجزئية من  $R^p$  محدودة إذا وإذا فقط كانت هذه الفئة الجزئية محتوية في كرة ما . ويلاحظ أن هذا المصطلح الفنى للفئات المحدودة متفق مع المقدمة في باب ٦ في حالة  $p = 1$  .

وسيتذكر القارئ من باب ٧ أن خاصية الملو لنظام العدد الحقيقي تدل على أن كل متتابة متداخلة لخلايا مغلقة غير خالية في  $R$  لها نقطة مشتركة .

والآن سنبرهن أن هذه الخاصية تتحقق في حالة الفراغ  $R^p$  .

١٠ - ٢ نظرية الخلايا المتداخلة . بفرض  $(I_k)$  متتابة لخلايا مغلقة غير خالية في  $R^p$  ومتداخلة بمعنى أن  $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_k \supseteq \dots$  . فحينئذ توجد نقطة في  $R^p$  بحيث تنتمي لجميع الخلايا .

البرهان . نفرض أن  $I_k$  هي الخلية .

$$I_k = \{(x_1, \dots, x_p) : a_{k1} \leq x_1 \leq b_{k1}, \dots, a_{kp} \leq x_p \leq b_{kp}\}$$

من السهل أن نرى أن الخلايا  $[a_{k1}, b_{k1}]$ ,  $k \in N$  تكون متتابة متداخلة لخلايا مغلقة غير خالية لأعداد حقيقية فإذا وجد بواسطة إتمام مجموعة العدد الحقيقي  $R$  عدد حقيقى  $x_1$  ينتمى إلى جميع هذه الخلايا . وباستخدام هذه النتيجة لكل إحداثى صادى فإننا نحصل على النقطة

فإن  $y = (y_1, \dots, y_p)$  للفراغ  $R^p$  بحيث إنه إذا كانت  $j$  تحقق  $j = 1, 2, \dots, p$  فإن  $y$  تنتمي لكل الخلايا  $\{[a_{kj}, b_{kj}]: k \in N\}$  وإذن النقطة  $y$  تنتمي إلى جميع الخلايا  $(I_k)$ . وهو المطلوب إثباته

### نقطة المنقود أو السبابة ونظرية بولزانو — قيرشقراس :

١٠ - ٣ . تكون نقطة  $x \in R^p$  تكون نقطة سبابة (أو نقطة تجمع كمنقود) لفئة جزئية  $A \subseteq R^p$  في حالة كون كل متاخمة للمقدار  $x$  تحتوى على الأقل نقطة واحدة للفئة  $A$  خلاف  $x$ .  
سوف نعتبر بعض أمثلة .

- ١٠ - ٤ أمثلة . (أ) نقطة  $x \in R^p$  تكون نقطة تجمع للفئة  $A$  إذا وإذا فقط كان يوجد لكل عدد طبيعي  $n$  عنصر  $a_n \in A$  بحيث إن  $0 < \|x - a_n\| < 1/n$  .
- (ب) إذا كانت نقطة حدودية لفئة لا تنتمي إلى الفئة فإنها تكون نقطة تجمع للفئة .
- (ج) كل نقطة لوحدة الفترات  $I$  في  $R$  تكون نقطة تجمع للفئة  $I$  .
- (د) بفرض  $A = (0, 1)$  فإن كل نقطة في الفترة  $A$  هي نقطة داخلية ونقطة تجمع للفترة  $A$  . النقطتان  $0, 1$  نقطتا تجمع (لكن ليست نقطتين داخليتين) للفترة  $A$  .
- (هـ) بفرض  $B = I \cap Q$  هي فئة جميع الأعداد القياسية في وحدة الفترات فإن كل نقطة في  $I$  هي نقطة تجمع للفترة  $B$  في  $R$  ولكن لا توجد نقط داخلية للفترة  $B$  .
- (و) فئة جزئية محدودة للفراغ  $R^p$  ليس لها نقط تجمع (لماذا ؟) .
- (ز) الفئة اللانهائية لأعداد صحيحة  $Z \subseteq R$  ليس لها نقط تجمع (لماذا ؟) .

١٠ - ٥ نظرية . فئة  $F \subseteq R^p$  تكون مغلقة إذا وإذا فقط كانت تحتوى على كل نقطها التجميعية .

البرهان . نفرض أن  $F$  مغلقة ،  $x$  نقطة تجمع للفئة  $F$  . إذا كانت  $x \notin F$  فإن الفئة المفتوحة  $\mathcal{C}(F)$  تكون جوارا للمقدار  $x$  ويجب أن تحتوى على الأقل نقطة واحدة للفئة  $F$  . لكن هذا مستحيل ولذلك نستنتج أن  $x \in F$  .

وبالعكس إذا كانت  $F$  تحتوى جميع نقطها التجميعية فنسوضح أن  $\mathcal{C}(F)$  مفتوحة . لأنه إذا كانت  $y \in \mathcal{C}(F)$  فإن  $y$  ليست نقطة تجمع للفئة  $F$  . ولذلك يوجد جوار  $V_y$  للمقدار  $y$  بحيث إن  $F \cap V_y = \emptyset$  . وإذن  $V_y \subseteq \mathcal{C}(F)$  . وبما أن هذا صحيح لكل  $y \in \mathcal{C}(F)$  فنستنتج أن  $\mathcal{C}(F)$  تكون مفتوحة في  $R^p$  . وهو المطلوب إثباته

النتيجة الآتية من أهم النتائج ذات الأهمية في هذا الكتاب وأهميتها أساسية وسوف تستخدم كثيراً . ويجب ملاحظة أن الاستنتاج ربما يقلل إذا لم يتحقق أى من الفروض . [ انظر مثالي ١٠-٤ ( و ، ز ) ] .

١٠-٦ نظرية بولزانو - فيرشتراس\* . كل فئة جزئية لا نهائية محدودة الفراغ  $R^p$  لها نقطة تجميع .

البرهان . إذا كانت  $B$  فئة محدودة لها عدد لا نهائي من العناصر ونفرض أن  $I_1$  خلية مغلقة تحتوي  $B$  . نقسم  $I_1$  إلى  $2^p$  خلايا مغلقة بتنصيف كلا من جانبيها . وبما أن  $I_1$  تحتوي على نقط كثيرة لانهائية من  $B$  . فجزء واحد على الأقل من هذا التقسيم الفرعي سيحتوي أيضاً على نقط كثيرة لانهائية من الفئة  $B$  . ( لأنه إذا كان كل من الـ  $2^p$  جزء يحتوي فقط عدداً محدوداً من نقط لفئة  $B$  ، فحينئذ يجب أن تكون  $B$  فئة محدودة بعكس الفرض ) . نفرض أن  $I$  واحد من هذه الأجزاء للتقسيم الفرعي لفئة  $I_1$  والذي يحتوي عناصر كثيرة لفئة  $B$  عددها لانهائي . الآن نقسم  $I_2$  إلى  $2^p$  من الخلايا المغلقة بتنصيف ضلعيها الجانبيين . مرة أخرى يجب أن تحتوي إحدى هذه الخلايا الجزئية على عدد لا نهائي من نقط الفئة  $B$  وإلا أمكن للخلية الجزئية  $I_2$  أن تحتوي فقط على عدد محدود مما يخالف تركيبها . فإذا فرضنا أن  $I_3$  هي خلية جزئية من  $I_2$  التي تحتوي نقطة كثيرة عددها لانهائي من  $B$  فإنه باستمرار هذه العملية فإننا نحصل على متتابعة متداخلة  $(I_k)$  خلايا مغلقة غير خالية من  $R^p$  وحسب نظرية الخلايا المتداخلة فإنه توجد نقطة  $\gamma$  تنتمي لجميع الخلايا  $I_k$ ،  $k = 1, 2, \dots$  والآن سنوضح أن  $\gamma$  هي نقطة تجميع من  $B$  وهذا سيدخل برهان الفرض .

أولاً : نلاحظ أنه إذا كانت  $I_1 = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_p, b_p]$  حيث  $a_k < b_k$  وإذا كانت  $I(I_1) = \sup \{b_1 - a_1, \dots, b_p - a_p\}$  فإن  $I(I_1) > 0$  هو طول أطول أضلاع  $I_1$  . وطبقاً للتركيب أعلاه للمتتابعة  $(I_k)$  يكون لدينا

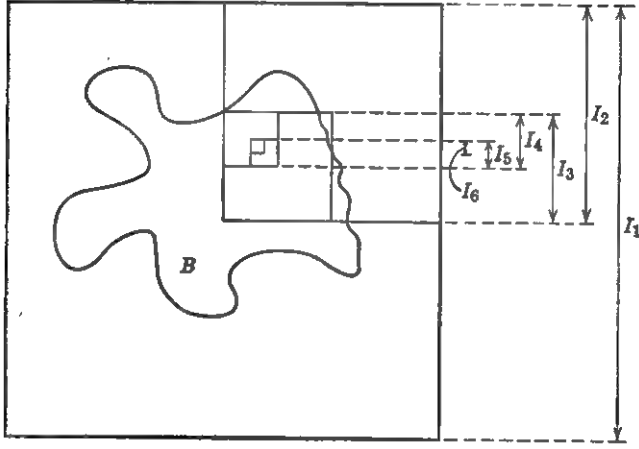
(\*) برنارد بولزانو (١٧٨١ - ١٨٤٨) كان أستاذاً لفلسفة الدين في براغ ولكن كان له أفكار عميقة عن الرياضيات . وكان مثل كوشي - رائداً في إدخال مستوى عال من الصرامة في التحليل الرياضي . وظهر مؤلفه عن التناقضات الظاهرية التي قد تكون فيها الحقيقة عن اللانهاية بعد وفاته .

كارل فيرشتراس (١٨١٥ - ١٨٩٧) كان أستاذاً في برلين لعدة سنوات وله تأثير عميق في تطوير التحليل الرياضي . وكان يصّر دائماً على البرهان الصحيح القوي . وتوصل إلى مقدمة في نظام العدد الحقيقي ولكنه لم ينشرها . وله إسهامات هامة على نظام العدد الحقيقي وله في التحليل الحقيقي والتحليل المركب والمعادلات التفاضلية والتفاضل والتكامل للمتغيرات .

$$0 < l(I_k) = \frac{1}{2^{k-1}} l(I_1)$$

حيث  $k \in \mathbb{N}$  . نفرض أن  $V$  هي أى جوار للنقطة المشتركة  $y$  ونفرض أن كل النقط  $z$  في  $\mathbb{R}^p$  حيث  $\|y - z\| < r$  تنتمي إلى  $V$  الآن نختار  $k$  كبيرة جدا بحيث إن  $I_k \subseteq V$  ومثل هذا الاختيار ممكن لأنه إذا كانت  $w$  أى نقطة أخرى من  $I_k$  فحينئذ ينتج من نظرية ٨-١٠ أن

$$\|y - w\| \leq \sqrt{p} l(I_k) = \frac{\sqrt{p}}{2^{k-1}} l(I_1).$$



( شكل ١٠-١ )

وحسب تمرين ٦-٧ ، ينتج أنه إذا كانت  $k$  كبيرة كبرا كافيا فإن

$$\frac{\sqrt{p}}{2^{k-1}} l(I_1) < r.$$

ولمثل هذه القيمة المقدار  $k$  يكون  $I_k \subseteq V$  . حيث إن  $I_k$  تحتوى عناصر كثيرة عددها لا نهائى من  $B$  فينتج أن  $V$  تحتوى على الأقل عنصرا واحدا من  $B$  يختلف عن  $y$  . إذن  $y$  نقطة تجمع للمقدار  $B$  . وهو المطلوب إثباته .

### تمريفات :

١٠- (أ) يفرض  $I_n \subseteq \mathbb{R}^p$  ( خلايا مفتوحة مغطاة من الملاقة  $I_n = (0, 1/n) \times \dots \times (0, 1/n)$  ) وضح أن هذه الخلايا متداخلة ولكنها لا تحتوى على أى نقطة مشتركة .

١٠ - (ب) بفرض أن  $J_n \subset \mathbb{R}^p$  فترات مغلقة مغطاة من العلاقة  $J_n \subset [n, +\infty) \times \dots \times [n, +\infty)$  أثبت أن هذه الفترات تكون متداخلة ولكنها لا تحتوى على أى نقطة مشتركة .

١٠ - (ج) نقطة  $x$  هي نقطة تجميع لفئة  $A \subset \mathbb{R}^p$  إذا وإذا فقط كان كل جوار للنقطة  $x$  يحتوى نقطاً كثيرة للفئة  $A$  عددها لا نهائى .

١٠ - (د) بفرض  $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$  . وضح أن كل نقطة للفئة  $A$  هي نقطة حدودية في  $\mathbb{R}$  ولكن  $0$  هي نقطة التجميع الوحيدة للفئة  $A$  في  $\mathbb{R}$  .

١٠ - (هـ) بفرض  $A$  و  $B$  فئتين جزئيتين من  $\mathbb{R}^p$  وبفرض  $x$  هي نقطة تجميع للفئة  $A \cap B$  في  $\mathbb{R}^p$  . أثبت أن  $x$  هي نقطة تجميع لكل من  $A$  ،  $B$  .

١٠ - (و) بفرض  $A$  و  $B$  فئتين جزئيتين للفئة  $\mathbb{R}^p$  ونفرض أن  $x$  نقطة تجميع للفئة  $A \cup B$  في  $\mathbb{R}^p$  . أثبت أن  $x$  إما نقطة تجميع للفئة  $A$  أو للفئة  $B$  .

١٠ - (ز) أثبت أن كل نقطة في فئة كانتور  $F$  هي نقطة تجميع لكل من  $F$  و  $F^c$  .

١٠ - (ح) إذا كانت  $A$  أى فئة جزئية للفئة  $\mathbb{R}^p$  ، فإنه يوجد فئة جزئية محسوبة  $C$  للفئة  $A$  بحيث أنه إذا كانت  $x \in A$  ،  $\varepsilon > 0$  فيوجد عنصر  $z \in C$  بحيث أن  $\|x - z\| < \varepsilon$  ومن ثم يكون كل عنصر من  $A$  إما في  $C$  أو نقطة تجميع للفئة  $C$  .

## مشروعات :

١٠ -  $\alpha$  - نفرض  $M$  فئة ، مترياً أو قياسياً على  $M$  ومعرفاً في (تمرين ٨ - ق) . اختر ثانياً التعريفات والنظريات في البابين ٩ ، ١٠ لكنى تحدد أيها ينطبق على الفئات التى لها متري . فثلاً سيتضح أن فكرة الفئة المفتوحة والمغلقة والمحدودة تنطبق عليها ولا تنطبق نظرية بولترانو وفيرشتراس عند قيمة مناسبة للمقدارين  $M$  و  $d$  . كلما كان ممكناً إما أن توضح أن النظرية تمتد أو تعطى مثالا عكسياً لتوضيح فشلها .

١٠ -  $\beta$  - بفرض  $\mathcal{T}$  عائلة لفئات جزئية لفئة  $X$  التى (i) تحتوى  $\emptyset$  ،  $X$  ، (ii) تحتوى التقاطع لأى عائلة محدودة من الفئات في  $\mathcal{T}$  ، (iii) تحتوى الاتحاد لأى عائلة من الفئات في  $\mathcal{T}$  فإننا نسمى  $\mathcal{T}$  توبولوجى للفئة  $X$  ونشير إلى الفئات في  $\mathcal{T}$  كفئات مفتوحة . افحص ثانياً التعريفات والنظريات في بابي ٩ ، ١٠ محاولاً أن تحدد أيها ينطبق على الفئات  $X$  التى لها توبولوجى  $\mathcal{T}$  .

## الباب الحادى عشر - نظرية هاين - بوريل :

نظرية الخلايات المتداخلة ١٠ - ٢ ونظرية بولترانو وفيرشتراس ١٠ - ٦ ترتبطان ارتباطاً خاصاً بالتمريف الهام جداً للاندماج التى سنناقشها في هذا الباب وبالرغم من أنه من الممكن



الحصول على معظم النتائج في الأبواب الأخيرة بدون معرفة نظرية هاين بوريل فلا يمكننا التمتع في التحليل بدون الاحتياج لهذه النظرية ولذلك يكون منع عرض هذه النتيجة العميقة اقتصاداً مزيماً .

١١ - ١ تعريف . فئة  $K$  يقال أنها محكمة أو مدجة طالما تكون الفئة محتوية في الاتحاد لمجموعة  $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$  لفئات مفتوحة فإنها أيضاً تكون محتوية في الاتحاد لعدد ما محدود من الفئات في  $\mathcal{G}$  .

مجموعة  $\mathcal{G}$  لفئات مفتوحة اتحادها يحتوي  $K$  غالباً تسمى غطاء الفئة  $K$  . أى المتطلبات لكون الفئة  $K$  محكمة هي أن كل غطاء  $\mathcal{G}$  للفئة  $K$  يمكن استبداله بغطاء محدود للفئة  $K$  باستخدام فئات في  $\mathcal{G}$  فقط نلاحظ أنه لكي نستخدم هذا التعريف للبرهنة على أن فئة  $K$  مدجة سنحتاج لفحص أو اختبار مجموعة اختيارية لفئات مفتوحة اتحادها يحتوي  $K$  ونوضح أن  $K$  تكون محتوية في الاتحاد لمجموعة جزئية محدودة من كل مجموعة كهذه . ومن ناحية أخرى لنوضح أن فئة  $H$  ليست مدجة فإنه يكون كافياً عرض غطاء واحد فقط بحيث لا يمكن إبداله بمجموعة جزئية محدودة والتي تظل تغطي  $H$  .

١١ - ٢ أمثلة . (أ) بفرض  $K = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  فئة جزئية محدودة للفئة  $R^p$  ، فن الواضح أنه إذا كانت  $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$  مجموعة لفئات مفتوحة في  $R^p$  وإذا كانت أى نقطة من الفئة  $K$  تنتمي إلى فئة جزئية ما من  $\mathcal{G}$  فإن فئات جزئية مختارة بعناية عددها  $m$  على الأكثر من  $\mathcal{G}$  سيكون لها أيضاً الخاصية التي نقول ان اتحادهم يحتوي  $K$  . حينئذ تكون  $K$  فئة جزئية مدجة للفئة  $R^p$  .

(ب) في  $R$  سنعتبر الفئة الجزئية  $H = \{x \in R : x \geq 0\}$  ونفرض أن  $G_n = (-1, n)$   $n \in N$  بحيث أن  $\mathcal{G} = \{G_n : n \in N\}$  مجموعة لفئات جزئية مفتوحة للفئة  $R$  والتي اتحادها يحتوي  $H$  . إذا كانت  $\{G_{n_1}, G_{n_2}, \dots, G_{n_k}\}$  هي مجموعة جزئية محدودة من  $\mathcal{G}$  فنفرض أن  $M = \sup \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$  بحيث  $G_{n_j} \subseteq G_M$  عند  $j = 1, 2, \dots, k$  . ومن ذلك ينتج أن  $G_M$  هو اتحاد  $\{G_{n_1}, G_{n_2}, \dots, G_{n_k}\}$  مهما يكن فإن العدد الحقيق  $M$  لا ينتهي إلى  $G_M$  ولذلك لا ينتهي إلى

$$\bigcup_{j=1}^k G_{n_j}$$

وإذن لا يوجد اتحاد محدود لفئات  $\mathcal{G}$  يمكن أن يحتوي  $H$  ،  $H$  لا تكون مدجة .

(ج) نفرض  $H = (0, 1)$  في  $R$  . إذا كانت  $G_n = (1/n, 1 - 1/n)$  عند  $n > 2$  فحينئذ المجموعة  $\mathcal{G} = \{G_n : n > 2\}$  لفئات مفتوحة تكون غطاء  $H$  . إذا كانت  $\{G_{n_1}, \dots, G_{n_k}\}$  مجموعة جزئية محدودة من  $\mathcal{G}$  وبفرض  $M = \sup \{n_1, \dots, n_k\}$  بحيث

أن  $G_{n_j} \subseteq G_M$  عند  $j = 1, 2, \dots, k$ . فينتج أن  $G_M$  هي الاتحاد للفئات  $\{G_{n_1}, \dots, G_{n_k}\}$  لكن العدد الحقيقي  $1/M$  ينتمي إلى  $H$  ولا ينتمي إلى  $G_M$  لذلك لا يوجد مجموعة جزئية محدودة من  $\mathcal{G}$  يمكن أن تكون غطاء  $H$  وإذن  $H$  ليست مدجة .

(د) اعتبر الفئة  $I = [0, 1]$  وسنوضح أن  $I$  تكون مدجة لذلك نفرض  $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$  هي مجموعة لفئات جزئية مفتوحة للفئة  $R$  والتي اتحادها يحتوي  $I$ . العدد الحقيقي  $x = 0$  ينتمي إلى فئة مفتوحة ما في المجموعة  $\mathcal{G}$  وأيضاً تنتمي إليها الأعداد  $x$  التي تحقق  $0 \leq x < \varepsilon$  لأي  $\varepsilon > 0$ . نفرض  $x^*$  هي أعلى للنقط  $x$  في  $I$  بحيث أن الخلية  $[0, x]$  تكون محتوية في الاتحاد لعدد محدود من الفئات في  $\mathcal{G}$ . بما أن  $x^*$  تنتمي إلى  $I$ ، فينتج أن  $x^*$  يكون عنصر الفئة مفتوحة ما في  $\mathcal{G}$ . ومن ثم عند قيمة ما  $\varepsilon > 0$  تكون الخلية  $[x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$  محتوية في فئة  $G_0$  في المجموعة. لكن (من تعريف  $x^*$ ) تكون الخلية  $[0, x^* - \varepsilon]$  محتوية في الاتحاد لعدد محدود من الفئات في  $\mathcal{G}$ . وإذن بإضافة الفئة المفردة  $G_0$  إلى العدد المحدود السابق الذي نحتاج إليه لأن نمطي  $[0, x^* - \varepsilon]$ ، نستنتج أن الفئة  $[0, x^* + \varepsilon]$  تكون محتوية في الاتحاد لعدد محدود من الفئات في  $\mathcal{G}$ . وإذن  $x^* = 1$  مدجة .

وعادة ليس أمراً سهلاً برهان أن فئة تكون مدجة باستخدام التعريف فقط. والآن سنقدم نظرية هامة وشهيرة التي تميز تماماً الفئات الجزئية المدجة للفئة  $R^p$ . وفي الحقيقة جزء من أهمية نظرية هاين بوريل \* يرجع إلى بساطة الشروط لأجل الإدماج في  $R^p$ .

١١ - ٣ نظرية هاين بوريل . فئة جزئية للفئة  $R^p$  تكون مدجة إذا وإذا فقط كانت مغلقة ومحدودة .

البرهان . أولاً سنوضح أنه إذا كانت الفئة  $K$  مدجة في  $R^p$  فحينئذ تكون مغلقة . نفرض أن  $x$  تنتمي إلى  $\mathcal{G}(K)$  ونفرض أن  $G_m$  هي الفئة المعرفة لكل عدد طبيعي  $m$  بواسطة  $G_m = \{y \in R^p : \|y - x\| > 1/m\}$

وقد تبين نواً أن كل فئة  $G_m, m \in \mathbb{N}$  تكون مفتوحة في  $R^p$ . أيضاً، يتكون الاتحاد

---

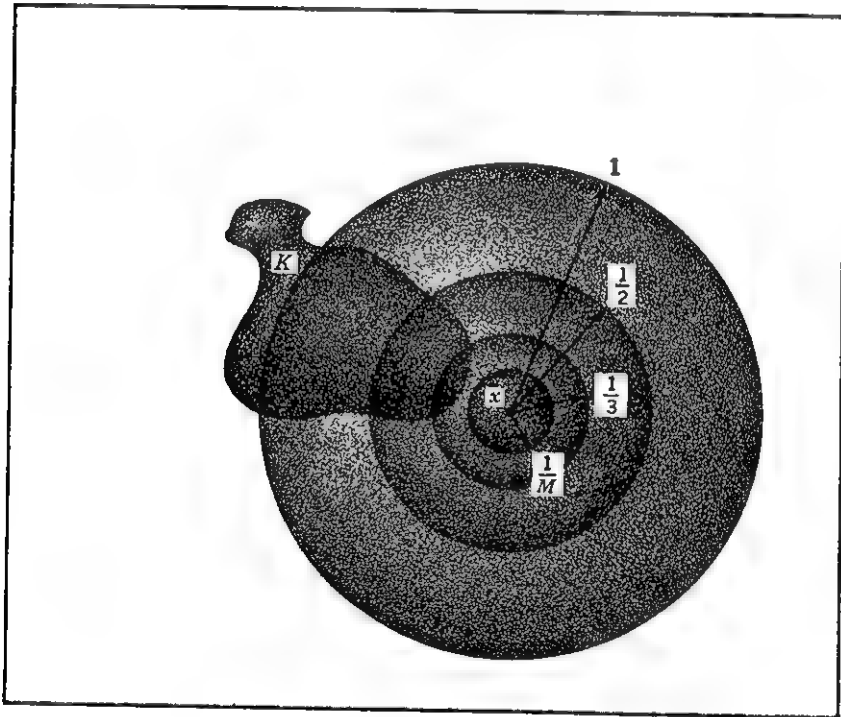
\* إدوارد هاين ( ١٨٢١ - ١٨٨١ ) درس في برلين من فيرشتراس وبعد ذلك تعلم في بون وهاله . وفي سنة ١٨٧٢ برهن أن الدالة المتصلة في فترة مغلقة تكون متصلة بانتظام . (ف. أ. ج) إميل بوريل ( ١٨٧١ - ١٩٥٦ ) كان تلميذاً لهرميت ثم كان أستاذاً في باريس وكان من أبرز الرياضيين في عصره . وقد أسهم بعمق وبفازرة في التحليل والاحتمالات . وفي سنة ١٨٩٥ برهن على أنه إذا كانت مجموعة محسوبة لفترات مفتوحة تغطي فترة مغلقة فحينئذ يكون لها غطاء جزئي محدود .

لجميع الفئات  $G_m, m \in \mathbb{N}$  من كل نقط  $\mathbb{R}^p$  ماعدا  $x$  . بما أن  $x \notin K$  ، فإن كل نقطة من الفئة  $K$  تنتمي إلى فئة ما  $G_m$  . وبسبب الإدماج الفئة  $K$  ينتج أنه يوجد عدد طبيعي  $M$  بحيث أن  $K$  تكون محتوية في اتحاد الفئات

$$G_1, G_2, \dots, G_M$$

بما أن الفئات  $G_m$  تزداد مع  $m$  ، فينتج أن  $K$  محتوية في  $G_M$  . ومن ثم لا يقطع الجوار  $\{z \in \mathbb{R}^p : \|z - x\| < 1/M\}$  الفئة  $K$  مما يثبت أن  $\mathcal{G}(K)$  مفتوحة . وإذن تكون  $K$  مغلقة في  $\mathbb{R}^p$  ( انظر شكل ١١ - ١ ) حيث صورت الكرات المغلفة المتسمة للفئات  $G_m$  .

بعد ذلك سنوضح أنه إذا كانت الفئة  $K$  مدجة في  $\mathbb{R}^p$  فإن  $K$  تكون محدودة ( أى أن  $K$  تكون محتوية في فئة ما  $\{x \in \mathbb{R}^p : \|x\| < r\}$  عندما تكون  $a$  كبيرة كبراً



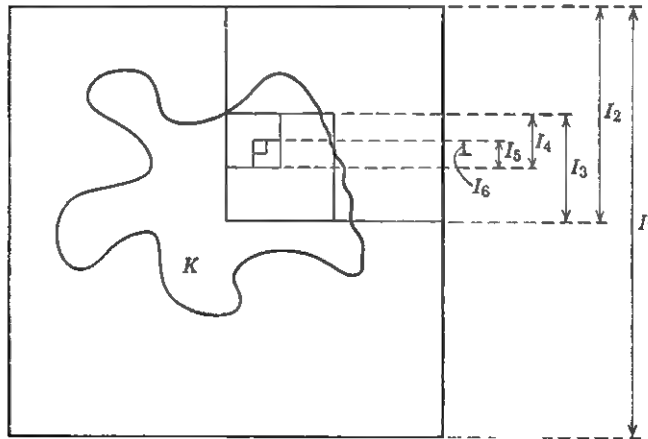
( شكل ١١ - ١ ) فئة مدجة تكون مغلقة

كافياً . وفي الحقيقة لكل عدد طبيعي  $m$  ، نفرض  $H_m$  هي الفئة المفتوحة المعرفة بالتالي :

$$H_m = \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\| < m\}$$

الفراغ الشامل  $R^p$  ، ومن ثم  $K$  تكون محتوية في الاتحاد للفئات المتزايدة  $H_m, m \in \mathbb{N}$  بما أن  $K$  مدمجة فإنه يوجد عدد طبيعي  $M$  بحيث أن  $K \subseteq H_M$  . وهذا يثبت أن  $K$  محدودة .

ولإكمال البرهان لهذه النظرية نحتاج لتوضيح أنه إذا كانت  $K$  فئة مغلقة ومحدودة ومحتوية في الاتحاد لمجموعة  $\mathcal{G} = \{G_n\}$  لفئات مفتوحة في  $R^p$  ، فإنها تكون محتوية في الاتحاد لعدد محدود ما من الفئات في  $\mathcal{G}$  . وبما أن الفئة  $K$  محدودة فيمكن حصرها في خلية مغلقة  $I$  في  $R^p$  . مثال ذلك ، يمكننا أخذ  $I_1 = \{(x_1, \dots, x_p) : |x_k| \leq r, k = 1, \dots, p\}$  حيث  $r > 0$  وكبيرة بدرجة قياسية . ولنغرض الحصول على تناقض سنفترض أن الفئة  $K$  ليست محتواة في اتحاد لأي عدد محدود من الفئات في  $\mathcal{G}$  . ولذلك تحتوى على الأقل إحدى الخلايا المغلقة التي عددها  $2^p$  والتي يمكن الحصول عليها بتقسيم أضلاع  $I_1$  نقطة للفئة  $K$  وبحيث أن جزء الفئة  $K$  فيها لا يكون محتوياً في اتحاد أى عدد محدود من الفئات في  $\mathcal{G}$  . ( لأنه إذا كان كل من  $2^p$  جزءاً للفئة  $K$  محتوياً في اتحاد عدد محدود للفئات في  $\mathcal{G}$  فإن  $K$  ستكون محتوية في اتحاد عدد محدود من الفئات في  $\mathcal{G}$  . بخلاف الفرض ) نفرض أن  $I_2$  أى إحدى الخلايا الجزئية في هذا التقسيم الجزئي لـ  $I_1$  والتي تكون بحيث لا تكون الفئة غير الخالية  $K \cap I_2$  محتواة في اتحاد أى عدد محدود من الفئات في  $\mathcal{G}$  . نستمر في هذه العملية بتقسيم أضلاع  $I_2$  لنحصل على  $2^p$  خلايا جزئية مغلقة من الخلية الجزئية  $I_2$  . ونفرض أن  $I_3$  هى إحدى هذه الخلايا الجزئية بحيث لا تكون الفئة غير الخالية  $K \cap I_3$  محتواة في اتحاد عدد محدود من الفئات في  $\mathcal{G}$  وهكذا .



(شكل ١١ - ٢)

بهذه الطريقة يمكننا الحصول على متتابة متداخلة  $(I_n)$  لخلايا غير خالية ( انظر شكل ٢ - ١١ ) وطبقاً لنظرية الخلايا المتداخلة توجد نقطة  $y$  مشتركة لـ  $I_n$  لأن كل  $I_n$  تحتوى نقطاً في  $K$  ، والنصر المشترك  $y$  هو نقطة تجميع للفتة  $K$  وبما أن  $K$  مغلقة فحينئذ تنتمي  $y$  إلى  $K$  وتكون محتوية في فتة مفتوحة ما  $G$  في  $\mathcal{G}$  لذلك يوجد عدد  $\varepsilon > 0$  بحيث تنتمي جميع النقط  $w$  حيث  $\|y - w\| < \varepsilon$  إلى  $G$  . وبمعنى آخر يحصل على الخلايا  $I_k, k \geq 2$  بتتصيف متتال لأضلاع الخلية  $I_1 = \{(x_1, \dots, x_p) : |x_1| \leq r\}$  وإذن يكون طول الضلع للتقسيم الجزئي  $I_k$  هو  $r/2^{k-2}$  . ومن ذلك ينتج من نظرية ٨ - ١٠ أنه إذا كانت  $w \in I_k$  فإن  $\|y - w\| \leq r\sqrt{p}/2^{k-3}$  . ومن ثم ، إذا كانت اختيرت  $k$  كبيرة جداً لدرجة أن  $r\sqrt{p}/2^{k-3} < \varepsilon$  فإن جميع النقط في  $I_k$  تكون محتواة في الفتة الفردية  $G$  . لكن هذا يخالف تركيب  $I_k$  كفتة بحيث لا تكون  $K \cap I_k$  محتواة في الاتحاد لعدد محدود من الفئات في  $\mathcal{G}$  . وهذا التناقض يوضح أن فرض كون الفتة المحدودة المغلقة  $K$  تتطلب عدداً لانهاياً من الفئات في  $\mathcal{G}$  لاحتوائها لا يمكن تأييده . وهو المطلوب إثباته

### بعض التطبيقات :

كنتيجة لنظرية هاین بوريل فإننا نحصل على النتيجة التالية والتي أوجدها كانتور . هي تقوية لنظرية الخلايا المتداخلة حيث تعتبر هنا الفئات المغلقة في الحالة العامة وليست بالفضبط خلايا مغلقة .

١١ - ٤ : نظرية تقاطع كانتور . نفرض أن  $F_1$  فتة جزئية محدودة مغلقة وغير خالية ونفرض أن

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots \supseteq F_n \supseteq \dots$$

هي متتابة لفئات مغلقة وغير خالية . حينئذ يوجد نقطة تنتمي إلى جميع الفئات  $\{F_k : k \in \mathbb{N}\}$  .

البرهان . بما أن  $F_1$  مغلقة ومحدودة ، فينتج من نظرية هاین بوريل أن  $F_1$  مدمجة . لكل  $k \in \mathbb{N}$  نفرض أن  $G_k$  هي متممة  $F_k$  في  $\mathbb{R}^p$  . وبما أننا فرضنا أن  $F_k$  مغلقة فإن  $G_k$  مفتوحة في  $\mathbb{R}^p$  . وإذا - تتناقض النظرية - لم يوجد نقطة تنتمي لكل الفئات  $F_k, k \in \mathbb{N}$  ، حينئذ يحتوي اتحاد الفئات  $G_k, k \in \mathbb{N}$  الفتة المدمجة  $F_1$  ، وإذن تكون الفتة  $F_1$  محتواة في اتحاد عدد محدود لفئات  $G_k$  ، مثلاً ، في  $G_1, G_2, \dots, G_K$  . وبما أن  $G_k$  تزداد فيكون لدينا  $G_1 \cup \dots \cup G_K = G_K$  . وبما أن  $F_1 \subseteq G_K$  فينتج أن  $F_1 \cap F_K = \emptyset$  ومن الفرض  $F_1 \supseteq F_K$  ينتج  $F_1 \cap F_K = F_K$  . وفرضنا يقودنا إلى استنتاج أن  $F_K = \emptyset$  الذي يناقض الفرض . وهذا الاستنتاج يثبت النظرية .

وهو المطلوب إثباته

١١ - ٥ نظرية غطاء لبسيج . نفرض أن  $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$  غطاء لفئة الجزئية المدمجة  $K$  من  $\mathbb{R}^p$  . يوجد على سبيل المصير عدد موجب  $\lambda$  بحيث أنه إذا كانت  $x, y$  تنتمي إلى  $K$  ،  $\|x - y\| < \lambda$  حينئذ توجد فئة في  $\mathcal{G}$  تحتوي كل من  $x$  ،  $y$  .

البرهان . لكل نقطة  $u$  في  $K$  ، توجد فئة مفتوحة  $G_{\alpha(u)}$  في  $\mathcal{G}$  تحتوي  $u$  . نفرض  $\delta(u) > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $\|v - u\| < 2\delta(u)$  فإن  $v$  تنتمي إلى  $G_{\alpha(u)}$  . اعتبر الفئة المفتوحة  $S(u) = \{v \in \mathbb{R}^p : \|v - u\| < \delta(u)\}$  والمجموعة  $\mathcal{S} = \{S(u) : u \in K\}$  . بما أن  $\mathcal{S}$  غطاء لفئة المدمجة فإن  $K$  محتواة في اتحاد عدد محدود من الفئات في  $\mathcal{S}$  مثلاً في  $S(u_1), \dots, S(u_n)$  . الآن سنعرف  $\lambda$  بأنها العدد الحقيقي الموجب المضبوط .

$$\lambda = \inf \{\delta(u_1), \dots, \delta(u_n)\}$$

إذا كانت  $x, y$  تنتمي إلى  $K$  و  $\|x - y\| < \lambda$  فإن  $x$  تنتمي إلى  $S(u_j)$  لبعض  $j$  حيث  $1 \leq j \leq n$  أي أن  $\|x - u_j\| < \delta(u_j)$  . بما أن  $\|x - y\| < \lambda$  فنحصل على  $\|y - u_j\| \leq \|y - x\| + \|x - u_j\| < 2\delta(u_j)$  . وطبقاً لتعريف  $\delta(u_j)$  نستنتج أن كلا من  $x$  ،  $y$  تنتمي إلى الفئة  $G_{\alpha(u_j)}$  .

نشير إلى أن عدداً موجباً  $\lambda$  له الخاصية المبنية في النظرية أحياناً يسمى عدد لبسيج • للغطاء

مع أننا سوف نستخدم المناقشة المبينة على الإدماج في الأبواب التالية يظهر من المستحسن أن ندون هنا نتيجتين تبدوان واضحتين بدهاة ولكن البرهان يتطلب استخدام نوع ما من مناقشة الإدماج .

١١ - ٦ نظرية أقرب نقطة . نفرض أن  $F$  فئة جزئية غير خالية مغلقة من  $\mathbb{R}^p$  ونفرض أن  $x$  هي نقطة خارج  $F$  . حينئذ يوجد على الأقل نقطة واحدة  $y$  تنتمي إلى  $F$  بحيث أن  $\|z - x\| \geq \|y - x\|$  لكل  $z \in F$  .

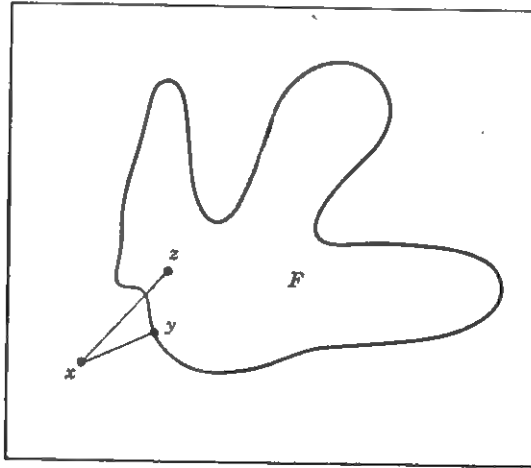
البرهان . بما أن  $F$  مغلقة ،  $x \notin F$  ، حينئذ (تمرين ١١ - ح) المسافة من  $x$  إلى  $F$  ، التي تعرف بأن تكون  $d = \inf \{\|x - z\| : z \in F\}$  تحقق  $d > 0$  . فنفرض أن  $k \in \mathbb{N}$  حيث  $F_k = \{z \in F : \|x - z\| \leq d + 1/k\}$  . وطبقاً لمثال تكون (٩ - ٥ و) هذه الفئات مغلقة في  $\mathbb{R}^p$  ومن الواضح أن  $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots \supseteq F_k \supseteq \dots$  وأنها محدودة وأن  $F_1$  مغلقة وأنها محدودة وأن  $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots \supseteq F_k \supseteq \dots$  .

\* هنري لبسيج (١٨٧٥ - ١٩٤١) معروف بأحسن عمله الرائد في النظرية الحديثة للتكامل الذي أخذ اسمه والذي هو أساس للتحليل الحاضر .

وبالإضافة إلى ذلك نجد من تعريف  $d$  ،  $F_k$  أن  $F_k$  غير خالية وينتج من نظرية تقاطع كانتور ١١ - ٤ أنه توجد نقطة  $y$  تنتمي لجميع  $F_k$  ،  $k \in \mathbb{N}$  وقد وضعنا تواتراً أن  $\|x - y\| = d$  أى أن  $y$  تحقق الاستنتاج ( انظر شكل ١١ - ٣ ) .  
وهو المطلوب إثباته

ونظرية مختلفة عن النظرية الآتية لها أهمية اعتبارية في نظرية الدوال التحليلية. وسنقرر النتيجة فقط عند  $p = 2$  وسنستخدم أفكاراً بديهية لمعرفة معنى كون فئة محاطة بمنحنى مغلق ( أى منحنى ليس له نهايتان ) .

١١ - ٧ نظرية الكونتور المحيط . بفرض أن  $F$  فئة محدودة ومغلقة في  $\mathbb{R}^2$  وبفرض أن  $G$  فئة مفتوحة تحتوى على  $F$  ، حينئذ يوجد منحنى مغلق  $C$  يقع بأكمله في  $G$  ويتركب من أقواس لعدد محدود من الدوائر بحيث أن  $F$  تكون محاطة بالمنحنى المغلق  $C$  .

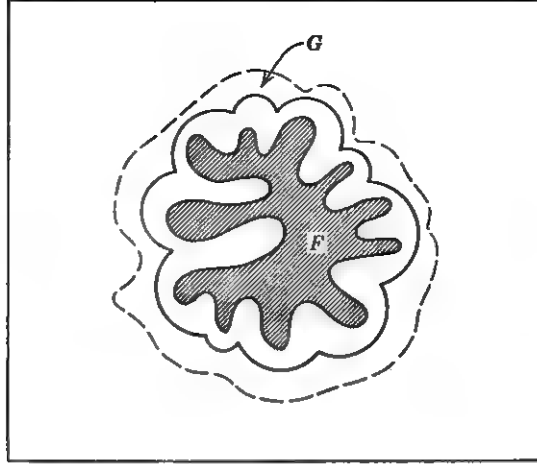


( شكل ١١ - ٣ )

برهان جزئى . إذا كانت  $x$  تنتمي إلى  $F \subseteq G$  فإنه يوجد عدد  $\delta(x) > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $\|y - x\| < \delta(x)$  فإن  $y$  تنتمي أيضاً إلى  $G$  . الآن نفرض

$$G(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y - x\| < \frac{1}{2} \delta(x)\}$$

لكل  $x$  في  $F$  . بما أن المجموعة  $\mathcal{G} = \{G(x) : x \in F\}$  تكون غطاء لفئة المدجة  $F$  فينتج أن الاتحاد لعدد محدود من الفئات في  $\mathcal{G}$  ، مثلاً  $G(x_1), \dots, G(x_k)$  يحتوى الفئة



(شكل ١١ - ٤)

المدجة  $F$  . باستخدام أقواس من الدوائر مراكزها  $x$  وأنصاف أقطارها  $\delta(x_i)$  نحصل على المنحنى المطلوب (انظر شكل ١١ - ٤) التركيب التفصيل للمنحنى سوف لا يغطي هنا .

### تعريفات :

١١ - (أ) وضح مباشرة من التعريف (أى بدون استخدام نظرية هاين - بوريل) أن الكرة المفتوحة المعطاة بواسطة  $\{(x, y): x^2 + y^2 < 1\}$  ليست مدجة في  $R^2$  .

١١ - (ب) أثبت مباشرة أن الفراغ الكلى  $R^2$  غير مدمج .

١١ - (ج) أثبت مباشرة أنه إذا كانت  $K$  مدجة في  $R^n$  ،  $F \subseteq K$  فئة مغلقة فإن  $F$  تكون مدجة في  $R^n$  .

١١ - (د) أثبت أنه إذا كانت  $K$  فئة جزئية مدجة من  $R^2$  فحينئذ تكون مدجة عند اعتبارها فئة جزئية من  $R$  .

١١ - (هـ) بتعديل المناقشة في مثال ١١ - ٢ (د) أثبت أن الفترة

$$J = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

مدجة في  $R^2$  .

١١ - (و) حدد مواقع الأماكن في برهان نظرية هاين بوريل التي استخدمت فيها الفروض بأن  $K$  محدودة ومغلقة .

١١ - (ز) أثبت نظرية تقاطع كانتور باختيار نقطة  $x_n$  من  $F_n$  ثم بتطبيق نظرية بولزانو - فيرستراس ١٠ - ٦ على الفئة  $\{x_n: n \in N\}$  .



١١ - (ح) إذا كانت  $F$  مغلقة في  $R^n$  وإذا كانت  $F \neq \emptyset$

$$d(x, F) = \inf \{ \|x - z\| : z \in F \} = 0$$

حينئذ تنتمي  $x$  إلى  $F$ .

١١ - (ط) هل نظرية أقرب نقطة في  $R$  تدل على أنه يوجد عدد حقيق موجب على سبيل

المحصر أقرب ما يمكن من الصفر ؟

١١ - (ي) إذا كانت  $F$  فئة مغلقة غير خالية في  $R^n$  وإذا كانت  $x \in F$  هل توجد

نقطة وحيدة من  $F$  بحيث تكون أقرب ما يمكن من  $x$  ؟

١١ - (ك) إذا كانت  $K$  فئة جزئية مدمجة من  $R^n$  ،  $x$  نقطة من  $R^n$  ، فحينئذ تكون

الفئة  $K_x = \{x + y : y \in K\}$  مدمجة أيضاً ( هذه الفئة  $K_x$  أحياناً تسمى إزاحة الفئة  $K$  بالنقطة  $x$  ).

١١ - (ل) تكون تقاطع فئتين مفتوحتين مدمجة إذا وإذا فقط كانت خالية . هل يمكن أن

يكون التقاطع لمجموعة لانهاية لفئات مفتوحة فئة مدمجة غير خالية ؟

١١ - (م) إذا كانت  $F$  فئة جزئية مدمجة من  $R^2$  ،  $G$  فئة مفتوحة تحتوي على  $F$  ،

حينئذ يوجد منحنى  $C$  مغلق كثير الأضلاع يقع بأكمله في  $G$  بحيث يحيط  $F$  .

١١ - (ن) بفرض  $\{H_n : n \in \mathbb{N}\}$  هي فئات جزئية مغلقة من  $R^n$  بخاصية أن فئة مثل

$H_n$  لا تحتوي على فئة مفتوحة غير خالية ( مثال ذلك ،  $H_n$  هي نقطة أو خط في  $R^2$  ) وبفرض

$G \neq \emptyset$  هي فئة مفتوحة وضوح :

(أ) إذا كانت  $x_1 \in G \setminus H_1$  فوضح أنه يوجد كرة مغلقة  $B_1$  مركزها  $x_1$  ، بحيث

$B_1 \subseteq G$  و  $H_1 \cap B_1 = \emptyset$  .

(ب) إذا كانت  $x_2 \in H_2$  تنتمي إلى داخل  $B_1$  ، فوضح أنه يوجد كرة مغلقة  $B_2$

مركزها  $x_2$  وبحيث أن  $B_2$  تكون محتواة في داخل  $B_1$  وأن  $H_2 \cap B_2 = \emptyset$  .

(ج) استمر في هذه العملية لتحصل على عائلة متداخلة لكرات مغلقة بحيث أن

$H_n \cap B_n = \emptyset$  . بنظرية تقاطع كانتور ١١ - ٤ توجد نقطة  $x_0$  مشتركة لجميع الكور

المغلقة  $B_n$  . استنتج أن  $x_0 \in G \setminus \bigcap H_n$  بحيث أن  $G$  لا يمكن تكون محتواة في  $\bigcup H_n$

هذه النتيجة على صورة تسمى غالباً بنظرية طبقة بير \* .

١١ - (س) خط في  $R^2$  هو فئة من نقط  $(x, y)$  التي تحقق معادلة على الصورة

\* رنيه لويس بير ( ١٨٧٤ - ١٩٣٢ ) كان أستاذاً في ديجون وقد بحث في نظرية الفئة

والتحليل الحقيقي .

$ax + by + c = 0$  حيث  $(a, b) \neq (0, 0)$  استخدم التمرين السابق لتوضيح أنه ليس اتحاد مجموعة عددية من الخطوط .

١١ - (ع) الفئة  $\mathcal{Q}$  لأعداد غير قياسية في  $R$  ليست اتحاداً لمائلة عدديّة لفئات مغلقة ، لا يوجد أحد منها بحيث يحتوى عل فئة مفتوحة غير خالية .

١١ - (ف) الفئة  $Q$  لأعداد قياسية ليست التقاطع لمجموعة عدديّة لفئات مفتوحة في  $R$  .

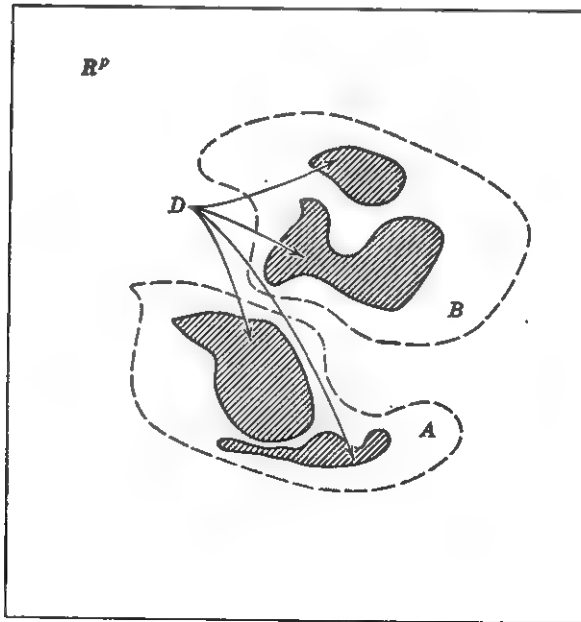
## الباب الثاني عشر — الفئات المتصلة :

سنقدم الآن مفهوم الفئة المتصلة التي سنستخدم من وقت لآخر فيما يلي :

١٢ - ١ تعريف . يقال لفئة جزئية  $D \subseteq R^p$  أنها غير متصلة إذا كان يوجد اثنان مفتوحتان  $A$  ،  $B$  بحيث أن  $A \cap D$  و  $B \cap D$  منفصلتان وغير خاليتين ولهما اتحاد  $D$ . في هذه الحالة يقال للزوج  $A$  و  $B$  بأنه يكون عدم اتصال أو قطع للاتحاد  $D$  يقال للفئة الجزئية التي لا تكون غير متصلة أنها متصلة ( أنظر شكل ١٢ - ١ ) .

١٢ - ٢ أمثلة (أ) الفئة  $N \subseteq R$  غير متصلة حيث يمكننا أخذ

$$B = \{x \in R : x > 3/2\} \text{ و } A = \{x \in R : x < 3/2\}$$



(شكل ١٢ - ١) فئة غير متصلة

(ب) الفئة  $H = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$  غير متصلة .

(ج) الفئة  $S$  المتكونة من جميع أعداد قياسية موجبة غير متصلة في  $\mathbb{R}$  حيث يمكننا

$$\text{أخذ } A = \{x \in \mathbb{R} : x < \sqrt{2}\} \text{ و } B = \{x \in \mathbb{R} : x > \sqrt{2}\}$$

(د) إذا كانت  $0 < c < 1$  حينئذ الفئات  $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq c\}$ ،  $B = \{x \in \mathbb{R} : x > c\}$

تشق فترة الوحدة  $I = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$  إلى فئات غير خالية غير متصلة باتحاد  $I$  لكن بما أن  $A$  ليست مفتوحة فإن هذا مثال لا يوضح أن  $I$  غير متصلة وفي الحقيقة سنوضح فيما يلي أن الفئة  $I$  متصلة .

١٢ - ٣ نظرية . فترة الوحدة المغلقة  $I = [0, 1]$  فترة جزئية متصلة من  $\mathbb{R}$  .

البرهان . سنبدأ بالتناقض ونفرض أن  $A$  ،  $B$  فئتان مفتوحتان يكونان عدم اتصال لفترة الوحدة  $I$  . أي أن  $A \cap I$  ،  $B \cap I$  فئتان محدودتان غير خاليتين وغير متصلتين واتحادهما هو  $I$  . بما أن كلا من  $A$  ،  $B$  مفتوحة فلا يمكن أن تتكون الفئات  $A \cap I$  ،  $B \cap I$  من نقطة واحدة فقط ( لماذا ؟ ) . لأجل التحديد نفرض أنه يوجد نقط  $a \in A$  ،  $b \in B$  بحيث أن  $0 < a < b < 1$  . باستخدام خاصية الملو ٦ - ٤ نأخذ  $c = \sup \{x \in A : x < b\}$  بحيث أن  $0 < c < 1$  . ومن ثم  $c \in A \cup B$  إذا كانت  $c \in A$  ، حينئذ  $c \neq b$  وبما أن  $A$  مفتوحة فيوجد نقطة  $a_1 \in A$  ،  $c < a_1$  بحيث أن الفترة  $[c, a_1]$  تكون محتواة في  $\{x \in A : x < b\}$  يتناقض لتعريف  $c$  . بالمثل إذا كانت  $c \in B$  حينئذ بما أن  $B$  مفتوحة فتوجد نقطة  $b_1 \in B$  ،  $b_1 < c$  بحيث أن الفترة  $[b_1, c]$  تكون محتواة في  $B \cap I$  يتناقض لتعريف  $c$  . ومن ثم الفرض بأن  $I$  غير متصلة يقودنا إلى تناقض ، وهو المطلوب إثباته .

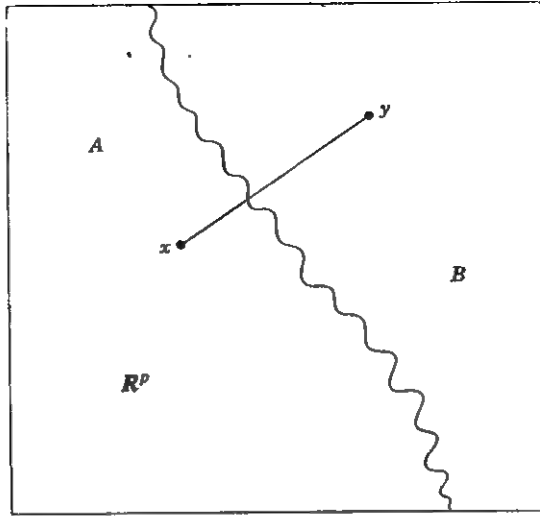
القارىء سيلاحظ أن نفس البرهان يمكن استخدامه لتوضيح أن الفترة المفتوحة  $(0, 1)$  تكون متصلة في  $\mathbb{R}$  .

١٢ - ٤ نظرية . الفراغ الشامل  $\mathbb{R}^p$  يكون متصلا .

البرهان . إذا لم يكن الفراغ متصلا ، فحينئذ توجد فئتان  $A$  ،  $B$  مفتوحتان غير خاليتين وغير متصلتين واتحادهما هو  $\mathbb{R}^p$  : ( أنظر شكل ١٢ و ٢ ) . نفرض أن  $x \in A$  ،  $y \in B$  واعتبر  $S$  هي قطعة من خط يصل  $x$  و  $y$  ، أي

$$S = \{x + t(y - x) : t \in I\}$$

نفرض  $A_1 = \{t \in \mathbb{R} : x + t(y - x) \in A\}$  ونفرض  $B_1 = \{t \in \mathbb{R} : x + t(y - x) \in B\}$  من السهل ملاحظه أن  $A_1$  و  $B_1$  فئتان جزئيتان غير خاليتين وغير متصلتين من  $\mathbb{R}$  وهذا يعطى عدم اتصال لفترة الوحدة  $I$  مما يخالف نظرية ١٢ - ٣ . وهو المطلوب إثباته



(شكل ١٢ - ٧)

١٢ - ٥ نتيجة . الفئتان الجزئيتان الوحيدتان من  $R^p$  والتي كلاهما مفتوحة ومغلقة هما  $R^p$  ،  $\emptyset$  .

البرهان . لأنه إذا كانت  $A$  مفتوحة ومغلقة في وقت واحد في  $R^p$  فحينئذ  $B = R^p \setminus A$  تكون أيضاً مفتوحة ومغلقة . وإذا كانت  $A$  غير خالية وليست كل  $R^p$  فحينئذ يكون الزوج  $A, B$  ، عدم اتصال من  $R^p$  وهذا يخالف النظرية . وهو المطلوب إثباته .

### الفئات المفتوحة المتصلة :

تلعب الفئات المتصلة دوراً هاماً وخاصاً في قطاعات معينة من التحليل . وباستخدام التعريف يكون من السهل تقرير النتيجة الآتية :

١٢ - ٦ مفترس . فئة جزئية مفتوحة من  $R^p$  تكون متصلة إذا وإذا فقط كانت بحيث لا يمكن التعبير عنها كاتحاد لفئتين مفتوحتين غير خاليتين وغير متصلتين .

يكون من المفيد أحياناً أن يكون لدينا تمييز آخر للفئات المتصلة المفتوحة . ولأجل إعطاء مشعل هذا التمييز سندخل بعض مصطلحات . إذا كانت  $x$  و  $y$  نقطتين في  $R^p$  فحينئذ يكون منحنى مضلع يصل  $x$  ،  $y$  هو فئة  $P$  التي نحصل عليها كاتحاد لعدد محدود لقطع خطية مرتبة  $(L_1, L_2, \dots, L_n)$  في  $R^p$  بحيث أن القطعة الخطية  $L_1$  يكون طرفها

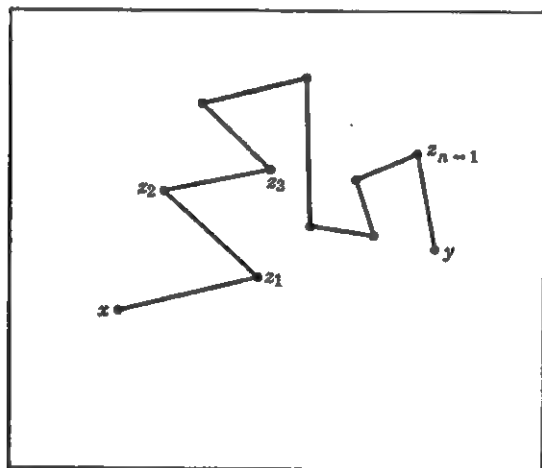
هما  $z_1$  و  $x$  ، ونهائتا القطعة الخطية  $L_2$  هما  $z_1, z_2, \dots$  والقطعة الخطية  $L_n$  يكون لها الطرفان  $z_{n-1}, y$  (انظر شكل ١٢ - ٣)

١٢ - ٧ نظرية . بفرض  $G$  فئة مفتوحة في  $R^p$  فإن  $G$  تكون متصلة إذا وإذا فقط كان أى زوج من النقطتين  $x$  و  $y$  في  $G$  بحيث يمكن اتصالهما بمنحنى مضلع يقع بأكمله في  $G$  .  
البرهان . نفرض أن  $G$  ليست متصلة وأن  $A$  قطع أو عدم اتصال في  $G$  .  
فإذا فرضنا أن  $x \in A \cap G$  ،  $y \in B \cap G$  ونفرض أن  $P = (L_1, L_2, \dots, L_n)$  هي منحنى مضلع يقع بأكمله في  $G$  ويصل  $x$  ،  $y$  . نفرض أن  $k$  هي أصغر عدد طبيعي بحيث ان الطرف  $z_{k-1}$  للقطعة الخطية  $L_k$  ينتمى إلى  $A \cap G$  والطرف  $z_k$  ينتمى إلى  $B \cap G$  (انظر شكل ١٢ - ٤) . إذا عرفنا  $A_1$  ،  $B_1$  بالتالي

$$A_1 = \{t \in \mathbb{R} : z_{k-1} + t(z_k - z_{k-1}) \in A \cap G\},$$

$$B_1 = \{t \in \mathbb{R} : z_{k-1} + t(z_k - z_{k-1}) \in B \cap G\}$$

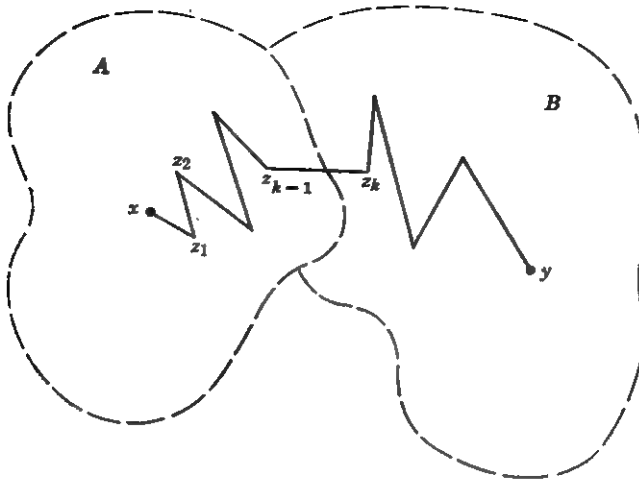
حينئذ يكون من السهل ملاحظة أن  $A_1$  و  $B_1$  تكونان فئتين جزئيتين مفتوحتين غير خاليتين وغير



(شكل ١٢ - ٣) منحنى مضلع

متصلتين من  $R$  . ومن ثم يكون الزوج  $A_1$  و  $B_1$  قطعاً لفترة الوحدة مما يخالف نظرية ١٢ - ٣ . لذلك إذا كانت  $G$  غير متصلة فيوجد نقطتان في  $G$  بحيث لا يمكن إصالحهما بمنحنى مضلع في  $G$  .

بعد ذلك نفرض أن  $G$  فئة متصلة مفتوحة في  $R^p$  وأن  $x$  تنتمى إلى  $G$  . ونفرض أن  $G_1$  هي الفئة الجزئية من  $G$  والتي تتكون من كل النقط في  $G$  التي يمكن وصلها بالنقطة  $x$  بمنحنى



(شكل ١٢ - ٤)

مضلع يقع بأكمله في  $G$  ، نفرض أن  $G_2$  تتكون من كل النقط في  $G$  والتي لا يمكن وصلها إلى  $x$  بواسطة منحني مضلع واقع في  $G$  . من الواضح أن  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$  . الفئة  $G_1$  ليست خالية حيث أنها تحتوي النقطة  $x$  . والآن سنوضح أن  $G_1$  مفتوحة في  $R^p$  . إذا كانت  $y$  تنتمي إلى  $G_1$  فينتج من حقيقة كون  $G$  مفتوحة أنه لعدد حقيقي ما  $r > 0$  ، قدل  $\|w - y\| < r$  إذن على أن  $w \in G$  . ومن تعريف  $G_1$  نجد أن النقطة  $y$  يمكن اتصالها بالنقطة  $x$  بواسطة منحني مضلع وبإضافة قطعة خطية من  $y$  إلى  $w$  ، نستنتج أن  $w$  تنتمي إلى  $G_1$  . ومن ثم تكون  $G_1$  فئة جزئية مفتوحة في  $R^p$  . بالمثل الفئة الجزئية  $G_2$  تكون مفتوحة في  $R^p$  . إذا كانت  $G_2$  ليست خالية حينئذ الفئتان  $G_1$  و  $G_2$  يكونان قطعاً أو عدم اتصال في  $G$  ما يخالف الفرض بأن  $G$  متصلة . وإذن  $G_2 = \emptyset$  وكل نقطة من  $G$  يمكن وصلها إلى  $x$  بمنحني مضلع واقع بأكمله في  $G$  . وهو المطلوب إثباته

### فئات متصلة في $R$ :

نهي هذا الباب بتوضيح أن الفئات الجزئية المتصلة في  $R$  تكون بالضبط الفترات ( انظر باب ٧ ) .

١٢ - ٨ نظرية . فئة جزئية  $R$  تكون متصلة إذا وإذا فقط كانت فترة .

برهان جزئي . البرهان المعطى في نظرية ١٢ - ٣ يمكن تعديله بسهولة لتوطيد الاتصال لفترة اختيارية غير خالية . سنترك التفاصيل للقارئ .

وبالعكس ، نفرض أن  $C \subseteq \mathbb{R}$  متصلة ونفرض أن  $C \neq \emptyset$  . نلاحظ أن  $C$  لها الخاصية التي نقول أنه إذا كانت  $b \in C$  و  $a < b$  ، فإن أي عدد  $c$  يحقق  $a < c < b$  يجب أن ينتمي أيضاً إلى  $C$  ، لأنه إذا كانت  $c \notin C$  فإن الفئتين

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x > c\} \quad \text{و} \quad A = \{x \in \mathbb{R} : x < c\}$$

يكونان قطعاً أو عدم اتصال في  $C$  .

(i) الآن نفرض أن  $C$  محدودة من أعلى ومحدودة من أسفل ونفرض  $a = \inf C$  ،  $b = \sup C$  سنوضح أن  $C$  يجب أن تأخذ إحدى الصور الأربع التالية :

$$[a, b], \quad [a, b), \quad (a, b], \quad (a, b)$$

وفي الحقيقة ، إذا كانت  $a \in C$  ،  $b \in C$  فقد رأينا حينئذ في البند السابق أن  $[a, b] \subseteq C$  والحقيقة بأن  $C \subseteq [a, b]$  تنتج من حقيقة كون  $a$  ،  $b$  هما الحد الأسفل والحد الأعلى على الترتيب للمقدار  $C$  .

إذا كانت  $a \in C$  لكن  $b \notin C$  نفرض أن  $b'$  أي عدد حيث  $a \leq b' < b$  . بما أن  $b = \sup C$  فإنه يجب وجود عنصر  $b'' \in C$  بحيث أن  $a \leq b' < b''$  . لذلك يجب أن ينتمي العنصر  $b'$  إلى  $C$  وبما أن  $b'$  أي عدد يحقق  $a \leq b' < b$  فنستنتج أن  $C = (a, b)$  . بالمثل إذا كان  $a \notin C$  لكن  $b \in C$  فنستنتج أن  $C = (a, b]$  بينما إذا كانت  $a \notin C$  ،  $b \notin C$  فإننا نستنتج أن  $C = (a, b)$  .

(ii) الآن نفرض أن  $C$  محدودة من أسفل وليست محدودة من أعلى ونفرض أن  $a = \inf C$  بحيث أن  $C \subseteq [a, +\infty)$  . إذا كانت  $a \in C$  وكانت  $x$  أي عدد حقيق حيث  $a \leq x$  حينئذ - بما أن  $C$  ليست محدودة من أعلى - فيوجد  $c \in C$  بحيث أن  $x \leq c$  ومن ثم ينتج من الخاصية السابقة أن  $x \in C$  . بما أن  $x$  أي عدد اختياري يحقق  $a \leq x$  فنستنتج أن  $C = [a, +\infty)$  .

بالمثل إذا كانت  $a \notin C$  فنستنتج أن  $C = (a, +\infty)$  .

(iii) إذا كانت  $C$  ليست محدودة من أسفل لكن محدودة من أعلى وإذا كانت  $b = \sup C$  حينئذ يوجد حالتان  $C = (-\infty, b)$  أو  $C = (-\infty, b]$  على حسب كون  $b \in C$  أو  $b \notin C$  .

(iv) أخيراً ، إذا كانت  $C$  ليست محدودة من أسفل وليست محدودة من أعلى حينئذ يكون لدينا الحالة  $C = (-\infty, +\infty)$  . وهو المطلوب إثباته .

## تمرينات :

١٢- (أ) إذا كانت  $A$  ،  $B$  فئتين جزئيتين متصلتين من  $R^n$  ، اعط أمثلة لتوضيح أن  $A \cup B$  ،  $A \cap B$  ،  $A \setminus B$  يمكن أن تكون إما متصلة أو غير متصلة .

١٢- (ب) إذا كانت  $C \subseteq R^n$  متصلة ،  $x$  نقطة تجمع من  $C$  فإن  $C \cup \{x\}$  تكون متصلة .

١٢- (ج) إذا كانت  $C \subseteq R^n$  متصلة ، وضع أن أقفالها  $C^-$  (انظر تمرين ٩ - ل) متصل أيضاً .

١٢- (د) فئة  $D \subseteq R^n$  تكون غير متصلة إذا وإذا فقط كانت  $D = E \cup F$  حيث  $E, F$  فئتان غير خاليتين وحيث  $E \cap F^- = \emptyset$  ،  $E^- \cap F = \emptyset$

١٢- (هـ) إذا كانت  $K \subseteq R^n$  محدبة ( انظر تمرين ٨ - ف ) فإن  $K$  متصلة .

١٢- (و) الفئة لكانتور  $F$  غير متصلة باتساع . وضع أنه إذا كانت  $x, y \in F$  ،  $x \neq y$  فإن  $x, y \in F$  حيث لا يوجد اتصال  $B$  و  $A$  للفئة  $F$  بحيث  $x \in A$  ،  $y \in B$  .

١٢- (ز) إذا كانت  $C_1, C_2$  فئتين جزئيتين متصلتين من  $R$  فحينئذ يكون حاصل الضرب  $C_1 \times C_2$  فئة جزئية متصلة من  $R^2$  .

١٢- (ح) أثبت أن الفئة

$$A = \{(x, y) \in R^2 : 0 < y \leq x^2, x \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$$

تكون متصلة في  $R^2$  . لكن لا يوجد منحنى مضلع يقع بأكمله في  $A$  بحيث يصل النقطة  $(0,0)$  إلى النقط الأخرى في الفئة

١٢- (ط) أثبت أن

$$S = \left\{ (x, y) \in R^2 : y = \sin \frac{1}{x}, x \neq 0 \right\} \cup \left\{ (0, y) : -1 \leq y \leq 1 \right\}$$

متصلة في  $R^2$  . لكن ليس ممكناً دائماً اتصال نقطتين في  $S$  بمنحنى مضلع ( أو أى منحنى مستمر ) واقع بأكمله في  $S$  .

## الباب الثالث عشر — نظام الاعداد المركبة :

نظام العدد الحقيقي الموجود قبل ذلك يحمل الأمر سهلاً لأن نتذكر نظام العدد المركب وسنشير في هذا الباب إلى كيفية تركيب الحقل المركب (٥) .

(٥) هذا الباب يمكن حذفه عند أول قراءة .



كما رأينا سابقاً نظام العدد الحقيقي هو حقل الذي يحقق خواص إضافية معينة . في باب ٨ كوننا الفراغ الكارتيزي  $R^p$  وأدخلنا بعض العمليات الجبرية  $p$ -طية لحاصل الضرب الكارتيزي للفراغ  $R$  . لكن لم نشكل  $R^p$  إلى حقل . وسيظهر مما يشير الدهشة أنه ليس ممكناً أن نعرف حاصل ضرب الذي يحمل  $R^p$  ،  $p \geq 3$  حقلاً . وبالرغم من ذلك نجد من الممكن أن نعرف عملية حاصل ضرب في  $R \times R$  التي تشكل هذه الفئة إلى حقل . والآن سنورد العمليات المطلوبة .

١٢ - ١ تعريف . نظام العدد المركب  $C$  يتكون من أزواج مرتبة  $(x, y)$  لأعداد حقيقية بعملية الجمع المعرفة بما يلي

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

وعملية حاصل الضرب المعرفة بما يلي

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$$

أي إن نظام العدد المركب  $C$  له نفس العناصر مثل فراغ البعدين  $R^2$  . وله نفس عملية الجمع ولكنه يملك حاصل ضرب بينياً  $R^2$  ليس له حاصل ضرب . وإذن - باعتبارها نقاط فقط - نجد أن  $C$  و  $R^2$  متساويان حيث لهما نفس العناصر ولكن هما من وجهة نظر الجبر ليسا نفس الشيء لأنهما يقنيان عمليات مختلفة .

عنصر من  $C$  يسمى عدد مركب وغالباً يرمز له بحرف مفرد مثل  $z$  . وإذا كانت  $z = (x, y)$  حينئذ نشير إلى العدد الحقيقي  $x$  بالجزء الحقيقي من  $z$  وإلى  $y$  بالجزء التخيلي من  $z$  وبالرموز

$$x = \text{Re } z, \quad y = \text{Im } z$$

العدد المركب  $\bar{z} = (x, -y)$  يسمى المرافق للعدد  $z = (x, y)$  .

حقيقة هامة هي أن تعريف حاصل الجمع وحاصل الضرب المعطى سابقاً لعناصر تشكلها إلى « حقل » بمعنى الجبر المجرد . أي إنها تحقق الخواص الجبرية المسجلة في ٤ - ١ بشرط إبدال العدد 0 في  $(A_3)$  بالزوج  $(0, 0)$  ، العنصر المناظر إلى  $-a$  في  $(A_4)$  هو الزوج  $(-x, -y)$  وإبدال العدد 1 في  $(M_3)$  بالزوج  $(1, 0)$  والعدد المناظر إلى  $1/a$  هو الزوج

$$\left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

حيث  $(x, y) \neq (0, 0)$  .

نجد أحيانا من المناسب أن نصلح على الرموز في باب ٨ ونكتب

$$az = a(x, y) = (ax, ay)$$

حيث  $a$  هو العدد الحقيقي ،  $z = (x, y)$  يكون في  $C$  . يتضح من هذا الرمز أن كل عنصر في  $C$  له تمثيل وحيد في صورة جمع لحاصل ضرب عدد حقيقى  $(1, 0)$  وحاصل ضرب عدد حقيقى  $(0, 1)$  . أى إنه يمكننا أن نكتب

$$z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

بما أن العنصر  $(1, 0)$  هو العنصر المحايد في  $C$  فن الطبيعي أن نرمز له بالرمز 1 (أولا نكتبها مطلقاً إذا كانت معامل ) . ولأجل الاختصار نجد من المناسب أن ندخل رمزا يدل على  $(0, 1)$  ،  $i$  هو الاختيار المناسب .

وبهذا الرمز ، نكتب

$$z = (x, y) = x + iy$$

بالإضافة إلى ذلك يكون عندنا

$$\bar{z} = (x, -y) = x - iy$$

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

بتعريف  $i^2 = -1$  أى إنه في  $C$  تكون معادلة الدرجة الثانية

$$z^2 + 1 = 0$$

لها حل . السبب التاريخي لتطوير نظام العدد المركب كان محصولا على نظام للأعداد التى فيه يكون لكل معادلة الدرجة الثانية حل . وقد تحقق أن ليس لكل معادلة بمعاملات حقيقية حل حقيقى ولذلك ابتكرت الأعداد المركبة لعلاج هذا النقص . وهناك حقيقة معروفة وهى أن ليس فقط أن الأعداد المركبة تكفى لإنتاج حلول لكل معادلة الدرجة الثانية بمعاملات حقيقية ولكن أيضاً تكفى الأعداد المركبة لضمان الحلول لأى معادلة كثيرة الحدود بدرجة اختيارية وبمعاملات يمكن أن تكون أعداد مركبة . هذه النتيجة تسمى بالنظرية الأساسية في الجبر وقد برهنت لأول مرة بواسطة جاوس العظيم (\*) في عام ١٧٩٩ .

(\*) كارل فريدريش جاوس ( ١٧٧٧ - ١٨٥٥ ) وكان الابن العظيم لعامل يومى ، وكان واحدا من أعظم الرياضيين ولكن أيضا يفكر بعمله في الفلك والطبيعة والمساحة التطبيقية . وقد أصبح استاذاً ومديراً للمرصد في جيتجن بالمانيا الغربية .

مع أن  $C$  لا يمكن أن تغطي الخواص المرتبة التي بحثت في الباب الخامس ، فن  
 السهل أن يهبطها بالقياس وبالتركيب التوبولوجي في الباب الثامن والباب التاسع لأنه  
 إذا كانت  $z = (x, y)$  تنتمي إلى  $C$  فنعرف القيمة المطلقة للمقدار  $z$  بأنه

$$|z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

ويرى بسهولة أن القيمة المطلقة المعرفة حالياً لها الخواص الآتية

$$|z| \geq 0 \quad (i)$$

$$z = 0 \quad \text{إذا و} \quad |z| = 0 \quad (ii)$$

$$|wz| = |w| |z| \quad (iii)$$

$$||w| \leq |w \pm z| \leq |w| + |z| \quad (iv)$$

ويلاحظ أن القيمة المطلقة للمدد المركب  $z = (x, y)$  هي بالضبط نفس العمود المنصر  
 $(x, y)$  في  $R^2$  . لذلك تكون جميع الخواص التوبولوجية للفراغات الكارتيذية التي قدمت  
 ودرست في أبواب ٩ إلى ١٢ هي ذات المعنى وصحيحة لنظام المدد المركب  $C$  . وبوجه خاص ،  
 مدلولات الفئات المفتوحة والمتعلقة في  $C$  هي تماماً اللازمة للفراغ الكارتيذي  $R^2$  .

وبالإضافة إلى ذلك تطبق نظرية بولزانو - فيرستراس ١٠ - ٩ ونظرية هاين -  
 بوريل ١١ - ٣ ونتائجها أيضاً في  $C$  وأيضاً تطبق نظرية ١٢ - ٧ .

القارئ يجب أن يحفظ هذه الملاحظات الذاكرة أثناء دراسته للجزء الباقي من هذا الكتاب .  
 وسلاحظ أن كل المادة التالية التي تستخدم للفراغات الكارتيذية بيعد أكثر من واحد  
 تستعمل على حد سواء لنظام المدد المركب . أي إن معظم النتائج التي سيحصل عليها والمتعلقة  
 بالمتباينات والدوال المستمرة والمشتقات والتكاملات والمتسلسلات اللانهائية تكون أيضاً  
 صحيحة لنظام المدد المركب  $C$  بدون تغيير إما في النص أو في البرهان . والاستثناءات  
 الوحيدة في هذا التقرير هي تلك الخواص التي أسست على الخواص المرتبة للفراغ  $R$  .

وهذا المعنى يكون التحليل المركب حالة خاصة للتحليل الحقيقي ، لكن يوجد عدد  
 من الملامح الحديثة الهامة والعميقة لدراسة الدوال الهولومورفية التي ليس لها جزء مقابل  
 في مملكة التحليل الحقيقي . وإذن ستجمع جزئياً المظاهر السطحية للتحليل المركب في الجزء  
 الذي سنقدمه .

## تعريفات :

١٣ - (أ) وضع أن المدد المركب  $iz$  يحصل عليه من  $z$  بدوران  $\pi/2$  زاوية نصف  
 قطرية في عكس اتجاه عقارب الساعة ( $90^\circ$ ) حول نقطة الأصل .

١٤- (ب) إذا كانت  $c = (\cos \theta, \sin \theta) = \cos \theta + i \sin \theta$  فحينئذ العدد  $cz$  يمكن الحصول عليه من  $z$  بدوران  $\theta$  زاوية نصف قطرية ضد عقارب الساعة حول نقطة الأصل .

١٣- (ج) صف العلاقة الهندسية بين الأعداد المركبة  $z$  ،  $az + b$  حيث  $a \neq 0$  ووضح أن الراسم المعرف للـ المركب  $z \in C$  بواسطة  $f(z) = az + b$  ينقل دوائر إلى دوائر وخطوط إلى خطوط .

١٣- (د) صف العلاقات الهندسية بين الأعداد المركبة  $z$  ،  $1/z$  حيث  $z \neq 0$  . وضح أن الرواسم المعرفة بواسطة  $g(z) = \bar{z}$  تنقل دوائر إلى دوائر وخطوط إلى خطوط . أى دوائر وخطوط تترك ثابتة كما هي بالرأس  $g$  ؟

١٣- (هـ) وضح أن الرواسم المكسية المعرفة بواسطة  $h(z) = 1/z$  تنقل دوائر وخطوط إلى دوائر وخطوط . أى دوائر تنقل إلى خطوط ؟ - أى خطوط تنقل إلى دوائر ؟ افحص الصور تحت  $h$  للخطوط الرأسية المعطاة بالمعادلة  $\text{Re } z = \text{ثابت}$  ، والخطوط الأفقية ثابت  $\text{Im } z =$  ، الدوائر  $|z| = \text{ثابت}$  .

١٣- (و) افحص الصفة المميزة الهندسية للرواسم المعرفة بواسطة  $g(z) = z^2$  حدد ما إذا كان الراسم  $g$  هو واحد إلى واحد وما إذا كان الراسم  $g$  ينقل  $C$  إلى جميع  $C$  . افحص الصور تحت  $g$  للخطوط

$$\text{Re } z = \text{ثابت} \text{ و } \text{Im } z = \text{ثابت}$$

$$\text{والدوائر } |z| = \text{ثابت} .$$

## تقارب

تمدنا المادة العلمية في الفصلين السابقين بقدر كاف من الفهم لنظام العدد الحقيقي والفراغات الكارتيزية . والآن بما أنه قد وضعت هذه الأساسيات التوبولوجية والجبرية فنصبح مستعدين لتتبع أسئلة ذات طبيعة تحليلية أكثر وسنبداً بدراسة تقارب المتتابعات وبمض هذه النتائج في هذا الفصل ربما تكون معروفة للقارئ من مناهج أخرى في التحليل ولكن يقصد بالتمثيل المعطى هنا بأن يكون أكثر عمقاً وبأن يعطى نتائج معينة أكثر عمقاً من التي نوقشت عادة في المناهج السابقة .

أولاً سنقدم معنى التقارب المتتابة التي عناصرها في  $R^p$  ونقر بعض نتائج أولية ( لكن مفيدة ) عن المتتابعات التقاربية . وحينئذ سنقدم بعض معايير هامة للتقارب . وبعد ذلك ندرس التقارب والتقارب المنتظم لمتتابعات الدوال وبعد باب مختصر عن النهاية العليا سنلحق باباً أخيراً . ومع إنه شيق يمكن حذفه بدون فقدان الاستمرار حيث النتائج سوف لا تستخدم فيما بعد .

بسبب التحديدات الخطية اللازمة في كتابنا فقد قررنا أن نتبع هذا الفصل بدراسة عن الاتصال ، التفاضل والتكامل وهذا له وجهة نظر غير موفقة لتأجيل تمثيلاً تاماً للمتسلسلات وقتاً كافياً ويشجع المعلم على إعطاء مقدمة مختصرة على الأقل للمتسلسلات أثناء هذا الفصل أو يمكنه الانتقال مباشرة للجزء الأول من الفصل الرابع بعد باب ١٦ . إذا كان يفضل إجراء ذلك .

### الباب الرابع عشر — مقدمة إلى المتتابعات :

مع أن نظرية التقارب يمكن تمثيلها على مستوى تجريدي جداً ، فإننا نفضل مناقشة المتتابعات في فراغات كارتيزية  $R^p$  منتهين لحالة الخط الحقيقي . ويجب على القارئ أن يفسر الأفكار برسم أشكال توضيحية في  $R$  و  $R^2$  .

١٤ - ١ تعريف . إذا كانت  $S$  فئة ما ، متتابعة في  $S$  هي دالة على الفئة  $N = \{1, 2, \dots\}$  لأعداد طبيعية والتي مداها يكون في  $S$  . وبوجه خاص ، تكون متتابعة في  $R^p$  دالة نطاقها في  $N$  ومداها يكون محتوياً في  $R^p$  .

وبعبارة أخرى تخصص ، متتابعة في  $R^p$  لكل عدد طبيعي  $n = 1, 2, \dots, a$  عنصراً محدوداً وحيداً من  $R^p$  . وتقليدياً يشار للعنصر من  $R^p$  الذي يخص لعدد طبيعي  $n$  برمز مثل  $x_n$  ، ومع أن هذه الدلالة تقاير التي تستعمل لمعظم الدوال سوف نتمسك بهذا الرمز التقليدي [ لكي يكون مطابقاً لرمز استخدم سابقاً ، إذا كانت  $X: N \rightarrow R^p$  متتابعة ، فقيمة  $X$  عند  $n \in N$  يجب أن يرمز لها بالرمز  $X(n)$  الذي هو أفضل من الرمز  $x_n$  ] .

بينما نقبل الرمز التقليدي نريد أيضاً أن نميز بين الدالة  $X$  وبين قيمها  $X(n) = x_n$  . ومن ثم عندما يرمز لعناصر المتتابعة ( أى قيم الدالة ) بالرمز  $x_n$  سنشير للدالة بالدلالة  $X = (x_n : n \in N)$  أو  $X = (x_n)$  .

ونستعمل أنوعاً للدلالة على أن الترتيب في  $N$  المنتج بهذا مسألة هامة . وإذن فنحن نميز رمزياً بين المتتابعة  $X = (x_n : n \in N)$  والفئة  $\{x_n : n \in N\}$  لقيم هذه المتتابعة . في تعريف متتابعات ندون غالباً قائمة مرتبة لعناصر المتتابعة ونقف عندما تكون قاعدة التكوين واضحة . أى إنه يمكن أن نكتب

$$(2, 4, 6, 8, \dots)$$

للمتتابعة لأعداد زوجية صحيحة . وطريقة أكثر كفاية وتمثيلاً هي تعيين صيغة للمعد العام في المتتابعة ، مثل

$$(2n : n \in N)$$

وفي التطبيق العمل يكون من المناسب غالباً تحديد القيمة  $x_1$  وطريقة الحصول على  $x_{n+1}$  ،  $n \geq 1$  عندما تكون  $x_n$  معروفة . ومع ذلك وهذا أكثر تعميماً يمكن أن نحدد  $x_2$  وقاعدة للحصول على  $x_{n+1}$  من  $x_1, x_2, \dots, x_n$  . وسنشير إلى كل من هاتين الطريقتين بالتعاريف الحثية للمتتابعة . وهذه الطريقة يمكننا تعريف المتتابعة لأعداد طبيعية زوجية بالترتيب

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = x_n + 2, \quad n \geq 1$$

أو بالترتيب ( يظهر أكثر تعقيداً )

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = x_n + x_1, \quad n \geq 1$$

وواضح أن طرقاً أخرى كثيرة للترتيب هذه المتتابعة ممكنة .

والآن سنقدم بعض الطرق لترتيب متتابعات جديدة من المتتابعات المعطاة .

١٤ - تعريف . إذا كانت  $X = (x_n)$  و  $Y = (y_n)$  متابعتين في  $R^p$  ، حينئذ نعرف حاصل جمعهما بأنه المتتابعة  $X + Y = (x_n + y_n)$  في  $R^p$  ، والفرق بينهما هو المتتابعة  $X - Y = (x_n - y_n)$  وحاصل ضربهما العددي هو المتتابعة  $X \cdot Y = (x_n \cdot y_n)$

في  $R$  والتي يمكن الحصول عليها بأخذ حاصل الضرب العدي للحدود المتناظرة وإذا كانت  $X = (x_n)$  متتابعة في  $R$  وإذا كانت  $Y = (y_n)$  متتابعة في  $R^p$  فنعرّف حاصل ضرب المتتابعة  $X$  والمتتابعة  $Y$  بأنه المتتابعة في  $R^p$  ويشار إليها بالمقدار  $XY = (x_n y_n)$  أو إذا كانت  $c \in R$  ،  $X = (x_n)$  فنعرّف  $cX = (cx_n)$  . وأخيراً إذا كانت  $Y = (y_n)$  متتابعة في  $R$  حيث  $y_n \neq 0$  فيمكننا تعريف خارج القسمة لمتتابعة  $X = (x_n)$  في  $R^p$  على  $Y$  بأنه المتتابعة  $X/Y = (x_n/y_n)$  . مثال ذلك ، إذا كانت  $X$  و  $Y$  متابعتين في  $R$  معطيتين بواسطة

$$X = (2, 4, 6, \dots, 2n, \dots), \quad Y = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$$

حينئذ يكون لدينا

$$X + Y = \left(3, \frac{9}{2}, \frac{19}{3}, \dots, \frac{2n^2 + 1}{n}, \dots\right),$$

$$X - Y = \left(1, \frac{7}{2}, \frac{17}{3}, \dots, \frac{2n^2 - 1}{n}, \dots\right),$$

$$XY = (2, 2, 2, \dots, 2, \dots),$$

$$3X = (6, 12, 18, \dots, 6n, \dots),$$

$$\frac{X}{Y} = (2, 8, 18, \dots, 2n^2, \dots).$$

بالمثل ، إذا كانت  $Z$  تدل على المتتابعة في  $R$  والمعطاة بواسطة

$$Z = \left(1, 0, 1, \dots, \frac{1 - (-1)^n}{2}, \dots\right)$$

حينئذ فقد عرفنا  $X + Z$  ،  $X - Z$  ،  $XZ$  لكن  $Z/X$  لا تعرف ، حيث إن بعض العناصر في  $Z$  أصفار .

الآن نأتى إلى مفهوم النهاية للمتتابعة .

١٤ - ٣ تعريف . بفرض  $X = (x_n)$  متتابعة في  $R^p$  . يقال للعنصر  $x$  من  $R^p$  إنه نهاية  $X$  إذا كان يوجد لكل جوار  $V$  للعنصر  $x$  عدد طبيعي  $K_V$  بحيث إنه لكل  $n \geq K_V$  ، حينئذ  $x_n$  تنتمي إلى  $V$  . إذا كانت  $x$  هي نهاية  $X$  ، فنقول أيضاً إن  $X$  تتقارب إلى  $x$  . إذا كانت المتتابعة لها نهاية فنقول إن المتتابعة تقاربية . إذا كانت المتتابعة ليس لها نهاية فنقول إنها تباعدية .

المدلول  $K_V$  يستخدم للدلالة على أن اختيار  $K$  يتوقف على  $V$  . من الواضح أن جيرة صغيرة  $V$  ستطلب عادة قيمة كبيرة من  $K_V$  لكن يضمن أن  $x_n \in V$  لكل  $n \geq K_V$  .

قد عرفنا النهاية لمتابعة  $X = (x_n)$  بدلالة الجبريات والمتاخمات . من المناسب غالباً أن نستخدم العمود في  $R^p$  لإعطاء تعريف مكافئ الذي سنذكره الآن كنظرية .

١٤ - ٤ نظرية . بفرض  $X = (x_n)$  هي متتابعة في  $R^p$  فإن عنصراً  $x$  للمقدار  $R^p$  يكون نهاية  $X$  إذا وإذا فقط كان يوجد لكل  $\varepsilon > 0$  عدد طبيعي  $K(\varepsilon)$  بحيث إنه لكل  $n \geq K(\varepsilon)$  فإن  $\|x_n - x\| < \varepsilon$  .

البرهان : نفرض أن  $x$  هي نهاية المتتابعة  $X$  طبقاً للتعريف ١٤ - ٣ . الآن نفرض  $0 < \varepsilon$  ونعتبر الكرة المفتوحة  $V(\varepsilon) = \{y \in R^p : \|y - x\| < \varepsilon\}$  التي هي جوار  $x$  يوجد بتعريف ١٤ - ٣ عدد طبيعي  $K_{V(\varepsilon)}$  بحيث إنه إذا كانت  $n \geq K_{V(\varepsilon)}$  فإن  $x_n \in V(\varepsilon)$  . ومن ثم إذا كانت  $n \geq K_{V(\varepsilon)}$  فإن  $\|x_n - x\| < \varepsilon$  وهذا يثبت أن الخاصية المنصوصة تكون صحيحة عندما تكون  $x$  نهاية  $X$  .

وبالعكس ، نفرض أن الخاصية في النظرية صحيحة لكل  $\varepsilon > 0$  ، يجب أن نثبت أن التعريف ١٤ - ٣ يكون متحققاً . ولإثبات هذا نفرض أن  $V$  هي أى جوار للعنصر  $x$  فحينئذ يوجد عدد  $\varepsilon > 0$  بحيث إن الكرة المفتوحة  $V(\varepsilon)$  التي مركزها  $x$  ونصف قطرها  $\varepsilon$  تكون محتوية في  $V$  . وطبقاً للخاصية في النظرية ، يوجد عدد طبيعي  $K(\varepsilon)$  بحيث إنه إذا كانت  $n \geq K(\varepsilon)$  فإن  $\|x_n - x\| < \varepsilon$  . وبصورة مختلفة نجد أنه إذا كانت  $n \geq K(\varepsilon)$  فحينئذ  $x_n \in V(\varepsilon)$  ومن ثم  $x_n \in V$  وتحقق المتطلبات في تعريف ١٤ - ٣ . وهو المطلوب إثباته

١٤ - ٥ انفرادية النهاية . يكون لمتابعة في  $R^p$  نهاية واحدة على الأكثر .

البرهان . نفرض - على العكس - أن  $x''$  و  $x'$  هما نهايتا  $X = (x_n)$  وأن  $x'' \neq x'$  ونفرض أن  $V'$  و  $V''$  هما جواران غير متصلين للمقدارين  $x''$  و  $x'$  على الترتيب ونفرض أن  $K'$  و  $K''$  هما عددان طبيعيان بحيث إنه إذا كانت  $n \geq K'$  فإن  $x_n \in V'$  وإذا كانت  $n \geq K''$  فإن  $x_n \in V''$  . ونفرض  $K = \sup \{K', K''\}$  بحيث إن كلا من  $x_k \in V''$  ،  $x_k \in V'$  . نستنتج أن  $x_k$  تنتمي إلى  $V' \cap V''$  مما يخالف التكوين وهو كون  $V'$  ،  $V''$  غير متصلتين . وهو المطلوب إثباته

عندما يكون لمتابعة  $X = (x_n)$  في  $R^p$  نهاية  $x$  فغالباً نكتب

$$x = \lim X, \quad \text{أو} \quad x = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)$$

أو أحياناً نستعمل الرمز  $x_n \rightarrow x$  .



نقول إن المتابعة  $X = (x_n)$  في  $R^p$  محدودة إذا كان يوجد  $M > 0$  بحيث إن

$$\|x_n\| < M \quad \text{لجميع } n \in N.$$

١٤-٦ مفترض . متتابعة تقاربية في  $R^p$  تكون محدودة .

البرهان . نفرض أن  $x = \lim (x_n)$  ونفرض  $\varepsilon = 1$  حسب نظرية ١٤-٤ . يوجد عدد طبيعي  $K = K(1)$  بحيث أنه إذا كانت  $n \geq K$  يكون  $\|x_n - x\| \leq 1$  . وباستخدام متباينة المثلث نستنتج أنه إذا كانت  $n \geq K$  فإن  $\|x_n\| \leq \|x\| + 1$  . إذا وضعنا  $M = \sup \{\|x_1\|, \|x_2\|, \dots, \|x_{K-1}\|, \|x\| + 1\}$  فإن  $\|x_n\| \leq M$  لكل  $n \in N$  وهو المطلوب إثباته .

ربما يوجد شك من أن نظرية التقارب للمتتابعات في  $R^p$  تكون أكثر تعقيداً عنها في  $R$  لكن ليست هذه هي الحالة ( باستثناء مواد رمزية ) . وفي الحقيقة النتيجة القادمة هامة في توضيح أن الاستفسارات عن التقارب في  $R^p$  يمكن اختزالها إلى استفسارات مماثلة في  $R$  لكل من متتابعات الاحداثى .

قبل استعمال هذه النتيجة سنستعيد أن عنصراً مثالياً  $x$  في  $R^p$  يكون مثلاً في نمط الاحداثى بواسطة « طية -  $p$  » .

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_p).$$

ومن ثم كل عنصر في المتابعة  $(x_n)$  في  $R^p$  له تمثيل مشابه ، أى إن

$$x_n = (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{pn})$$

وبهذه الطريقة تولد  $(x_n)$  ،  $p$  متتابعة لأعداد حقيقية هي  $(x_{1n}), (x_{2n}), \dots, (x_{pn})$  . والآن سنوضح أن تقارب المتابعة  $(x_n)$  هو صورة ممكنة لتقارب هذه  $p$  من متتابعات الاحداثيات .

١٤-٧ نظرية . المتابعة  $(x_n)$  في  $R^p$  حيث

$$(14.1) \quad x_n = (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{pn}), \quad n \in N$$

تتقارب إلى عنصر  $y = (y_1, y_2, \dots, y_p)$  إذا وإذا فقط كانت المتتابعات المناظرة  $p$  لأعداد حقيقية

$$(x_{1n}), (x_{2n}), \dots, (x_{pn})$$

تتقارب إلى  $y_1, y_2, \dots, y_p$  على الترتيب .

البرهان . إذا كانت  $x_n \rightarrow y$  فإن  $\|x_n - y\| < \varepsilon$  عند  $n \geq K(\varepsilon)$  . وحسب

نظرية ٨-١٠ نجد أن لكل  $j = 1, 2, \dots, p$

يكون لدينا  $|x_{jn} - y_j| \leq \|x_n - y\| < \varepsilon$  لكل  $n \geq K(\varepsilon)$

ومن ثم كل من هذه الـ  $p$  من متابعات الاحداثيات يجب أن تتقارب إلى العدد الحقيقي المناظر .

وبالعكس ، نفرض أن المتابعات في ( ١٤ - ١ ) تتقارب إلى  $y_j$  عند  $j = 1, 2, \dots, p$ . وبأخذ  $\varepsilon > 0$  فإنه يوجد عدد طبيعي  $M(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $n \geq M(3)$  فإن

$$j = 1, 2, \dots, p. \quad \text{عند} \quad |x_{jn} - y_j| < \varepsilon/\sqrt{p}$$

ومن هذا ينتج أنه عندما  $n \geq M(\varepsilon)$  حينئذ

$$\|x_n - y\|^2 = \sum_{j=1}^p |x_{jn} - y_j|^2 \leq \varepsilon^2$$

أي أن المتابعة  $(x_n)$  تتقارب إلى  $y$  . وهو المطلوب إثباته

### بعض أمثلة :

الآن سنعرض بعض الأمثلة لإثبات تقارب متتابعة مستخدمين فقط الطرق المتاحة الآن . ومن الملاحظ أنه لكي نستمر يجب أن نضمن قيمة النهاية بفحص سابق للمتتابعة . وتشمل كل الأمثلة التي ستعرض فيما بعد بعض مهارات ونماذج ولكن النتائج التي تحصل عليها ستكون مفيدة لنا في إثبات ( بأقل عمليات تصرفية ) التقارب لمتابعات أخرى . لذلك سنكون مهتمين بالنتائج بنفس درجة اهتمامنا بالطرق .

١٤ - ٨ أمثلة . ( أ ) بفرض  $(x_n)$  هي المتتابعة في  $R$  حيث  $x_n = 1/n$  . فسوضح أن نها  $0 = (1/n)$  . ولإثبات هذا نفرض أن  $\varepsilon > 0$  ، وطبقاً للنتيجة ٦-٧ (ب) (خاصية أرخميدس) يوجد عدد طبيعي  $K(\varepsilon)$  بحيث أن  $1/K(\varepsilon) < \varepsilon$  حينئذ إذا كانت  $n \geq K(\varepsilon)$  فيكون لدينا

$$0 < x_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K(\varepsilon)} < \varepsilon$$

ويترتب على ذلك أن  $|x_n - 0| < \varepsilon$  عند  $n \geq K(\varepsilon)$  . وبما أن  $\varepsilon > 0$  اختيارية فهذا يبرهن أن نهاية  $0 = (1/n)$  .

(ب) إذا فرضنا أن  $a > 0$  ونعتبر المتتابعة  $X = [1/(1+na)]$  في  $R$  . فسوضح أن نها  $0 = X$  . أولاً نلاحظ أن

$$0 < \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na}$$

نريد الحد السائد أن يكون أقل من القيمة المعطاة  $\varepsilon > 0$  حيث  $n$  كبيرة كبراً كافياً .  
 باستخدام نتيجة ٧-٦ (ب) ثانياً نجد أنه يوجد عدد طبيعي  $K(\varepsilon)$  بحيث أن  $1/K(\varepsilon) < a\varepsilon$  .  
 حينئذ إذا كانت  $n \geq K(\varepsilon)$  فيكون لدينا .

$$0 < \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na} \leq \frac{1}{K(\varepsilon)a} < \varepsilon$$

ومن ذلك ينتج أن  $|1/(1+na) - 0| < \varepsilon$  عند  $n \geq K(\varepsilon)$  . حيث  $\varepsilon > 0$  اختيارية  
 فهذا يوضح أن  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/(1+na) = 0$  .

(ج) افرض  $b \in \mathbb{R}$  تحقق  $0 < b < 1$  واعتبر المتتالية  $(b^n)$  . سنوضح أن  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} b^n = 0$  ولإثبات هذا ، يكون من المناسب أن نكتب  $b$  في الصورة

$$b = \frac{1}{1+a}$$

حيث  $a > 0$  ونستخدم متباينة برنولي  $(1+a)^n \geq 1+na$  عند  $n \in \mathbb{N}$   
 ( انظر تمرين ٥ ج ) إذن

$$0 < b^n = \frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na}$$

كافي المثال السابق إذا كانت  $\varepsilon > 0$  معطاة فحينئذ يوجد عدد طبيعي  $K(\varepsilon)$  بحيث أن  
 $|b^n - 0| < \varepsilon$  عند  $n \geq K(\varepsilon)$  . وإذن يكون لدينا  $\lim_{n \rightarrow \infty} b^n = 0$  .

(د) نفرض أن  $c > 0$  ونعتبر المتتالية  $(c^{1/n})$  . سنوضح أن  $\lim_{n \rightarrow \infty} c^{1/n} = 1$   
 أولاً نفرض أن  $c > 1$  حينئذ  $c^{1/n} = 1 + d_n$  حيث  $d_n > 0$  ومن ثم حسب متباينة برنولي

$$c = (1+d_n)^n \geq 1 + nd_n$$

ومن ذلك ينتج أن  $c-1 \geq nd_n$  بما أن  $c > 1$  يكون لدينا  $c-1 > 0$  . وإذن  
 بإعطاء  $\varepsilon > 0$  فإنه يوجد عدد طبيعي  $K(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $n \geq K(\varepsilon)$  ، فإن

$$0 < c^{1/n} - 1 = d_n \leq \frac{c-1}{n} < \varepsilon$$

لذلك  $\lim_{n \rightarrow \infty} c^{1/n} = 1$  عند  $n \geq K(\varepsilon)$  كال المطلوب .

الآن نفرض أن  $0 < c < 1$  (لأن الحالة  $c = 1$  واضحة) حينئذ  $c^{1/n} = 1/(1+h_n)$  حيث  $h_n > 0$  ومن ثم حسب متباينة برنولي

$$c = \frac{1}{(1+h_n)^n} \leq \frac{1}{1+nh_n} < \frac{1}{nh_n}$$

ينتج أن  $0 < h_n < 1/nc$ . ولكن بما أن  $c > 0$ ، فبأخذ  $\varepsilon > 0$  يوجد عدد طبيعي  $K(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $n \geq K(\varepsilon)$  حينئذ

$$0 < 1 - c^{1/n} = \frac{h_n}{1+h_n} < h_n < \frac{1}{nc} < \varepsilon$$

لذلك  $|c^{1/n} - 1| < \varepsilon$  عند  $n \geq K(\varepsilon)$  كما مطلوب

(\*) اعتبر المتتابعة  $X = (n^{1/n})$ . سنوضح أن نها  $X = 1$ ، وهي حقيقة ليست واضحة نوعاً ما. نكتب  $n^{1/n} = 1 + k_n$  حيث  $k_n > 0$  عند  $n > 1$  ومن ثم  $n = (1+k_n)^n$ . بنظرية ذات الحدين عند  $n > 1$  نحصل على

$$n = 1 + nk_n + \frac{n(n-1)}{2} k_n^2 + \dots > \frac{n(n-1)}{2} k_n^2$$

ومن ذلك ينتج  $k_n^2 < 2/(n-1)$  بحيث أن

$$k_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

الآن بفرض  $\varepsilon > 0$  مطاة، فإنه يوجد  $K(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $n \geq K(\varepsilon)$  فينتج  $1/(n-1) < \varepsilon^2/2$  ومن ذلك ينتج أن  $0 < k_n < \varepsilon$  وأيضاً

$$0 < n^{1/n} - 1 = k_n < \varepsilon$$

عند  $n \geq K(\varepsilon)$ . وبما أن  $\varepsilon > 0$  اختيارية فهذا يبرهن أن نها  $1 = (n^{1/n})$ .

هذه الأمثلة توضح أن هيكل النتائج التي ستجمل البراعة المستعملة هنا غير ضرورية سيكون مفيداً للغاية. سنحصل على مثل هذه النتائج في البابين القادمين ولكن سنختتم هذا الباب بنتيجة مفيدة غالباً جداً.

١٤-٩ نظرية. بفرض  $X = (x_n)$  متتابعة في  $R^p$  ونفرض أن  $x \in R^p$

بفرض  $A = (a_n)$  متتابعة في  $R$  بحيث أن

$$\lim (a_n) = 0 \quad (i)$$

$$\|x_n - x\| \leq C |a_n| \quad (ii) \text{ عند بعض } C > 0 \text{ وكل } n \in N$$

فإن نها  $(x_n) = x$ .

البرهان . نفرض  $\varepsilon > 0$  معطاة . وبما أن  $a_n = 0$  فيوجد عدد طبيعي  $K(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $n \geq K(\varepsilon)$  فإن

$$C|a_n| = C|a_n - 0| \leq \varepsilon$$

ومن ذلك ينتج أن

$$\|x_n - x\| \leq C|a_n| \leq \varepsilon$$

لجميع  $n \geq K(\varepsilon)$  . وبما أن  $\varepsilon > 0$  اختيارية فستنتج أن  $x = (x_n)$  هو المطلوب إثباته

### تمارين :

١٤- (أ) بفرض أن  $b \in \mathbb{R}$  . وضع أن  $0 = (b/n)$  .

١٤- (ب) أثبت أن  $0 = [1/n - 1/(n+1)]$  .

١٤- (ج) بفرض  $X = (x_n)$  متتابعة في  $\mathbb{R}^p$  وتقتارب إلى  $x$  ، وبفرض  $c \in \mathbb{R}$  أثبت أن  $cx = (cx_n)$  .

١٤- (د) بفرض  $X = (x_n)$  هي متتابعة في  $\mathbb{R}^p$  ومتقاربة إلى  $x$  ، وضع أن  $\|x\| = (\|x_n\|)$  . (إرشاد : استعمل المتباينة المثلثية) .

١٤- (هـ) بفرض أن  $X = (x_n)$  متتابعة في  $\mathbb{R}^p$  والفرض أن  $0 = (\|x_n\|)$  . أثبت أن  $0 = (x_n)$  . لكن اعط مثالا في  $\mathbb{R}$  لتوضح أن تقارب  $(\|x_n\|)$  ربما يستلزم تقارب  $(x_n)$  .

١٤- (و) أثبت أن  $0 = (1/\sqrt{n})$  ، وفي الحقيقة إذا كانت  $(x_n)$  متتابعة لأعداد موجبة وكان  $0 = (x_n)$  فإن  $0 = (\sqrt{x_n})$  .

١٤- (ز) إذا كانت  $d \in \mathbb{R}$  تحقق  $d > 1$  استخدم متباينة بورنولي لتوضح أن المتتابعة  $(d^n)$  ليست محدودة في  $\mathbb{R}$  ومن ثم ليست تقاربية .

١٤- (ح) بفرض أن  $b \in \mathbb{R}$  تحقق  $0 < b < 1$  فوضح أن  $0 = (nb^n)$  . (إرشاد : استعمل نظرية ذات الحدين كما في مثال ١٤-٨ (أ) )

١٤- (ط) بفرض  $X = (x_n)$  متتابعة لأعداد حقيقية موجبة بالضبط بحيث أن  $1 < (x_{n+1}/x_n)$  . وضع أنه عند بعض قيم المقدار  $r$  بحيث  $0 < r < 1$  وبعض قيم المقدار  $C$  بحيث  $C > 0$  يكون لدينا  $0 < x_n < Cr^n$  لكل قيمة  $n \in \mathbb{N}$  . كبيرة كبراً كافياً . استخدم هذا لتوضح أن  $0 = (x_n)$  .

١٤- (ى) بفرض أن  $X = (x_n)$  متتابة لأعداد حقيقية موجبة مضبوطة بحيث أن نها  $(x_{n+1}/x_n) < 1$  .وضح أن  $X$  ليست متتابة محدودة وحينئذ ليست تقاربية .

١٤- (ك) اعط مثالا لمتتابة  $(x_n)$  تقاربية لأعداد حقيقية موجبة بالضغط بحيث أن نها  $(x_{n+1}/x_n) = 1$  . اعط مثالا لمتتابة تباعدية بهذه الخاصية .

١٤- (ل) استخدم النتائج من (تمرين ١٤ ط، ١٤ -ى) للمتتابة الآتية :

(هنا  $0 < a < 1, 1 < b, c > 0$ ) :

$$(a^n) \quad (أ)$$

$$(b^n/n) \quad (ج)$$

$$(c^n/n!) \quad (د)$$

$$(2^{3n}/3^{2n}) \quad (هـ)$$

١٤- (م) بفرض  $X = (x_n)$  متتابة لأعداد حقيقية موجبة مضبوطة بحيث أن نها  $(x_n^{1/n}) > 1$  وضح أنه لبعض قيم  $r$  حيث  $0 < r < 1$  فإن  $0 < x_n < r^n$  لكل قيمة  $n \in \mathbb{N}$  كبيرة كبراً كافياً . استخدم هذا لتستنتج أن نها  $(x_n) = 0$

١٤- (ن) بفرض  $X = (x_n)$  متتابة لأعداد حقيقية موجبة مضبوطة بحيث أن نها  $(x_n^{1/n}) < 1$  وضح أن  $X$  ليست فئة محدودة ومن ثم ليست تقاربية .

١٤- (س) اعط مثالا لمتتابة تقاربية  $(x_n)$  لأعداد حقيقية موجبة مضبوطة بحيث أن نها  $(x_n^{1/n}) = 1$  . اعط مثالا لمتتابة تباعدية بهذه الخاصية .

١٤- (ع) افحص تقارب المتتابة في تمرين ١٤ -ل بإلقاء النظر على تمرين ١٤ -م ، ١٤ -ن .

١٤- (ف) افحص تقارب المتتابات الآتية في  $\mathbb{R}$

$$\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (ب)$$

$$\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \quad (أ)$$

$$((-1)^n) \quad (د)$$

$$\left(\frac{n^2}{n+1}\right) \quad (ج)$$

### الباب الخامس عشر — متتابعات جزئية وتوافيق :

يملى هذا الباب بعض معلومات عن تقارب المتتابعات التي يحصل عليها بطرق مختلفة من متتابعات معروفة بأنها تقاربية . وستساعد في إمكانتنا من فك مجموعات لمتتابعات تقاربية بتوسع نوع ما .

١٥-١ تعريف . إذا كانت  $X = (x_n)$  متتابة في  $\mathbb{R}^p$  وإذا كانت على سبيل الحصر  $r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots$  متتابة متزايدة لأعداد طبيعية ، حينئذ المتتابة  $X'$  في  $\mathbb{R}^p$  الممثلة في الصورة

$$(x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_n}, \dots)$$

تسمى بمتابعة جزئية من  $X$  .

ربما يكون من المفيد أن نربط بين مدلول المتابعة الجزئية وبين تحصيل دالتين . إذا فرضنا أن  $g$  هي دالة بنطاق  $N$  ومدى في  $N$  ونفرض أن  $g$  متزايدة مضبوطة بمعنى أنه إذا كانت  $n < m$  فإن  $g(n) < g(m)$  . حينئذ  $g$  تعرف بمتابعة جزئية من  $X = (x_n)$  بواسطة القانون

$$X \circ g = (x_{g(n)} : n \in N)$$

وبالعكس . كل متابعة جزئية للمقدار  $X$  لها الصورة  $X \circ g$  لدالة ما متزايدة مضبوطة حيث  $g$  ،  $D(g) = N$  ،  $R(g) \subseteq N$  .

من الواضح أن المتابعة مطعاة متابعات جزئية مختلفة كثيرة . وبالرغم من أن النتيجة الآتية أولية جداً فلها أهمية كافية بما يحتم جعلها صريحة .

١٥ - ٢ مأخوذة أو مفترض . إذا كانت متابعة  $X$  في  $R^p$  تتقارب إلى عنصر  $x$  حينئذ أى متابعة جزئية من  $X$  أيضاً تتقارب إلى  $x$  .

البرهان . بفرض  $V$  هي جوار لنهاية العنصر  $x$  ، من التعريف يوجد عنصر طبيعي  $K_V$  بحيث أنه لكل  $n \geq K_V$  فإن  $x_n$  تنتمي إلى  $V$  . الآن نفرض  $X'$  متابعة جزئية من  $X$  ، مثلاً

$$X' = (x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_n}, \dots)$$

بما أن  $r_n \geq n$  حينئذ  $r_n \geq K_V$  ومن ثم  $V$  تنتمي إلى  $X'$  . هذا يبرهن أن  $X'$  تتقارب أيضاً إلى  $x$  . وهو مطلوب إثباته .

١٥ - ٣ نتيجة . إذا كانت  $X = (x_n)$  متابعة بحيث تتقارب إلى عنصر  $x$  من  $R^p$  وإذا كانت  $m$  أى عدد طبيعي فحينئذ المتابعة  $X' = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots)$  أيضاً تتقارب إلى  $x$  .

البرهان . بما أن  $X'$  متابعة جزئية من  $X$  ، فالنتيجة تنتج مباشرة من المفترضة السابقة .

وجهت النتائج السابقة وبدرجة كبيرة إلى برهنة أن متابعة تقترب من نقطة معلومة . ومن المهم أيضاً أن نعلم بدقة ماذا نفى بقولنا أن المتابعة  $X$  لا تقترب من  $x$  . النتيجة القادمة أولية ولكن ليست تافهة وتحقيقها جزء هام من ثقافة كل شخص لذلك سنترك برهانها بالتفصيل للقارئ .

١٥ - ٤ . إذا كانت  $X = (x_n)$  متتابعة في  $R^p$  حيث النصوص الآتية متكافئة :

(١)  $X$  لا تقرب من  $x$  .

(ب) يوجد جوار  $X$  للمقدار  $x$  بحيث أنه إذا كانت  $n$  أى عدد طبيعي فإنه يوجد عدد طبيعي  $m = m(n) \geq n$  بحيث أن  $x_m$  لا ينتمى إلى  $V$  .  
(ج) يوجد جوار  $X$  للمقدار  $x$  ومتتابعة جزئية  $X'$  للمقدار  $X$  بحيث لا يوجد أى عنصر من عناصر  $V$  وينتمى إلى  $V$  .

١٥ - ٥ أمثلة . (١) نفرض  $X$  متتابعة في  $R$  وتتكون من الأعداد الطبيعية .

$$X = (1, 2, \dots, n, \dots)$$

نفرض أن  $x$  أى عدد حقيقى ونعتبر الجوار  $V$  للمقدار  $x$  الذى يتكون من الفترة المفتوحة  $(x-1, x+1)$  . وطبقاً لخاصية أرشيدس  $\epsilon - \epsilon$  يوجد عدد طبيعي  $K_0$  بحيث أن  $x+1 < k_0$  ومن ثم إذا كانت  $n \geq k_0$  فينتج أن  $x_n = n$  لا تنتمى إلى  $V$  .  
وإذن المتتابعة الجزئية  $X' = (k_0, k_0+1, \dots)$  من  $X$  ليس لها نقط في  $V$  . مما يثبت أن  $X$  لا تقرب من  $x$  .

(ب) نفرض  $Y = (y_n)$  متتابعة في  $R$  وتتكون من  $Y = (-1, 1, \dots, (-1)^n, \dots)$  نترك ذلك للقارئ ليوضح أنه لا توجد نقطة  $y$  . باستثناء إمكانية  $y = \pm 1$  يمكن أن تكون نهاية  $y$  . وسنوضح أن النقطة  $Y = -1$  ليست نهاية  $y$  ، واعتبار الحالة التى فيها  $y = +1$  تشابه الحالة السابقة تماماً . بفرض أن  $V$  جوار  $y = -1$  ويتكون من الفترة المفتوحة  $(-2, 0)$  . حينئذ إذا كانت  $n$  زوجية فإن العنصر  $y_n = (-1)^n = +1$  لا ينتمى إلى  $V$  . لذلك بتجنب الفئة الجزئية  $Y'$  من  $Y$  المناظرة إلى  $r_n = 2n, n \in N$  الجوار  $V$  مما يثبت أن  $y = -1$  ليست نهاية  $Y$  .

(ج) بفرض  $Z = (z_n)$  متتابعة في  $R$  حيث  $z_n \geq 0$  عند  $n \geq 1$  . نستنتج أنه لا يوجد عدد  $z < 0$  بحيث يمكن أن يكون نهاية  $Z$  . وفى الحقيقة ، الفئة المفتوحة  $V = \{x \in R : x < 0\}$  هى جوار للعدد  $z$  لا يحتوى على أى عنصر من  $Z$  . هذا يوضح (إذا ؟) أن  $z$  لا يمكن أن تكون نهاية  $Z$  . ومن ثم إذا كانت  $Z$  لها نهاية فهذه النهاية يجب أن تكون موجبة .

### توافيق المتتابعات :

النظرية الآتية تمكن الشخص من استعمال العمليات الجبرية للعارف ١٤ - ٢ . لتكوين متتابعات جديدة يمكن التنبؤ بتقاربها من تقارب المتتابعات المعطاة .



١٥-٦ نظرية. (أ) بفرض  $X, Y$  متباينتين في  $R^p$  وتتقاربان إلى  $x, y$  على الترتيب. حينئذ المتباينات  $X+Y, X-Y$  و  $X \cdot Y$  تتقارب إلى  $x+y, x-y$  و  $x \cdot y$  على الترتيب.

(ب) بفرض  $X=(x_n)$  متباينة في  $R^p$  بحيث تتقارب إلى  $x$  ونفرض أن  $A=(a_n)$  متباينة في  $R$  وتتقارب إلى  $a$  فينتج أن المتباينة  $(a_n x_n)$  في  $R^p$  تتقارب إلى  $ax$ .

(ج) بفرض  $X=(x_n)$  متباينة في  $R^p$  بحيث تتقارب إلى  $x$  ونفرض أن  $B=(b_n)$  متباينة لأعداد حقيقية غير صفرية وأنها تتقارب إلى عدد  $b$  لا يساوى صفراً، حينئذ المتباينة  $(b_n^{-1} x_n)$  في  $R^p$  تتقارب إلى  $b^{-1}x$ .

البرهان. (أ) لنوضح أن  $(x_n + y_n) \rightarrow x + y$  نحتاج لتقييم مقدار

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\|$$

ولكى نفعل هذا فإننا نستخدم متباينة المثلث لنحصل على

$$\begin{aligned} \|(x_n + y_n) - (x + y)\| &= \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \\ (15.1) \quad &\leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \end{aligned}$$

من الفرض نجد أنه، إذا كانت  $\varepsilon > 0$  فإننا يمكننا اختيار  $K_1$  بحيث أنه إذا كانت  $n \geq K_1$  فإن  $\|x_n - x\| < \varepsilon/2$  ونختار  $K_2$  بحيث أنه إذا كانت  $n \geq K_2$  فإن  $\|y_n - y\| < \varepsilon/2$  ومن ثم إذا كانت  $K_0 = \sup\{K_1, K_2\}$ ،  $n \geq K_0$  حينئذ نستنتج من (١٥-١) أن

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

بما أنه يمكن إجراء ماسبق لكل  $\varepsilon > 0$  اختيارية، فنستخلص أن  $X+Y$  تتقارب إلى  $x+y$  وبالصبط يمكن استخدام نفس المناقشة لنوضح أن  $X-Y$  تتقارب إلى  $x-y$ .

لبرهان أن  $X \cdot Y$  تتقارب إلى  $x \cdot y$  نقوم بإجراء المقايمة

$$\begin{aligned} |x_n \cdot y_n - x \cdot y| &= |(x_n \cdot y_n - x_n \cdot y) + (x_n \cdot y - x \cdot y)| \\ &\leq |x_n \cdot (y_n - y)| + |(x_n - x) \cdot y| \end{aligned}$$

باستخدام متباينة شفاوتز، نحصل على

$$(15.2) \quad |x_n \cdot y_n - x \cdot y| \leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\|$$

يوجد طبقاً للمفترض ١٤-٦ عدد  $M > 0$  الذى يكون حداً أعلى للمقدار  $\{\|x_n\|, \|y\|\}$  وعلاوة على ذلك نستنتج من تقارب  $X, Y$ ، أنه إذا كانت  $\varepsilon > 0$  معطاة حينئذ يوجد عدنان طبيعيين  $K_1, K_2$  بحيث أنه إذا كانت  $n \geq K_1$  فإن  $\|y_n - y\| < \varepsilon/2M$  وإذا كانت

$n \geq K_2$  فإن  $\|x_n - x\| < \varepsilon/2M$  . الآن نختار  $K = \sup \{K_1, K_2\}$  فينتج أنه إذا كانت  $n \geq K$  فستنتج من (١٥ - ٢) أن

$$\begin{aligned} |x_n \cdot y_n - x \cdot y| &\leq M \|y_n - y\| + M \|x_n - x\| \\ &< M \left( \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M} \right) = \varepsilon \end{aligned}$$

هذا يبرهن أن  $X \cdot Y$  تتقارب إلى  $x \cdot y$  .

يبرهن جزء (ب) بنفس الطريقة

لبرهنة (ج) نقيم ونحسب كما يأتي :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{b_n} x_n - \frac{1}{b} x \right\| &= \left\| \left( \frac{1}{b_n} x_n - \frac{1}{b} x_n \right) + \left( \frac{1}{b} x_n - \frac{1}{b} x \right) \right\| \\ &\leq \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| \|x_n\| + \left| \frac{1}{b} \right| \|x_n - x\| \\ &= \frac{|b - b_n|}{|b_n b|} \|x_n\| + \frac{1}{|b|} \|x_n - x\| \end{aligned}$$

الآن نفرض أن  $M > 0$  بحيث أن

$$\frac{1}{M} < |b| \quad \text{و} \quad \|x\| < M$$

ومن ذلك ينتج أنه يوجد عدد طبيعي  $K_0$  بحيث أنه إذا كانت  $n > K_0$  ، فإن

$$\frac{1}{M} < |b_n| \quad \text{و} \quad \|x_n\| < M$$

ومن ثم إذا كانت  $n \geq K$  ، فإن التقييم السابق ينص

$$\left\| \frac{1}{b_n} x_n - \frac{1}{b} x \right\| \leq M^3 |b_n - b| + M \|x_n - x\|$$

لذلك إذا كانت  $\varepsilon > 0$  عدداً حقيقياً معيناً فإنه يوجد عددان طبيعيان  $K_1, K_2$  بحيث أنه إذا كانت  $n \geq K_1$  فحينئذ  $|b_n - b| < \varepsilon/2M^3$  وإذا كانت  $n \geq K_2$  حينئذ  $\|x_n - x\| < \varepsilon/2M$  وبفرض  $K = \sup \{K_0, K_1, K_2\}$  نستنتج أنه إذا كانت  $n \geq K$  فإن

$$\left\| \frac{1}{b_n} x_n - \frac{1}{b} x \right\| < M^3 \frac{\varepsilon}{2M^3} + M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

ما يثبت أن  $(x_n/b_n)$  تتقارب إلى  $x/b$  . وهو المطلوب إثباته

١٥-٧ تطبيقات . مرة أخرى نغير اهتماماً دقيقاً إلى المتتابعات في  $R$

(أ) إذا كانت  $X = (x_n)$  هي المتتابعة في  $R$  المعرفة بواسطة

$$x_n = \frac{2n+1}{n+5}, \quad n \in N$$

نلاحظ أنه يمكننا كتابة  $x_n$  في الصورة

$$x_n = \frac{2+1/n}{1+5/n}$$

أى أن  $X$  يمكن اعتبارها كخارج قسمة  $Y = (2+1/n)$  ،  $Z = (1+5/n)$  . بما أن المتتابعة الأخيرة تتكون من حدود ليست صفرية ولها نهاية 1 (لماذا ؟) فإن النظرية السابقة تسمح لنا باستنتاج أن

$$\lim X = \frac{\lim Y}{\lim Z} = \frac{2}{1} = 2$$

(ب) إذا كانت  $X = (x_n)$  هي متتابعة في  $R$  وتتقارب إلى  $x$  وإذا كانت  $p$  كبيرة حدود ، فإن المتتابعة المعرفة بواسطة  $(p(x_n): n \in N)$  تتقارب إلى  $p(x)$  (إرشاد : استخدم نظرية ١٥-٦ والاستنتاج) .

(ج) نفرض أن  $X = (x_n)$  متتابعة في  $R$  والتي تتقارب إلى  $x$  ونفرض  $r$  هي دالة قياسية ، أى  $r(y) = p(y)/q(y)$  حيث  $p, q$  كثيرتا الحدود . ونفرض أن  $q(x_n)$  و  $q(x)$  ليست أصفاراً ، حينئذ المتتابعة  $(r(x_n): n \in N)$  تتقارب إلى  $r(x)$  (إرشاد : استعمل جزء (ب) ونظرية ١٥-٦) .

نختم هذا الباب بنتيجة مفيدة غالباً . وهي توصف أحياناً بالقول « يجتاز شخص إلى النهاية في متباينة » .

١٥-٨ مفروض . نفرض أن  $X = (x_n)$  متتابعة تقاربية في  $R^p$  بنهاية  $x$  . إذا كان يوجد عنصر  $c$  في  $R^p$  وعدد  $r > 0$  بحيث  $r \leq \|x_n - c\|$  عندما تكون  $n$  كبيرة كبراً كافياً فإن  $\|x - c\| \leq r$

البرهان . الفئة  $V = \{y \in R^p : \|y - c\| > r\}$  فئة جزئية مفتوحة في  $R^p$  . إذا كانت  $x \in V$  فإن  $V$  هي جوار  $x$  وأيضاً  $x_n \in V$  لقيم  $n$  الكبيرة كبراً كافياً بما يخالف الفرض ، ولذلك  $x \notin V$  ومن ثم يكون عندما  $\|x - c\| \leq r$  .

ومن المهم أن نلاحظ أننا افترضنا وجود النهاية في هذه النتيجة لأن الفروض الباقية ليست كافية لكي تمكنا من البرهنة على وجودها .

## تمريعات :

١٥- (أ) إذا كانت  $(x_n)$  ،  $(y_n)$  متتابعتين تقاربتين لأعداد حقيقية وإذا كانت  $x_n \leq y_n$  لكل  $n \in \mathbb{N}$  فإن  $x_n \geq y_n$  .

١٥- (ب) إذا كانت  $X = (x_n)$  ،  $Y = (y_n)$  متتابعتين لأعداد حقيقية بحيث أن  $x_n \leq z_n \leq y_n$  متتابعة بحيث أن  $Z = (z_n)$  متتابعة بحيث أن  $c$  وإذا كانت  $c$  فثبت أن  $Z$  تقارب أيضاً إلى  $c$  .

١٥- (ج) إذا كان  $x_n$  معطاة بالصيغ الآتية فحقق إما التقارب أو التباعد للمتتابعة  $X = (x_n)$  .

$$x_n = \frac{n}{n+1} \quad (\text{ب}) \quad x_n = \frac{(-1)^n n}{n+1} \quad (\text{أ})$$

$$x_n = \frac{2n^2+3}{3n^2+1} \quad (\text{د}) \quad x_n = \frac{2n}{3n^2+1} \quad (\text{ج})$$

$$x_n = \sin n \quad (\text{و}) \quad x_n = n^2 - n \quad (\text{هـ})$$

١٥- (د) إذا كانت  $X$  ،  $Y$  متتابعتين في  $\mathbb{R}^p$  وإذا كانت  $X + Y$  تقارب . هل  $X$  ،  $Y$  تقارب وتحقق  $x_n + y_n = (X + Y)_n$  ؟

١٥- (هـ) إذا كانت  $X$  ،  $Y$  متتابعتين في  $\mathbb{R}^p$  وإذا كانت  $X \cdot Y$  تقارب هل  $X$  ،  $Y$  تقارب وتحقق  $x_n \cdot y_n = (X \cdot Y)_n$  ؟

١٥- (و) إذا كانت  $X = (x_n)$  متتابعة موجبة مقاربة إلى  $x$  ، حينئذ  $(\sqrt{x_n})$  تقارب إلى  $\sqrt{x}$  . (إرشاد :  $\sqrt{x_n} - \sqrt{x} = (x_n - x) / (\sqrt{x_n} + \sqrt{x})$  عندما  $x \neq 0$  .

١٥- (ز) إذا كانت  $X = (x_n)$  متتابعة لأعداد حقيقية بحيث أن  $Y = (x_n^2)$  تقارب إلى صفر حينئذ هل  $X$  تقارب إلى صفر ؟

١٥- (ح) إذا كانت  $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$  هل المتتابعات  $X = (x_n)$  و  $Y = (\sqrt{n} x_n)$  تقارب ؟

١٥- (ط) بفرض أن  $(x_n)$  متتابعة في  $\mathbb{R}^p$  بحيث أن المتتابعتين الجزئيتين  $(x_{2n})$  ،  $(x_{2n+1})$  تقاربان إلى  $x \in \mathbb{R}^p$  . أثبت أن  $(x_n)$  تقارب إلى  $x$  .

١٥- (ي) بفرض  $(x_n)$  ،  $(y_n)$  متتابعتين في  $\mathbb{R}$  بحيث أن  $x_n \neq 0$  ونها  $(x_n y_n)$  موجودة . أثبت أن  $y_n$  تكون أيضاً موجودة

١٥- (ك) هل تمرين ١٥- ي يظل صحيحاً في  $\mathbb{R}^2$  ؟

١٥- (ل) إذا كانت  $0 < a \leq b$  وإذا كانت  $x_n = (a^n + b^n)^{1/n}$  . حينئذ  
 نها  $b = (x_n)$  .

١٥- (م) كل عدد غير قياسي في  $R$  هو النهاية لمتتابعة لأعداد قياسية . كل عدد قياسي  
 في  $R$  هو النهاية لمتتابعة لأعداد غير قياسية .

١٥ (ن) إذا فرضنا  $A \subseteq R^p$  ،  $x \in R^p$  حينئذ  $x$  هي النقطة الحدودية للمقدار  
 $A$  إذا وإذا فقط كانت توجد متتابعة  $(a_n)$  عناصرها في  $A$  ومتتابعة  $(b_n)$  عناصرها في  
 $\mathcal{E}(A)$  بحيث أن

$$\lim (a_n) = x = \lim (b_n)$$

١٥ (س) بفرض أن  $A \subseteq R^p$  ،  $x \in R^p$  حينئذ  $x$  هي نقطة تجمع للمقدار  $A$   
 إذ وإذا فقط كانت توجد متتابعة  $(a_n)$  لعناصر مختلفة في  $A$  بحيث أن  $x = \lim (a_n)$  .

١٥ (ع) إذا كانت نها  $x = (x_n)$  وإذا كانت  $\|x_n - c\| < r$  for all  $n \in N$  هل ينتج  
 أن  $\|x - c\| < r$  ؟

### مشروعات :

١٥-  $a$  . بفرض  $d$  قياسي أو مترى على فئة  $M$  بمفهوم تمرين ٨- ق . إذا كانت  
 $X = (x_n)$  متتابعة في  $M$  ، حينئذ يقال لعنصر  $x \in M$  إنه نهاية  $X$  . إذا كان يوجد  
 لكل  $\varepsilon > 0$  عدد  $K(\varepsilon)$  في  $N$  بحيث أنه لكل  $n \geq K(\varepsilon)$  يكون  $d(x_n, x) < \varepsilon$  .  
 استخدم هذا التعريف ووضح أن نظريات ١٤- ٥ ، ١٤- ٤ ، ١٥- ٢ ،  
 ١٥- ٣ ، ١٥- ٤ يمكن امتدادها إلى الفراغات المترية . وضح أن المتريات  $d_1, d_2, d_\infty$   
 في  $R^p$  تؤدي إلى نفس المتتابعات التقاربة في  $R^p$  . وضح أنه إذا كانت  $d$  هو مترى  
 منفصل على فئة ، حينئذ المتتابعات التي تتقارب فقط بالنسبة إلى  $d$  هي التي تكون ثابتة بعد  
 عدد طبيعي ما .

١٥-  $\beta$  . بفرض أن  $m$  تشير إلى مجموعة كل المتتابعات المحدودة في  $R$  ، وبفرض  
 $C$  تدل إلى المجموعة لكل المتتابعات التقاربية في  $R$  ، وبفرض  $C$  تشير المجموعة من كل  
 المتتابعات في  $R$  والتي تقترب إلى صفر .

(أ) بحاصل جمع  $X + Y$  وحاصل ضرب  $cX$  مثل المعطى في تعريف ١٤-٢  
 اثبت أن كلا من المجموعات السابقة هو فراغ المتجه الذي يكون فيه عنصر الصفر هو المتتابعة  
 $0 = (0, 0, \dots)$

(ب) في كل من المجموعات  $m, c, c_0$  عرف العمود  $X = (x_n)$  بالصورة  
 $\|x\| = \sup \{|x_n| : n \in N\}$  . وضح أن هذا التعريف في الحقيقة ينتج عموداً .

(ج) إذا كانت  $X, Y$  تنتمي إما إلى  $c$  و  $m$  أو إلى  $c_0$  فإن حاصل ضرب  $XY$  ينتمي أيضاً إليها ،  $\|XY\| \leq \|X\| \|Y\|$  . اعط مثالا لتوضح أن علامة التساوى ربما تكون صحيحة في هذه العلاقة الأخيرة واعط مثالا آخر لتوضح أن التساوى ربما يفشل .

(د) وضع أن المترية المستنتجة بواسطة العمود في جزء (ب) في هذه الفراغات يعطى بالعلاقة  $d(X, Y) = \sup \{ |x_n - y_n| : n \in \mathbb{N} \}$

(هـ) وضع أنه إذا كانت متتابعة  $(X_k)$  تتقارب إلى  $Y$  بالنسبة إلى المترية في (د) ، فإن كل متتابعة الأحداثى تتقارب إلى نفس الأحداثى المناظر في  $Y$  .

(تحذير) :  $(X_k)$  متتابعة في  $R$  بينما  $X_k$  متتابعة في  $c$  و  $m$  أو  $c_0$  ، أى « متتابعة لمتتابعات » في  $(R)$  .

(و) اعط مثالا لمتتابعة  $(X_k)$  في  $c_0$  بحيث أن من متتابعات الأحداثى كل متتابعة متساوية الدرجة تتقارب إلى صفر لكن  $d(X_k, 0)$  لا تتقارب إلى صفر .

## الباب السادس عشر — معياريات أو مقياسان للتقارب :

لأن الطريقة الرئيسية الممكنة لتوضيح أن متتابعة تقاربية هي أن نطابقها بكتابة جزئية أو مجموعة جبرية مؤلفة من متتابعات تقاربية ويمكننا عند إجراء هذا أن نحسب النهاية مستخدمين نتائج الأبواب السابقة . ولكن عند عدم إمكانية إجراء هذا فإننا نرجع إلى تعريف ١٤ - ٣ أو نظرية ١٤ - ٤ لكى نثبت وجود النهاية . واستمال هذه الطرق الأخيرة له عيب يستحق الذكر وهو أننا يجب أن نعرف (أو نشك على الأقل) قبل ذلك في القيمة الصحيحة للنهاية وبعد ذلك نحقق أن شكنا صحيح .

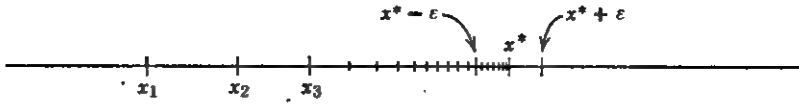
يوجد حالات كثيرة ولكن لا توجد طريقة مرشحة واضحة لنهاية متتابعة مطاة وحتى التحليل الأولى قد يقودنا إلى الاعتقاد بعدم وجود تقارب . في هذا الباب سنعطى بعض نتائج أعمق عما سبق ذكره في الأبواب السابقة والتي يمكن أن تستعمل لتقرير تقارب المتتابعة عندما لا يوجد عنصر خاص يمثل نفسه كقيمة النهاية . أول نتيجة في هذا الاتجاه هامة جداً . ومع أنه يمكن تعميمها في  $R^p$  ، لكن من المناسب أن نحصر نصها في حالة المتتابعات في  $R$  .

١٦ - ١ نظرية تقارب باطراد . بفرض  $X = (x_n)$  متتابعة لأعداد حقيقية ومتزايدة باطراد بمعنى أن  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots$

فنتج أن المتتابعة  $X$  تتقارب إذا وإذا فقط كانت محدودة . في هذه الحالة :

$$\lim (x_n) = \sup \{x_n\}$$

البرهان . قد ظهر في مفترض ١٤ - ٦ أن المتتابعة التقاربية محدودة . إذا كانت نها  $x = (x_n)$  ،  $\varepsilon > 0$  ، حينئذ يوجد عدد طبيعي .



( شكل ١٦ - ١ )

$K(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $n \geq K(\varepsilon)$  ، فإن

$$x - \varepsilon \leq x_n \leq x + \varepsilon$$

بما أن  $X$  تزداد باطراد فتغطي هذه العلاقة

$$x - \varepsilon \leq \sup \{x_n\} \leq x + \varepsilon$$

ومن ذلك ينتج أن  $|x - \sup \{x_n\}| \leq \varepsilon$  . وبما أن هذا يكون صحيحاً لكل  $\varepsilon > 0$  فنستنتج أن  $\lim (x_n) = x = \sup \{x_n\}$

وبالعكس ، نفرض أن  $X = (x_n)$  متتابة متزايدة باطراد ومحدودة لأعداد حقيقية . وطبقاً لمبدأ العلو ، فإنه يوجد  $\supremum x^* = \sup \{x_n\}$  وسنوضح أنه نهاية  $X$  . وبما أن  $x$  هي الحد الأعلى للمناصر في  $X$  فينتج أن  $x_n \leq x^*$  عند  $n \in N$  وبما أن  $x^*$  هي علو للمتتابة  $X$  ، إذا كانت  $\varepsilon > 0$  فإن العدد  $x^* - \varepsilon$  ليس الحد الأعلى للمتتابة  $X$  ويوجد عدد طبيعي  $K(\varepsilon)$  بحيث أن

$$x^* - \varepsilon < x_{K(\varepsilon)}$$

ومن وجهة نظر خاصية الاطراد للمتتابة  $X$  لكل  $n \geq K(\varepsilon)$  نجد أن

$$x^* - \varepsilon < x_n \leq x^*$$

ومن ثم ينتج أن  $|x_n - x^*| < \varepsilon$  وخلاصة الشرح هي أن للعدد  $x^* = \sup \{x_n\}$  الخاصية التي تقول إنه يأخذ  $\varepsilon > 0$  يوجد عدد طبيعي  $K(\varepsilon)$  (متوقفاً على  $\varepsilon$ ) بحيث أن  $|x_n - x^*| < \varepsilon$  طالما  $n \geq K(\varepsilon)$  وهذا يوضح أن  $x^* = \lim X$  وهو المطلوب إثباته .

١٦ - ٢ نتيجة . بفرض  $X = (x_n)$  متتابة للأعداد حقيقية متناقصة باطراد بمعنى أن

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \dots$$

فإن المتتابة  $X$  تتقارب إذا وإذا فقط كانت محدودة في هذه الحالة .

$$\lim (x_n) = \inf \{x_n\}$$

البرهان . نفرض أن  $y_n = -x_n$  عند  $n \in \mathbb{N}$  . حينئذ قد بينا حالا أن المتتابعة  $Y = (y_n)$  متتابعة تزايدية باطراد . وعلاوة على ذلك فإن  $Y$  تكون محدودة إذا وإذا فقط كانت  $X$  محدودة . وإذن ينتج الاستنتاج من النظرية .

١٦ - ٣ أمثلة . (أ) رجع إلى المتتابعة  $X = (1/n)$  التي نوقشت في مثال ١٤ - ٨ (أ) .  
من الواضح أن

$$\frac{1}{1} > \frac{1}{2} > \dots > \frac{1}{n} > \dots > 0$$

ولذلك ينتج من نتيجة ١٦ - ٢ أن  $X = (1/n)$  تتقارب . يمكننا إثبات قيمة نها  $(1/n)$  إذا أمكننا حساب  $\inf \{1/n\}$  . وتبادلية إذا كان تقارب  $X$  أكيداً فإنه يمكننا غالباً حساب قيمة النهاية باستخدام مفترض ١٥ - ٢ ونظرية ١٥ - ٦ . وفي الحالة التي معنا ، إذا كانت  $X' = (1/2, 1/4, \dots, 1/2n, \dots)$  فينتج أن

$$\lim X = \lim X' = \frac{1}{2} \lim X$$

لذلك نستنتج أن  $\lim X = 0$

(ب) نفرض أن  $Y = (y_n)$  متتابعة في  $\mathbb{R}$  المعرفة استنتاجياً بالآتي :

$$n \in \mathbb{N} \text{ عند } y_1 = 1, \quad y_{n+1} = (2y_n + 3)/4$$

الحساب المباشر يوضح أن  $y_1 < y_2 < 2$  إذا كانت  $y_{n-1} < y_n < 2$  حينئذ

$$2y_{n-1} + 3 < 2y_n + 3 < 2 \cdot 2 + 3$$

التي منها ينتج أن  $y_n < n+1 < 2$  بالاستنتاج نجد أن المتتابعة  $Y$  تزايد باطراد ومحدودة من أعلى بالعدد ٢ . وينتج من نظرية التقارب المطرد أن المتتابعة  $Y$  تتقارب إلى نهاية ليست أكبر من العدد ٢ . وفي هذه الحالة ربما لا يكون من السهل تقدير  $y = \lim Y$  بحساب  $\sup \{y_n\}$  . لكن بمجرد معرفتنا بوجود نهاية . فتوجد طريقة أخرى لحساب قيمتها . طبقاً لمفترض ١٥ - ١ يكون عندنا  $y = \lim (y_n) = \lim (y_{n+1})$  باستخدام نظرية ١٥ - ٦ ، يجب أن تحقق النهاية  $y$  العلاقة

$$y = (2y + 3)/4$$

لذلك ، نستنتج أن  $y = \frac{3}{2}$

(ج) بفرض  $Z = (z_n)$  هي المتتابعة في  $\mathbb{R}$  والمعرفة بالآتي

$$n \in \mathbb{N} \text{ عند } z_1 = 1, \quad z_{n+1} = \sqrt{2z_n}$$



من الواضح أن  $z_1 < z_2 < 2$  . إذا كانت  $z_n < z_{n+1} < 2$  فإن  $2z_n < 2z_{n+1} < 4$  بحيث أن  $z_{n+1} = \sqrt{2z_n} < z_{n+2} = \sqrt{2z_{n+1}} < 2 = \sqrt{4}$

هذا يوضح أن  $Z$  متتابة متزايدة باطراد ومحدودة من أعلى بالعدد ٢ . وإذن تتقارب  $Z$  إلى العدد  $z$  ويمكن توضيح مباشرة أن  $\sup\{z_n\} = 2$  مما يثبت أن النهاية هي  $z = 2$  وتبادلياً يمكننا استعمال الطريقة في المثال السابق . وبمعرفة أن المتتابة لها نهاية  $z$  ، نستنتج من العلاقة  $z_{n+1} = \sqrt{2z_n}$  أن  $z$  يجب أن تحقق  $z = \sqrt{2z}$  . لإيجاد الجذور لهذه المعادلة الأخيرة ، نجد أنه بالتربيع نحصل على  $z^2 = 2z$  والتي جذراها هما 0, 2 . من الواضح أن الصفر لا يمكن أن يكون النهاية ( لماذا ؟ ) ومن ثم هذه النهاية يجب أن تكون مساوية للعدد ٢ .

( د ) بفرض  $U = (u_n)$  هي المتتابة لأعداد حقيقية معرفة بما يلي  $u_n = (1 + 1/n)^n$  حيث  $n \in \mathbb{N}$  باستخدام نظرية ذات الحدين ، يمكننا أن نكتب

$$u_n = 1 + \frac{n}{1} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1) \dots 2 \cdot 1}{n!} \frac{1}{n^n}$$

بقسمة قوى  $n$  في بسوط معاملات ذات الحدين ، نحصل على

$$u_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

وبتعبير  $u_{n+1}$  بنفس الطريقة ، يكون لدينا

$$u_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

لاحظ أن التعبير لـ  $u_n$  يحتوي على  $n + 1$  حداً ، والتعبير لـ  $u_{n+1}$  يحتوي على  $n + 2$  حداً . يوضح اختياراً أولياً أن كل حد في  $u_n$  ليس أكبر من الحد المناظر في  $u_{n+1}$  والآخر يزيد بمقدار موجب واحد . لذلك يكون لدينا

$$u_1 < u_2 < \dots < u_n < u_{n+1} < \dots$$

لتوضيح أن المتتابة محدودة ، نلاحظ أنه إذا كانت  $p = 1, 2, \dots, n$  فإن

$(1-p/n) < 1$  . وبالإضافة إلى ذلك ( لماذا ؟ ) بحيث أن  $p! \leq 2^{p-1}$  من التعبير السابق لحد  $u_n$  ، هذه التقديرات تعطى

$$2 < u_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3, \quad n > 2$$

من ذلك ينتج أن المتتابة المطردة  $U$  محدودة من أعلى بالعدد ٣ .

تدل نظرية التقارب المطرد على أن المتتابة  $U$  تقرب من عدد حقيقى قيمته الذى على الأكثر ٣ . وكما هو محتمل معروف جداً للقارئ أن نهاية  $U$  هو العدد الأساسى  $e$  وبتكرار حساباتنا يمكننا إيجاد تقريبات قياسية للقيمة  $e$  ولكن لا يمكننا بهذه الطريقة حسابها بالضبط . حيث أنها غير قياسية بالرغم من إمكانية حسابها لأرقام عشرية كثيرة على حسب المطلوب . ( هذا يوضح أن نتيجة مثل نظرية التقارب المطرد التى تقرّر وجود نهاية المتتابة فقط يمكن أن يكون لها استعمال هام حتى ولو كانت القيمة المنصوبة للنهية لا يمكن الحصول عليها بسهولة ) .

### نظرية بولتزانو — فيرشتراس :

نظرية التقارب المطرد مفيدة بدرجة غير عادية وهامة ، ولكن من عيوبها أنها تستخدم فقط لمتتابات مطردة . ولذلك يلى بنا إيجاد شرط يضمن تقارباً في  $R$  أو  $R^p$  بدون استخدام خاصية الاطراد . هذا الشرط المرغوب هو معيار كوشى والذى سيقدم فيما بعد . ولكن سنعطى أولاً صورة لنظرية بولتزانو فيرشتراس ١٠ - ٦ التى تستعمل بوجه خاص للمتتابات .

١٦ - ٤ نظرية بولتزانو — فيرشتراس . متتابة محدودة في  $R^p$  لها متتابة جزئية تقاربية .

البرهان . بفرض  $X = (x_n)$  متتابة محدودة في  $R^p$  . إذا كان يوجد فقط عدد محدود لقيم مميزة في المتتابة  $X$  ، فإن أحد هذه القيم على الأقل يجب أن يحدث مراراً بدرجة لا نهائية . إذا عرفنا متتابة جزئية للمتتابة  $X$  باختيار هذا المنصر في كل مرة عند ظهوره فإننا على متتابة جزئية تقاربية للمتتابة  $X$  .

ومن جهة أخرى ، إذا كانت المتتابة  $X$  تحوى عدداً لا نهائياً من قيم مميزة في  $R^p$  ، حينئذ — بما أن هذه النقط محدودة — ، تدل نظرية بولتزانو فيرشتراس ١٠ - ٦ للفتات على أنه يوجد على الأقل نقطة تجميع واحدة ولتكن  $x^*$  نفرض أن  $x_n$  هو عنصر من  $X$  بحيث أن

$$\|x_{n_1} - x^*\| < 1$$

نعتبر الجوار  $V_2 = \{y : \|y - x^*\| < \frac{1}{2}\}$  بما أن النقطة  $x^*$  نقطة تجميع للفترة  $S_1 = \{x_m : m \geq 1\}$  ، فهي أيضاً نقطة تجميع للفترة  $S_2 = \{x_m : m > n_1\}$  والتي نحصل عليها بحذف عدد محدود من عناصر  $S_1$  ( لماذا ؟ ) لذلك يوجد عنصر  $x_{n_2}$  من  $S_2$  ( حيث  $n_1 > n$  ) ينتمى إلى  $V_2$  الآن نفرض  $V_3$  هي الجوار  $V_3 = \{y : \|y - x^*\| < \frac{1}{3}\}$  ونفرض  $S_3 = \{x_m : m > n_2\}$  . وحيث أن  $x^*$  هي نقطة تجميع للمتتابعة  $S_3$  فيجب وجود عنصر  $x_{n_3}$  من  $S_3$  ( حيث  $n_3 > n_2$  ) وينتمى إلى  $V_3$  وبلااستمرار في هذه الطريقة نحصل على متتابعة جزئية  $X' = (x_{n_1}, x_{n_2}, \dots)$  من  $X$  عند

$$\|x_{n_k} - x^*\| < 1/r$$

بحيث أن  $\lim X' = x^*$  . وهو المطلوب إثباته .

١٦ - ٥ نتيجة . إذا كانت  $X = (x_n)$  متتابعة في  $R^p$  ،  $x^*$  هي نقطة تجميع للفترة  $\{x_n : n \in N\}$  فإنه يوجد متتابعة جزئية  $X'$  من  $X$  بحيث تقتارب إلى  $x^*$  .

وفي الحقيقة ، هذا هو ما أثبتته الجزء الثاني من برهان ١٦ - ٤

### مقاييس كوشي :

ندخل الآن مفهوماً هاماً عن متتابعة كوشي في  $R^p$  . ونتيجة هذا هي أن المتتابعة في  $R^p$  تكون تقاربية إذا وإذا فقط كانت متتابعة كوشي .

١٦ - ٦ تعريف . متتابعة  $X = (x_n)$  في  $R^p$  يقال إنها متتابعة كوشي في حالة أنه لكل  $\varepsilon > 0$  يوجد عدد طبيعي  $M(\varepsilon)$  بحيث أنه لجميع

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon \quad \text{يكون} \quad m, n \geq M(\varepsilon)$$

لكي نعاون الدافع إلى مفهومية متتابعة كوشي فإننا سوف نوضح أن كل متتابعة تقاربية في  $R^p$  هي متتابعة كوشي .

١٦ - ٧ مفترض . إذا كانت  $\tilde{X} = (x_n)$  هي متتابعة تقاربية في  $R^p$  ، فإن  $X$  هي متتابعة كوشي .

البرهان . إذا كانت  $x = \lim X$  ، حينئذ عند أخذ  $\varepsilon > 0$  فإنه يوجد عدد طبيعي  $K(\varepsilon/2)$  بحيث أنه إذا كانت  $n \geq K(\varepsilon/2)$  فإن  $\|x_n - x\| < \varepsilon/2$  أي أنه إذا كانت  $M(\varepsilon) = K(\varepsilon/2)$  وإذا كانت  $m, n \geq M(\varepsilon)$  فإن

$$\|x_m - x_n\| \leq \|x_m - x\| + \|x - x_n\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

ومن ثم المتتابعة التقاربية  $X$  هي متتابعة كوشي . وهو المطلوب إثباته

ولكى نطبق نظرية بولزانو - فيرشتراس سنحتاج إلى النتيجة الآتية :

١٦-٨ مفترض . متتابعة كوشي في  $R^p$  تكون محدودة .

البرهان . بفرض  $X = (x_n)$  هي متتابعة كوشي وبفرض أن  $\varepsilon = 1$  إذا كانت  $m = M(1)$  و  $n \geq M(1)$  فإن  $\|x_m - x_n\| < 1$  ومن متباينة المثلث فهذا يدل على أن  $\|x_n\| < \|x_m\| + 1$  عند  $n \geq M(1)$  لذلك إذا كانت

$$B = \sup \{\|x_1\|, \dots, \|x_{m-1}\|, \|x_m\| + 1\}$$

حينئذ يكون لدينا  $\|x_n\| \leq B$  لكل  $n \in N$  أى أن متتابعة كوشي  $X$  تكون محدودة . وهو المطلوب إثباته

١٦-٩ مفترض . إذا كانت  $X'$  فئة جزئية لمتتابعة كوشي  $X$  في  $R^p$  متقاربة إلى عنصر  $x$  ، فإن المتتابعة الكلية  $X$  تتقارب إلى  $x$  .

البرهان . حيث أن  $X = (x_n)$  هي متتابعة كوشي . فبأخذ  $\varepsilon > 0$  فإنه يوجد عدد طبيعي  $M(\varepsilon/2)$  بحيث أنه إذا كانت  $m, n \geq M(\varepsilon/2)$  فإن

$$(*) \quad \|x_m - x_n\| < \varepsilon/2$$

إذا كانت المتتابعة  $X' = (x_{n_i})$  تتقارب إلى  $x$  ، فيوجد عدد طبيعي  $K \geq M(\varepsilon/2)$  بحيث ينتمى إلى الفئة  $\{n_1, n_2, \dots\}$  وبعيد أن

$$\|x - x_K\| < \varepsilon/2$$

الآن نفرض  $n$  أى عدد طبيعي بحيث أن  $n \geq M(\varepsilon/2)$  فينتج أن  $(*)$  تكون صحيحة عند هذه القيمة للعدد  $n$  وعند  $m = K$  أى أن

$$\|x - x_n\| \leq \|x - x_K\| + \|x_K - x_n\| < \varepsilon$$

حيث  $n \geq M(\varepsilon/2)$  لذلك تقترب المتتابعة  $X$  من العنصر  $x$  ، الذى هو النهاية للمتتابعة الجزئية  $X'$  . وهو المطلوب إثباته

الآن أصبحنا مستعدين للحصول على المقياس الهام لكوشي . برهاننا قصير خداعاً ولكن القارئ سيلاحظ أن هذا العمل قد سبق أدائه ونحن فقط نضع الأجزاء مع بعضها .

١٦-١٠ معيار تقارب كوشي . متتابعة في  $R^p$  تكون تقاربية إذا وإذا فقط كانت متتابعة كوشي .

البرهان . لوحظ من مفترض ١٦-٧ أن متتابعة تقاربية يجب أن تكون متتابعة كوشي .

وبالعكس ، نفرض أن  $X$  هي متتابعة كوشي في  $R^p$  ينتج من مقترض ١٦ - ٨ أن المتتابعة  $X$  محدودة في  $R^p$  . وحسب نظرية بولتزانو - فيرشتراوس ١٦ - ٤ تكون المتتابعة المحدودة  $X$  لها متتابعة جزئية متقاربة  $X'$  . من مقترض ١٦ - ٩ تتقارب المتتابعة الكلية  $X$  إلى النهاية  $X'$  .

١٦ - ١١ أمثلة . (أ) بفرض أن  $X = (x_n)$  هي المتتابعة في  $R$  والمعرفة

$$x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1}) \quad \text{عند } n > 2.$$

ويمكن توضيح بالاستنتاج أن

$$n \in N \quad \text{عند } 1 \leq x_n \leq 2$$

لكن المتتابعة  $X$  ليست متناقصة باطراد ولا متزايدة باطراد ( في الحقيقة تكون الحدود التي رمزها السفلي فردياً متتابعة متزايدة وتكون حدودها التي رمزها السفلي زوجياً متناقصة ) وبما أن الحدود في المتتابعة تكونت بأخذ المتوسط ، فقد اتضح من قبل أن

$$n \in N \quad \text{عند } |x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

أي أنه إذا كانت  $m > n$  ، فستستخدم متباينة المثلث لنحصل على

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq |x_n - x_{n+1}| + \dots + |x_{m-1} - x_m| \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{2^{m-2}} = \frac{1}{2^{n-1}} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{m-n-1}} \right) < \frac{1}{2^{n-2}} \end{aligned}$$

وبإعطاء  $\varepsilon > 0$  ، فنجد أن إذ اختيرت  $n$  كبيرة بدرجة تجعل  $1/2^n < \varepsilon/4$  وكانت  $m \geq n$  ينتج أن

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

لذلك ،  $X$  هي متتابعة كوشي في  $R$  وبمقياس كوشي تتقارب المتتابعة  $X$  إلى عدد  $x$  . لحساب النهاية نلاحظ أنه بأخذ النهاية في قاعدة التعريف ينتج النتيجة الصحيحة ولكنها غير مفيدة وهي

$$x = \frac{1}{2}(x + x)$$

لكن ، حيث أن المتتابعة  $X$  تتقارب ، فتتقارب المتتابعة الجزئية برموز سفلى فوقية وبلاستنتاج يمكننا إثبات أن

$$x_1 = 1, \quad x_3 = 1 + \frac{1}{2}, \quad x_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}, \dots$$

$$x_{2n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2n-1}}, \dots$$

ومن ذلك ينتج

$$x_{2n+1} = 1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 1/4^n}{1 - 1/4} = 1 + \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{1}{4^n} \right)$$

لذلك ، تتقارب المتتابعة الجزئية بأدلة فردية إلى  $5/3$  ومن ثم المتتابعة الكلية لها نفس النهاية .

(ب) نفرض أن  $X = (x_n)$  هي المتتابعة الحقيقية المعطاة كما يلي

$$x_1 = \frac{1}{1!}, \quad x_2 = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}, \dots, \quad x_n = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}, \dots$$

بما أن هذه المتتابعة ليست متطردة ، فإن احتمالاً مباشراً لنظرية التقارب المطرد ليس ممكنة .  
لاحظ أنه إذا كانت  $m > n$  ، فإن

$$x_m - x_n = \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)!} + \frac{(-1)^{n+3}}{(n+2)!} + \dots + \frac{(-1)^{m+1}}{m!}$$

وبتذكرنا أن  $2^{r-1} \leq r!$  نجد أن

$$|x_m - x_n| \leq \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{m!}$$

$$\leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

لذلك المتتابعة هي متتابعة كوشي في  $R$

(ج) إذا كانت  $X = (x_n)$  هي متتابعة في  $R$  المعرفة بما يلي

$$n \in N \quad \text{عند} \quad x_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

وإذا كانت  $m > n$  ، فإن

$$x_m - x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{m}$$

حيث كل من هذه  $m - n$  حداً يزيد عن  $1/m$  ، هذا الفرق يزيد من  $(m-n)/m = 1 - n/m$  وبوجه خاص ، إذا كانت  $m = 2n$  يكون عندنا

$$x_{2n} - x_n > \frac{1}{2}$$

هذا يوضح أن  $X$  ليست متتابعة كوشي ، ومن ثم نستنتج أن  $X$  تباعدية ( قد برهنا حالا أن « المتسلسلة التوافقية » تباعدية ) .

## تمريعات :

١٦- (أ) بفرض أن  $x_1 \in \mathbb{R}$  تحقق  $x > 1$  وبفرض  $x_{n+1} = 2 - 1/x_n$  عند  $n \in \mathbb{N}$  وضع أن المتتابعة  $(x_n)$  تكون مطردة ومحدودة . ماهي نهايتها ؟

١٦- (ب) بفرض أن  $y_1 = 1$  و  $y_{n+1} = (2 + y_n)^{1/2}$  عند  $n \in \mathbb{N}$  أثبت أن  $(y_n)$  تكون مطردة ومحدودة . ماهي نهايتها ؟

١٦- (ج) بفرض أن  $a > 0$  ، ونفرض أن  $z_1 > 0$  . عرف  $z_{n+1} = (a + z_n)^{1/2}$  عند  $n \in \mathbb{N}$  أثبت أن  $(z_n)$  تتقارب .

١٦- (د) إذا كانت  $a$  تحقق  $0 < a < 1$  . وضع أن المتتابعة  $X = (a^n)$  تقاربية . بما أن  $Y = (a^{2^n})$  هي فئة جزئية ، فيكون لدينا

$$\lim X = 0 \text{ وأن } \lim X = \lim Y = (\lim X)^2$$

١٦- (هـ) وضع أن كل متتابعة في  $\mathbb{R}$  يكون لها إما متتابعة جزئية متزايدة باطراد أو متتابعة جزئية متناقصة باطراد .

١٦- (و) استخدم تمرين ١٦-هـ لبرهن نظرية بولتزانو- فيرشتراس للمتتابعات في  $\mathbb{R}$  .

١٦- (ز) حدد التقارب أو التباعد للمتتابعة  $(x_n)$  حيث

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \text{ عند } n \in \mathbb{N}$$

١٦- (ح) بفرض أن  $X = (x_n)$  ،  $Y = (y_n)$  متتابعتين في  $\mathbb{R}^p$  وبفرض  $Z = (z_n)$

$$متتابعة مختلطة بالآتي  $z_1 = x_1, z_2 = y_1, \dots, z_{2n} = x_n, z_{2n+1} = y_n, \dots$$$

هل صحيح أن  $Z$  تتقارب إذا وإذا فقط كانت  $X$  ،  $Y$  تقساربتين وكان

$$\lim X = \lim Y$$

١٦- (ط) وضع مباشرة أن المتتابعات الآتية هي متابعات كوشي :

$$(1) \left(\frac{1}{n}\right) \quad (ب) \left(\frac{n+1}{n}\right) \quad (ج) \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$$

١٦- (ي) وضع مباشرة أن المتتابعات الآتية ليست متابعات كوشي :

$$(1) ((-1)^n) \quad ، \quad (ب) (n + (-1)^n/n) \quad ، \quad (ج) (n^2)$$

١٦- (ك) بفرض أن  $X = (x_n)$  هي متتابعة لأعداد حقيقية موجبة مضبوطة ، وبفرض

$$\lim (x_{n+1}/x_n) = L \text{ وأن } 0 < \varepsilon < L . \text{ وضع أنه يوجد } A > 0, B > 0$$

و  $K \in \mathbb{N}$  بحيث أن  $A(L - \varepsilon)^n \leq x_n \leq B(L + \varepsilon)^n$  عند  $n \geq K$  ومن ذلك أثبت أن

$$(x_n^{1/n}) = L$$

١٦- (ل) استخدم مثال ١٦-٣ (د) والتمرين السابق المتتابعة  $(n^n/n!)$  لتوضح أن  $(n/(n!))^{1/n} = e$

١٦- (م) أثبت التقارب وأوجد النهايات للمتتابعات الآتية :

(١)  $((1+1/n)^{n+1})$  ، (ب)  $((1+1/2n)^n)$

(ج)  $((1+2/n)^n)$  ، (د)  $((1+1/(n+1))^{3n})$

١٦- (ن) بفرض أن  $0 < a_1 < b_1$  وعرف عند  $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = (a_n b_n)^{1/2}, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

بالاستنتاج وضح أن  $a_n < b_n$  . وضح أن كلا من  $(a_n)$  و  $(b_n)$  تتقارب إلى نفس النهاية .

١٦ (س) اعط برهاناً لنظرية تقاطع كانتور ١١-٤ بأخذ نقطة  $x_n \in F_n$  واستخدام نظرية بولزانو-فيوشراس ١٦-٤ .

١٦- (ع) اعط برهاناً لنظرية أقرب نقطة ١١-٦ باستخدام نظرية بولزانو-فيوشراس ١٦-٤ .

١٦- (ف) أثبت أنه إذا كانت  $K_1, K_2$  فئتين جزئيتين مدمجتين في  $R^n$  فإنه يوجد فقط  $x_1 \in K_1, x_2 \in K_2$  بحيث أنه إذا كانت  $z_1 \in K_1, z_2 \in K_2$  فإن  $\|z_1 - z_2\| \geq \|x_1 - x_2\|$

## مشروع :

١٦-  $\alpha$  في هذا المشروع ، نفرض أن  $c_0$  و  $m$  تدل على مجموعات المتتابعات الحقيقية التي قدمت في الخطوة ١٥- $\beta$  وبفرض أن  $d$  تشير إلى المترى المعرف في جزء (د) لتلك الخطوة :

(١) إذا كانت  $r = 0, r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$  و  $r \in I$  هي مفكوكها العشري ، نعتبر المتغير  $X_r = (r_n)$  في  $m$  استنتج أنه توجد فئة جزئية غير معدودة  $A$  من  $m$  بحيث أنه إذا كانت  $X_r, X_s$  هما عنصران مختلفان من  $A$  ، فإن  $d(X_r, X_s) \geq 1$

(ب) نفرض أن  $B$  هي فئة جزئية من  $c$  بخاصية أنه إذا كانت  $X, Y$  عنصرين مختلفين من  $B$  ، فإن  $d(X, Y) \geq 1$  أثبت أن  $B$  هي فئة معدودة .

(ج) إذا كانت  $j \in \mathbb{N}$  وبفرض أن  $Z_j = (z_{nj} : n \in \mathbb{N})$  هي المتتابعة حيث كل من العناصر الأولى  $j$  هو واحد صحيح وكل من عناصرها الباقية هو صفر . لاحظ أن  $Z_j$  تنتمي لكل من الفراغات المترية  $c_0, c, m$  وأن  $d(Z_j, Z_k) = 1$  عند  $j \neq k$  . وضح أن المتتابعة  $(Z_j : j \in \mathbb{N})$  مطردة بمعنى أن كل متتابعة الأحاد  $(z_{nj} : j \in \mathbb{N})$  مطردة . وضح أن المتتابعة  $(Z_j)$  ليست تقاربية بالنسبة للمترى  $d$  في أى من هذه الفراغات الثلاثة .



(د) أثبت أنه يوجد متتابة  $(X_i)$  في  $c_0$  و  $c$  و  $m$  وتكون محدودة ( بمعنى أنه يوجد مقدار ثابت  $K$  حيث أن  $d(X_i, 0) \leq K$  لكل  $i \in \mathbb{N}$  لكن ليس لها متتابة جزئية تقاربية .

(هـ) ( إذا كانت  $d$  هو مترى على الفئة  $M$  ، فنقول أن المتتابة  $(X_i)$  في  $M$  هي متتابة كوشى إذا كان يوجد لكل  $\varepsilon > 0$  يوجد  $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  بحيث أن  $d(X_i, X_k) < \varepsilon$  عندما  $j, k \geq K(\varepsilon)$  فنقول أن  $M$  هي تامة بالنسبة إلى  $d$  في حالة كون كل متتابة في  $M$  تقرب إلى عنصر من  $M$  ) . أثبت أن الفئات  $c_0$  و  $c$  و  $m$  تكون تامة بالنسبة للمترى الذى اعتبرناه .

(و) بفرض  $f$  هي المجموعة لكل متتابعات حقيقية والى لها فقط عدد محدود من عناصر غير صفرية وعرف  $d$  كما سبق . أثبت أن  $d$  هي مترى على  $f$  ، لكن  $f$  ليست تامة بالنسبة إلى  $d$  .

## الباب السابع عشر — متتابعات الدوال :

قد اعتبرنا في الأبواب الثلاثة السابقة تقارب متتابعات لعناصر من  $\mathbb{R}^p$  ، وفي الباب الحالى سنتبر متتابعات الدوال . بعد بعض تمهيدات بسيطة ، سنقدم تعبيراً رقيقاً إلى حد ما ، لكنه أساس ، عن موضوع التقارب المنتظم لمتتابعات الدوال .

بفرض أن  $D \subseteq \mathbb{R}^p$  مطاة ونفرض أنه لكل عدد طبعى  $n \in \mathbb{N}$  توجد دالة  $f_n$  ينطاق  $D$  ومدى في  $\mathbb{R}^q$  سنقول أن  $(f_n)$  هي متتابة دوال على  $D \subseteq \mathbb{R}^p$  إلى  $\mathbb{R}^q$  . ومن الواجب فهم أنه لأى نقطة  $x$  في  $D$  تعطى متتابة دوال مثل هذه متتابة عناصر في  $\mathbb{R}^q$  أى المتتابة

$$(f_n(x)) \quad (17.1)$$

التي يمكن الحصول عليها بحساب كل من الدوال عند  $x$  . المتتابة ١٧ - ١ ربما تتقارب عند نقط معينة  $x$  في  $D$  عند نقط أخرى في  $D$  فإن هذه المتتابة ربما تتباعد . لكل من هذه النقط  $x$  التي عندها  $D$  تتقارب المتتابة (١٧ - ١) توجد ، بنظرية ١٤-٥ ، نقطة محددة وحيدة من  $\mathbb{R}^q$  ، وبوجه عام ، ستتمتع قيمة هذه النهاية عند وجود هذا الاختيار للنقطة  $x$  وبهذه الطريقة سنظهر دالة نطاقها يتكون من جميع نقط  $x$  في  $D \subseteq \mathbb{R}^p$  التي عندها (١٧ - ٢) تتقارب المتتابعات (١٧ - ١) في  $\mathbb{R}^q$  .

الآن سنجمع هذه الكلمات التقديمية في تعريف أصولى لتقارب متتابة الدوال .

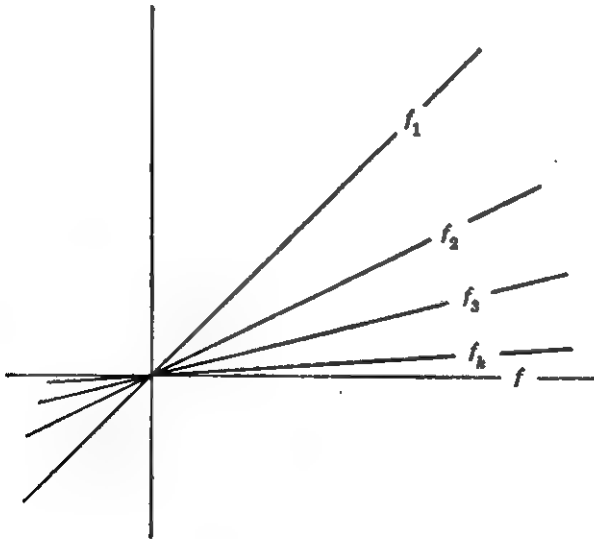
١٧ - ١ تعريف . بفرض  $(f_n)$  متتابعة دالة في  $D \subseteq \mathbb{R}^p$  إلى  $\mathbb{R}^q$  ، ونفرض أن  $D_0$  هي فئة جزئية من  $D$  ، ونفرض أن  $f$  دالة نطاقها يحتوي  $D_0$  ومداها في  $\mathbb{R}^q$  . نقول أن المتتابعة  $(f_n)$  تتقارب في  $D_0$  إلى  $f$  ، إذا كانت لكل  $x$  في  $D_0$  المتتابعة  $(f_n(x))$  تتقارب في  $\mathbb{R}^q$  إلى  $f(x)$  . في هذه الحالة تسمى الدالة  $f$  النهاية في  $D_0$  للمتتابعة  $(f_n)$  . عند وجود مثل هذه الدالة نقول أن المتتابعة  $(f_n)$  تتقارب إلى  $f$  في  $D_0$  ، أو ببساطة ، تكون المتتابعة تقاربية في  $D_0$  .

ينتج من نظرية ١٤ - ٥ أن ، ما عدا تغير يمكن في النطاق  $D_0$  ، نهاية الدالة وحيدة التحديد . عادة ، نختار  $D_0$  بحيث تكون أكبر فئة ممكنة أي ، الفئة لكل  $x$  في  $D$  التي عندها ( ١٧ - ١ ) تتقارب . ولكي نرمز إلى أن المتتابعة  $(f_n)$  تتقارب في  $D_0$  إلى  $f$  نكتب أحياناً

$$f = \lim (f_n) \text{ على } D_0 \text{ أو } f_n \rightarrow f \text{ على } D_0$$

سنعتبر الآن بعض أمثلة لهذه الفكرة . وبالتبسيط ، سنعالج الحالة الخاصة  $p = q = 1$  .

١٧ - ٢ أمثلة . (أ) لكل عدد طبيعي  $n$  ، نفرض أن  $f_n$  معرفة عند  $x$  في  $D = \mathbb{R}$  بأنها  $f_n(x) = x/n$  . نفرض أن  $f$  معرفة لكل  $x$  في  $D = \mathbb{R}$  بالتعريف  $f(x) = 0$  ( انظر شكل ١٧ - ١ ) . النص بأن المتتابعة  $(f_n)$  تتقارب في  $\mathbb{R}$  إلى  $f$  يكافئ النص بأنه لكل



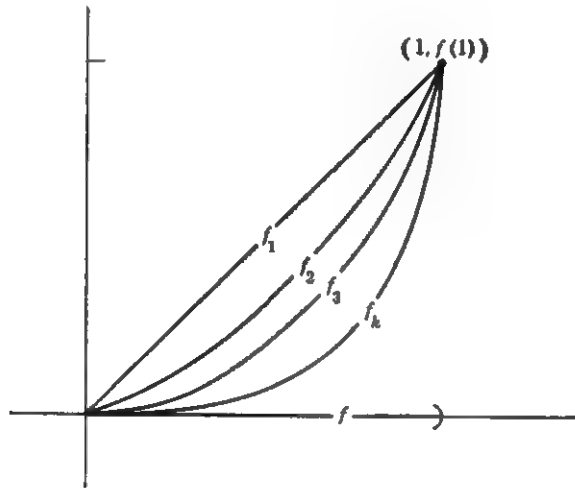
(شكل ١٧ - ١)

عدد حقيقى  $x$  تتقارب المتتابة العددية  $(x/n)$  إلى صفر . والملاحظة أن هذه هي الحالة نستخدم مثال ١٤ - ٨ (أ) ونظرية ١٥ - ٦ (ب)

(ب) بفرض أن  $D = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$  ونفرض لكل عدد طبيعى  $n$  أن المتتابة  $f_n$  معرفة بالتعريف  $f_n(x) = x^n$  لكل  $x$  في  $D$  ونفرض أن  $f$  معرفة بالآتي

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, & 0 \leq x < 1 \\ &= 1, & x = 1 \end{aligned}$$

( انظر شكل ٢٧-٢ ) . من الواضح أن عندما  $x = 1$  حينئذ  $f_n(x) = f_n(1) = 1^n = 1$  بحيث



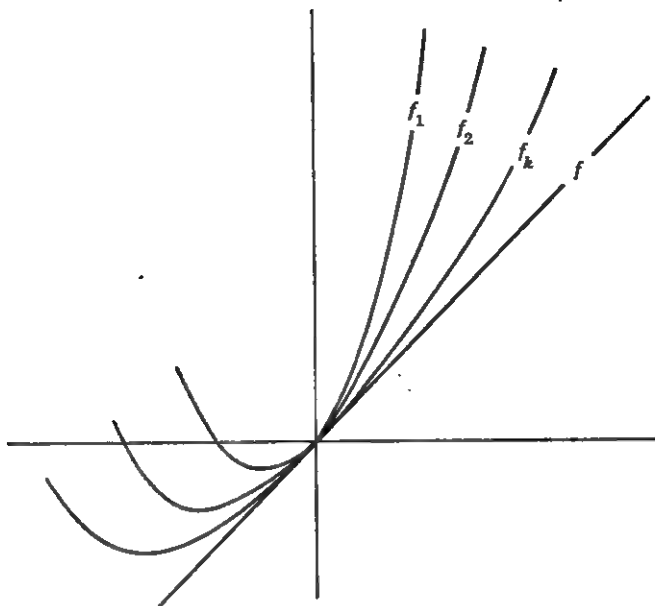
( شكل ١٧-٢ )

أن  $f_n(1) \rightarrow f(1)$  . محدد غسناً في مثال ١٤ - ٨ (ج) أنه إذا كانت  $0 \leq x < 1$  فإن  $f_n(x) = x^n \rightarrow 0$  لذلك ، نستنتج أن  $(f_n)$  تتقارب في  $D$  إلى  $f$  ( ليس من الصعب أن نبرهن أنه إذا كانت  $x > 1$  فإن  $(f_n(x))$  لا تتقارب بالمرّة )

(ج) بفرض  $D = \mathbb{R}$  ونفرض لكل عدد طبيعى  $n$  ، أن  $f_n$  هي الدالة المعرفة عند  $x$  في  $D$  بأنها

$$f_n(x) = \frac{x^2 + nx}{n}$$

ونفرض  $f(x) = x$  . ( انظر شكل ١٧-٢ ) . بما أن  $f_n(x) = (x^2/n) + x$  فينتج من مثال ١٤ - ٨ (أ) ونظرية ١٥ - ٦ (ب) أن  $(f_n(x))$  تتقارب إلى  $f(x)$  لجميع  $x \in \mathbb{R}$

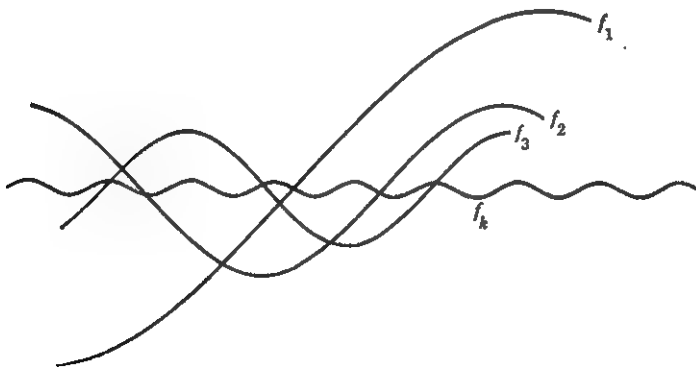


( شكل ١٧-٢ )

( د ) بفرض أن  $D = \mathbb{R}$  ، ولكل عدد طبيعي  $n$  نفرض أن  $f_n$  معرفة بأنها

$$f_n(x) = (1/n) \sin(nx + n)$$

( انظر شكل ١٧-٤ ) ( تعريف عتيف الدالة الجيب لا نحتاجه هنا ، وفي الحقيقة ، كل ما نريده هو أن  $|\sin y| \leq 1$  عند أى عدد حقيقى  $y$  ) . إذا كانت  $f$  معرفة بأنها دالة الصفر  $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$  حينئذ  $f = \lim (f_n)$  في  $\mathbb{R}$  . وفي الحقيقة لكل أى عدد حقيقى  $x$  ،



( شكل ١٧-٤ )

يكون لدينا

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} |\sin(nx + n)| \leq \frac{1}{n}$$

إذا كانت  $\varepsilon > 0$  فإنه يوجد عدد طبيعي  $K(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $n \geq K(\varepsilon)$  فإن  $1/n < \varepsilon$  . ومن ثم لكل  $n$  نستنتج أن

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

مهما كانت قيمة  $x$  . لذلك نستنتج أن المتتابعة  $(f_n)$  تتقارب إلى  $f$  ( لاحظ أنه باختيار  $n$  كبيرة كبراً كافياً ، فيمكننا جعل الفرق  $|f_n(x) - f(x)|$  أقل من  $\varepsilon$  لجميع قيم  $x$  في وقت واحد ) .

نصيب النص الآتي ١٧ - ١ جزئياً لتقرير تعريف ١٧ - ١ وجزئياً لتمهيد الطريق لفكرة هامة عن تقارب منتظم .

١٧ - ٢ مفروض . متتابعة  $(f_n)$  لدوال في  $D \subseteq R^p$  إلى  $R^q$  تتقارب إلى دالة في  $D_0 \subseteq D$  إذا وإذا فقط كان يوجد لكل  $\varepsilon > 0$  وكل  $x$  في  $D_0$  عدد طبيعي  $K(\varepsilon, x)$  بحيث أنه لكل  $n \geq K(\varepsilon, x)$  فإن

$$(17.2) \quad \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

بما أن هذه مجرد نص ثان لتعريف ١٧ - ١ لذلك سوف لا نتمتع في تفاصيل البرهان . لكن سنتركها كتمرين للقارئ . نرغب فقط في الإشارة إلى أن قيمة  $n$  المطلوبة في متباينة ( ١٧ - ٢ ) تتوقف ، بوجه عام ، على كل من  $\varepsilon > 0$  و  $x \in D_0$  . سيلاحظ قارئ متيقظ ثواباً أنه في أمثلة ١٧ - ٢ ( أ - ج ) كانت قيمة  $n$  المطلوبة للحصول على ( ١٧ - ٢ ) تعتمد على كل من  $\varepsilon > 0$  و  $x \in D_0$  لكن في مثال ١٧ - ٢ ( د ) المتباينة ( ١٧ - ٢ ) يمكن أن تتحقق لكل  $x$  في  $D_0$  على شرط أن نختار  $n$  كبيرة كبراً كافياً ونبحث اعتماداً على  $\varepsilon$  فقط .

وبالضبط هذا الفرق الدقيق نوعاً ما الذي يميز بين مدلول التقارب المادي للمتتابعة الدوال ( بمعنى تعريف ١٧ - ١ ) وتقارب منتظم الذي نعرفه الآن .

١٧ - ٤ تعريف . متتابعة  $(f_n)$  لدوال في  $D \subseteq R^p$  إلى  $R^q$  تتقارب بانتظام في فئة جزئية  $D_0$  من  $D$  إلى دالة  $f$  في حالة كون أنه لكل  $\varepsilon > 0$  يوجد عدد طبيعي  $K(\varepsilon)$  ( متوقف على  $\varepsilon$  لكن ليس متوقفاً على  $x \in D_0$  ) بحيث أنه لكل  $n \geq K(\varepsilon)$  ، فإن  $x \in D_0$

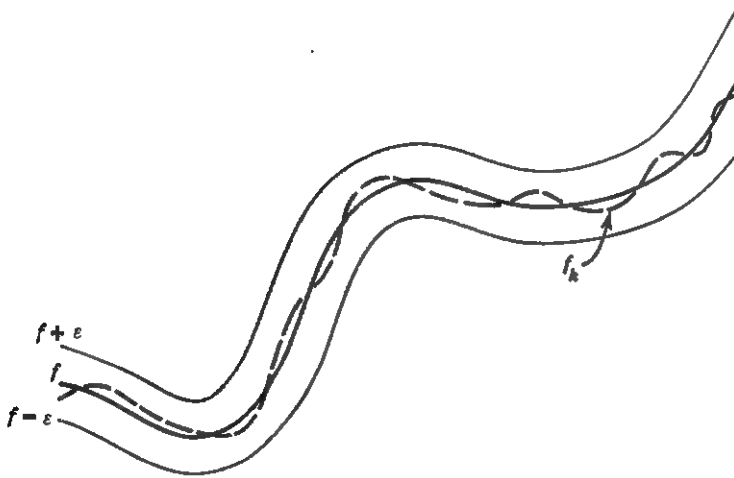
$$(17.3) \quad \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

في هذه الحالة نقول إن المتتابعة تقاربية بانتظام في  $D_0$  (انظر شكل ١٧ - ٥) .

ينتج مباشرة أنه إذا كانت المتتابعة  $(f_n)$  تقاربية بانتظام على  $D_0$  إلى  $f$  ، حينئذ هذه متتابعة دوال أيضاً تتقارب إلى  $f$  بمعنى تعريف ١٧ - ١ وكون المكنس لا يكون صحيحاً يتضح بفحص دقيق لأمثلة ١٧-٢ (أ - ج) ، ستعطى أمثلة أخرى فيما بعد . وقبل أن نستمر يكون من المفيد أن نقرر الشرط اللازم والكاف للمتتابعة  $(f_n)$  لكي تفشل في أن تتقارب بانتظام في  $D_0$  إلى  $f$  .

١٧ - ٥ مفترض . متتابعة  $(f_n)$  لا تتقارب بانتظام في  $D_0$  إلى  $f$  إذا وإذا فقط كان يوجد عند عدد ما  $\varepsilon_0 > 0$  حيث  $\varepsilon_0$  متتابعة جزئية  $(f_{n_k})$  من  $(f_n)$  ومتتابعة  $(x_k)$  في  $D_0$  بحيث أن

$$(17.4) \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{لكل} \quad \|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)\| \geq \varepsilon_0$$



( شكل ١٧ - ٥ )

برهان هذه النتيجة يتطلب فقط من القارئ أن يبنى تعريف ١٧ - ٤ . سيتذكر كثيرين جوهرى للقارئ . المفترض السابق مفيد لتوضيح أن الأمثلة ١٧ - ٢ (أ - ج) لا تتقارب بانتظام في الفئات المعطاة  $D_0$  .

١٧ - ٦ أمثلة . (أ) نعتبر مثال ١٧ - ٢ (أ) . إذا كانت  $n_k = k$  و  $x_k = k$  ، فإن  $f_k(x_k) = 1$  بحيث أن

$$|f_k(x_k) - f(x_k)| = |1 - 0| = 1$$

هذا يوضح أن المتتابعة  $(f_n)$  لا تتقارب بانتظام في  $R$  إلى  $f$ .

(ب) نعتبر مثال ١٧ - ٢ (ب). إذا كانت  $n_k = k$  ،  $x_k = (\frac{1}{2})^{1/k}$  فإن

$$|f_k(x_k) - f(x_k)| = |f_k(x_k)| = \frac{1}{2}$$

لذلك ، نستنتج أن المتتابعة  $(f_n)$  لا تتقارب بانتظام في  $[0, 1]$  إلى  $f$ .

(ج) نعتبر مثال ١٧ - ٢ (ج). إذا كانت  $n_k = k$  ،  $x_k = k$  حينئذ .

$$|f_k(x_k) - f(x_k)| = k$$

ما يثبت أن  $(f_k)$  لا تتقارب بانتظام في  $R$  إلى  $f$ .

(د) نعتبر مثال ١٧ - ٢ (د) فيما أن

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 1/n$$

لكل  $x$  في  $R$  ينتج أن المتتابعة  $(f_n)$  تتقارب بانتظام في  $R$  إلى  $f$

محمد يوسف الدويهي

### العمود المنتظم :

من المفيد غالباً في مناقشة التقارب المنتظم استعمال عمود معين في فراغ متجه الدوال .

إذا كانت  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^q$  ،  $D \subseteq \mathbb{R}^p$  نقول أن  $f$  محدودة في حالة وجود  $M > 0$  بحيث أن  $\|f(x)\| \leq M$  لكل  $x \in D$  . إذا كانت  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^q$  محدودة ، حينئذ ينتج أن العدد  $\|f\|_D$  المعروف بواسطة

$$(17.5) \quad \|f\|_D = \sup \{\|f(x)\| : x \in D\}$$

يوجد في  $R$  . ( نلاحظ أن العمود في الطرف الأيمن من هذه المعادلة هو العمود في الفراغ  $\mathbb{R}^q$  .

١٧ - ٧ تعريف . إذا كانت  $D \subseteq \mathbb{R}^p$  فإن المجموعة لجميع الدوال المحدودة في  $D$  إلى  $\mathbb{R}^q$  يرمز لها بالرمز  $B_{pq}(D)$  أو  $(p$  و  $q$  إذا كانتا مفهوميتين ) فيرمز لها بالرمز  $B(D)$  .

في الفراغ  $B_{pq}(D)$  نعرف قيمة جميع لدائتين  $f, g$  ، الضرب العددي إلى  $c \in R$  ،  $f$  ، بأنه

$$(17.6) \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (cf)(x) = cf(x)$$

لكل  $x \in D$  . نعرف دالة الصفر بأنها الدالة  $0: D \rightarrow \mathbb{R}^q$  المعرفة لجميع  $x \in D$  بواسطة  $0(x) = 0$  . نربط الآن هذا المصطلح من المدلولات المذكورة في باب ٨ .

١٧ - ٨ مفترض . (أ) الفئة  $B_{pq}(D)$  هي فراغ المتجه تحت عمليات المتجه المعرفة في المعادلة (١٧ - ٦) .

(ب) الدالة  $\|f\|_D \mapsto f$  المعرفة في  $B_{pq}(D)$  في معادلة (١٧ - ٥) هي عمود في  $B_{pq}(D)$

البرهان . يتطلب برهان الجزء :

(أ) حسابات روتينية فقط لبرهان الجزء (ب) نحتاج لإثبات أربع خواص لعمود معطى في تعريف ٨ - ٥ .

(i) من الواضح من (١٧ - ٥) أن  $\|f\|_D \geq 0$  .

(ii) وواضح أن  $\|0\|_D = \sup \{\|0(x)\| : x \in D\} = 0$  ، وبالعكس إذا كانت  $\|f\|_D = 0$  فإننا بما أن  $0 \leq \|f(x)\| \leq \|f\|_D = 0$  نستنتج أن  $\|f(x)\| = 0$  وإذن  $f(x) = 0$  لكل  $x \in D$  بحيث أن  $f = 0$  .

(iii) الحقيقة التي نقول أن  $\|cf\|_D = |c| \|f\|_D$  قد اتضحت من قبل .

(iv) بما أن

$$\|(f+g)(x)\| = \|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \\ \leq \|f\|_D + \|g\|_D$$

لكل  $x \in D$  فينتج أن  $\|f\|_D + \|g\|_D$  هي الحد الأعلى للفئة  $\{\|(f+g)(x)\| : x \in D\}$  لذلك يكون

$$\|f+g\|_D = \sup \{\|(f+g)(x)\| : x \in D\}$$

وهو المطلوب إثباته  $\leq \|f\|_D + \|g\|_D$  .

أحياناً يسمى العمود  $\|f\|_D \mapsto f$  بالعمود المنتظم (أو العمود الأعلى) في  $B_{pq}(D)$  سنوضح الآن أن التقارب المنتظم لدوال في  $B_{pq}(D)$  يكافئ التقارب في العمود المنتظم .

١٧ - ٩ نظرية . متتابعة  $(f_n)$  في  $B_{pq}(D)$  تقارب بانتظام في  $D$  إلى  $f \in B_{pq}(D)$  إذا وإذا فقط كان

$$\|f_n - f\|_D \rightarrow 0$$

البرهان . إذا كانت المتتابعة  $(f_n)$  تقارب بانتظام إلى  $f$  في  $D$  ، فإنه يوجد لكل  $\varepsilon > 0$  عدد طبيعي  $K(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $n \geq K(\varepsilon)$  فإن  $x \in D$   $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$  وهذا يدل على أن

$$\|f_n - f\|_D = \sup \{\|(f_n - f)(x)\| : x \in D\} \leq \varepsilon$$

حيث  $\varepsilon < 0$  اختيارية ، هذا يضمن أن  $\|f_n - f\|_D \rightarrow 0$  .



وبالعكس إذا كانت  $\|f_n - f\|_D \rightarrow 0$  فحينئذ بأخذ  $\varepsilon > 0$  يوجد  $K(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $n \geq K(\varepsilon)$  فإن  $\|f_n - f\|_D \leq \varepsilon$ . هذا يدل أنه إذا كانت  $x \in D$  فإن

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \|(f_n - f)(x)\| \leq \|f_n - f\|_D \leq \varepsilon$$

لذلك تتقارب المتتابعة  $(f_n)$  بانتظام في  $D$  إلى  $f$ . وهو المطلوب إثباته

الآن نوضح كيفية استعمال هذا المفترض كأداة لفحص متتابعة الدوال لتقارب منتظم نلاحظ أولاً أن الممود قد عرف فقط لدوال محدودة. ومن ثم يمكننا استخدامه (مباشرة على الأقل) إذا كانت المتتابعة تتكون من دوال محدودة فقط.

١٧ - ١٠ أمثلة. (أ) لا يمكننا استخدام مفترض ١٧ - ٩ للمثال الموجود في ١٧ - ٢ (أ)، المثال الموجود ١٧ - ٦ (أ) لأن الدوال  $f_n$ ، المعرفة بالتعريف  $f_n(x) = x/n$  ليست محدودة في نطاقها  $R$ .

لغرض التوضيح، نغير النطاق للحصول على متتابعة محدودة في النطاق الجديد. من المناسب أن نفرض أننا أخذنا  $E = [0, 1]$  مع أن المتتابعة  $(x/n)$  لا تتقارب بانتظام إلى الدالة صفر في النطاق  $R$  (كما رأينا في مثال ١٧ - ٦ (أ))، فإن التقارب يكون منتظماً في  $E = [0, 1]$ . وملاحظة هذا. نحسب

$$\|f_n - f\|_E = \sup \left\{ \left| \frac{x}{n} - 0 \right| : 0 \leq x \leq 1 \right\} = \frac{1}{n}$$

$$\|f_n - f\|_E = 1/n \rightarrow 0$$

(ب) نعتبر الآن المتتابعة التي نوقشت في مثال ١٧ - ٢ (ب)، مثال ١٧ - ٦ (ب) هنا  $D = [0, 1]$ ،  $f_n(x) = x^n$ ، ونهاية الدالة  $f$  تكون مساوية صفراً لكل  $0 \leq x < 1$  ومساوية للواحد الصحيح عند  $x = 1$  بحساب الممود للفرق  $f_n - f$ ، يكون لدينا

$$n \in \mathbb{N} \quad \text{عند} \quad \|f_n - f\|_D = \sup \begin{cases} x^n, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases} = 1$$

بما أن هذا الممود لا يقترب من الصفر، نستنتج أن المتتابعة  $(f_n)$  لا تتقارب بانتظام في  $D = [0, 1]$  إلى  $f$ . هذا يبرهن اعتباراتنا السابقة.

(ج) نعتبر مثال ١٧ - ٢ (ج). مرة أخرى لا يمكننا استخدام مفترض ١٧ - ٩ لأن الدوال ليست محدودة. نختار أيضاً نطاقاً أصغر بأخذ  $E = [0, a]$  حيث  $a > 0$ . ما أن

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x^2 + nx}{n} - x \right| = \frac{x^2}{n}$$

ويكون لدينا

$$\|f_n - f\|_E = \sup \{|f_n(x) - f(x)| : 0 \leq x \leq a\} = \frac{a^2}{n}$$

ومن ثم تتقارب المتتابعة بانتظام إلى  $f$  في الفترة  $[0, a]$  . ( لماذا هذا لا يخالف النتيجة التي حصلنا عليها في مثال ١٧ - ٦ (ج) ؟ ) .

(د) بالإشارة إلى مثال ١٧ - ٢ (د) ، نعتبر الدالة  $f_n(x) = (1/n) \sin(nx + n)$  في  $D = \mathbb{R}$  . نهاية الدالة هنا  $f(x) = 0$  لكل  $x \in D$  . ولإثبات التقارب المنتظم لهذه المتتابعة لاحظ أن

$$\|f_n - f\|_D = \sup \{(1/n) |\sin(nx + n)| : x \in \mathbb{R}\}$$

لكن بما أن  $|\sin y| \leq 1$  فنستنتج أن  $\|f_n - f\|_D = 1/n$  . وإذن  $(f_n)$  تتقارب بانتظام في  $\mathbb{R}$  ، كما أثبتنا في مثال ١٧ - ٦ (د) .

أحد المظاهر الأكثر فائدة للمود هو أنه يسهل النص لمعيار كوشي للتقارب المنتظم لمتتابعة دوال محدودة .

١٧ - ١١ معيار كوشي لتقارب منتظم . إذا فرضنا  $(f_n)$  متتابعة الدوال في  $B_{pq}(D)$  فإنه توجد دالة  $f \in B_{pq}(D)$  تتقارب إليها بانتظام  $(f_n)$  ، في  $D$  إذا وإذا فقط كان يوجد لكل  $\varepsilon > 0$  عدد طبيعي  $M(\varepsilon)$  بحيث أنه لكل  $m, n \geq M(\varepsilon)$  ، يكون

$$\|f_m - f_n\|_D < \varepsilon$$

البرهان . نفرض أن المتتابعة  $(f_n)$  تتقارب بانتظام في  $D$  إلى دالة  $f \in B_{pq}(D)$  حينئذ عند  $\varepsilon > 0$  يوجد عدد طبيعي  $K(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $n \geq K(\varepsilon)$  فإن  $\|f_n - f\|_D < \varepsilon/2$  . ومن ثم إذا كانت كلا من  $m, n \geq K(\varepsilon)$  فنستنتج أن

$$\|f_m - f_n\|_D \leq \|f_m - f\|_D + \|f - f_n\|_D < \varepsilon$$

وبالعكس ، نفرض أن معيار كوشي متحقق وأنه عند  $\varepsilon > 0$  يوجد عدد طبيعي  $M(\varepsilon)$  بحيث أن  $\|f_m - f_n\|_D < \varepsilon$  عند  $m, n \geq M(\varepsilon)$  . الآن لكل  $x \in D$  يكون عندنا

$$(17.6) \quad m, n \geq M(\varepsilon) \quad \text{لكل} \quad \|f_m(x) - f_n(x)\| \leq \|f_m - f_n\|_D < \varepsilon$$

وإذن المتتابعة  $[f_n(x)]$  هي متتابعة كوشي في  $\mathbb{R}^q$  وذلك تتقارب إلى عنصر ما من  $\mathbb{R}^q$  . نعرف  $f$  عند  $x$  في  $D$  بأنها

$$f(x) = \lim (f_n(x))$$

من ( ١٧ - ٦ ) نستنتج أنه إذا كانت  $m$  عدداً طبيعياً ثابتاً يحقق  $m \geq M(\varepsilon)$  وإذا كانت  $n$  أى عدد طبيعى حيث  $n \geq M(\varepsilon)$  ، حينئذ لكل  $x$  فى  $D$  . يكون لدينا

$$\|f_m(x) - f_n(x)\| < \varepsilon.$$

إذا استخدمنا مفترض ١٥ - ٨ ينتج أنه إذا كانت  $m \geq M(\varepsilon)$  ،  $x \in D$  فإن

$$\|f_m(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$$

وبما أن  $f_m$  دالة محدودة ، فينتج حالاً من هذا ( لماذا ؟ ) أن  $f$  محدودة ومن ثم فهي تنتمى إلى  $B_{pq}(D)$  . وبالإضافة إلى ذلك نستنتج أن  $(f_n)$  تتقارب بانتظام إلى  $f$  فى  $D$  . وهو المطلوب إثباته .

### تمرينات :

فى هذه التمرينات يمكن استعمال الخواص الأولية لحساب المثلثات والدوال الأسية من المناهج الدراسية السابقة .

١٧ - ( أ ) لكل  $n \in \mathbb{N}$  ، نفرض  $f_n$  معرفة عند  $x > 0$  بأنها  $f_n(x) = 1/(nx)$  لأى قيم للمتغير  $x$  توجد  $\lim (f_n(x))$  ؟ .

١٧ - ( ب ) لكل  $n \in \mathbb{N}$  ، نفرض  $g_n$  معرفة عند  $x \geq 0$  بالنص

$$g_n(x) = nx, \quad 0 \leq x \leq 1/n,$$

$$= \frac{1}{nx}, \quad 1/n < x$$

أثبت أن  $\lim (g_n(x)) = 0$  لكل  $x > 0$  .

١٧ - ( ج ) وضح أن  $\lim ((\cos \pi x)^{2n})$  موجودة لكل قيم  $x$  . ما نهايتها ؟

١٧ - ( د ) وضح أنه إذا عرفنا  $f_n$  على  $\mathbb{R}$  بأنها .

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$$

فإن  $(f_n)$  تتقارب فى  $\mathbb{R}$  .

١٧ - ( هـ ) بفرض  $h_n$  معرفة فى الفترة  $I = [0, 1]$  بالتعريف

$$h_n(x) = 1 - nx, \quad 0 \leq x \leq 1/n,$$

$$= 0, \quad 1/n < x \leq 1$$

وضح أن  $\lim (h_n)$  موجود فى  $I$  .

١٧ - ( و ) بفرض  $g$  معرفة فى  $I$  بأنها

$$g_n(x) = nx, \quad 0 \leq x \leq 1/n,$$

$$= \frac{n}{n-1}(1-x), \quad 1/n < x \leq 1$$

أثبت أن  $\lim (g_n)$  موجود في  $I$ .

١٧- (ز) وضح أنه إذا كانت  $f_n$  معرفة في  $R$  بأنها

$$f_n(x) = \frac{2}{\pi} \text{Arc tan } (nx)$$

فإن  $f = \lim (f_n)$  توجد على  $R$ . في الحقيقة تعطي النهاية بما يلي :

$$f(x) = 1, \quad x > 0,$$

$$= 0, \quad x = 0,$$

$$= -1, \quad x < 0$$

١٧- (ح) وضح أن  $\lim (e^{-nx})$  موجود عند  $x \geq 0$ . أيضاً ابحث وجود  $\lim (xe^{-nx})$

١٧- (ط) نفرض أن  $(x_n)$  متتابعة تقاربية للنقط التي تقع جميعاً مع نهايتها  $x$ ، في فئة  $D \subseteq R^p$ . بفرض أن  $(f_n)$  تتقارب في  $D$  إلى الدالة  $f$ . هل  $f(x) = \lim (f_n(x_n))$  صحيحة ؟

١٧- (ي) ابحث التمرين السابق بالفرض الإضافي وهو أن التقارب للدالة  $(f_n)$  منتظم في  $D$ .

١٧- (ك) أثبت أن التقارب في تمرين ١٧- (أ) ليس منتظماً في الفئة الشاملة للتقارب، لكن يكون منتظماً عند  $x \geq 1$ .

١٧- (ل) وضح أن التقارب في تمرين ١٧- (ب) ليس منتظماً في النطاق  $x \geq 0$ ، لكنه منتظم في فئة  $x \geq c$ ، حيث  $c > 0$ .

١٧- (م) هل التقارب في تمرين ١٧- (د) منتظم في  $R$  ؟

١٧- (ن) هل التقارب في تمرين ١٧- (هـ) منتظم في  $I$  ؟

١٧- (س) هل التقارب في تمرين ١٧- (و) منتظم في  $I$  ؟ هل هو منتظم في  $[c, 1]$  عندما  $c > 0$  ؟

١٧- (ع) هل المتتابعة  $(x^2 e^{-nx})$  متقاربة بانتظام عند  $x \geq 0$  ؟

١٧- (ف) هل المتتابعة  $(xe^{-nx})$  متقاربة بانتظام عند  $x \geq 0$  ؟

١٧- (ص) نفرض أن  $(f_n)$  متتابعة للدوال تتقارب في  $D$  إلى دالة  $f$ . إذا كانت  $A, B$  هما فئتين جزئيتين من  $D$  فإذا علم أن التقارب منتظم في  $A$  وأيضاً في  $B$ ، أثبت أن التقارب يكون منتظماً في  $A \cup B$ .

١٧ - (ق) اعط مثالا لمتابعة  $(f_n)$  في  $B_m(I)$  بحيث أن  $\|f_n\|_1 \leq 1$  لكل  $n \in \mathbb{N}$  والتي ليس لها متتابعة جزئية متقاربة بانتظام (ومن ثم استنتج أن نظرية بولزانو - فيرستراس ليست سارية المفعول في  $B_m(I)$ ).

## الباب الثامن عشر - العلو النهائي :

قدمنا في باب ٦ معلومات عن الأعلى (علواً) لفئة محدودة غير خالية لأعداد حقيقية وقد أجرينا استملاً هاماً لهذه المعلومات مرات عديدة. ولكن، يبحث فئة لانهاية محدودة  $S \subseteq \mathbb{R}$  يكون من المتع أحياناً حساب أكبر نقطة لجميع  $s^*$  من  $S$ . هذه النقطة  $s^*$  هي أكبر أقل جميع الأعداد الحقيقية التي يزيد عنها على الأكثر عدد محدود من عناصر  $S$ . سنطبق هذا المفهوم على المتتابعات المحدودة في  $\mathbb{R}$  للحصول على التصور المقيد كثيراً للعلو النهائي.

١٨ - ١ تعريف. بفرض  $X = (x_n)$  متتابعة محدودة في  $\mathbb{R}$ .

(أ) العلو النهائي للمتتابعة  $X$  والذي سنرمز له

$$\limsup X, \quad \limsup (x_n) \quad \text{أو} \quad \overline{\lim} (x_n)$$

هو أدنى الفئة  $V$  حيث  $v \in \mathbb{R}$  بحيث أنه يوجد على الأكثر عدد محدود من  $n \in \mathbb{N}$  بحيث  $v < x_n$ .

(ب) الأدنى النهائي للمتتابعة  $X$  والذي سنرمز له

$$\liminf X, \quad \liminf (x_n) \quad \text{أو} \quad \underline{\lim} (x_n)$$



(شكل ١٨ - ١)

هو أعلى الفئة  $W$  حيث  $w \in \mathbb{R}$  بحيث أنه يوجد على الأكثر عدد محدود من  $m \in \mathbb{N}$  بحيث  $x_m < w$ .

بينما لا تحتاج متتابعة محدودة إلى نهاية، لها دائماً علو نهائي وحيد (وأدنى نهائي وحيد). يكون هذا واضحاً من الحقيقة التي تقول إن العدد  $v = \sup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  ينتمي إلى الفئة  $V$ ، بينما العدد  $\inf \{x_n : n \in \mathbb{N}\} - 1$  حد أدنى للفئة  $V$ .

يوجد طرق عديدة متكافئة ومفيدة غالباً في تمكين الشخص من تعريف العلو النهائي لمتتابعة محدودة (ويجب حث القارئ بشدة على محاولة برهنة هذه النتيجة قبل قراءة البرهان).

١٨ - ٢ نظرية . إذا كانت  $X = (x_n)$  متتابعة محدودة في  $R$  ، فإن النصوص الآتية تكون متكافئة لعدد حقيق  $x^*$  .

$$(أ) \quad x^* = \limsup (x_n)$$

(ب) إذا كانت  $\varepsilon > 0$  فيوجد على الأكثر عدد محدود من  $n \in N$  بحيث أن  $x^* + \varepsilon < x_n$  لكن يوجد عدد لانهاى بحيث أن  $x^* - \varepsilon < x_n$  .

(ج) إذا كانت  $v_m = \sup \{x_n : n \geq m\}$  فإن  $x^* = \inf \{v_m : m \in N\}$  .

(د) إذا كانت  $v_m = \sup \{x_n : n \geq m\}$  فإن  $x^* = \lim (v_m)$  .

(هـ) إذا كانت  $L$  هي الفئة للأعداد  $v \in R$  بحيث أنه يوجد متتابعة جزئية من  $X$  والى تتقارب إلى  $v$  ، حينئذ  $x^* = \sup L$  .

البرهان . نفرض  $x^* = \limsup (x_n)$  وبفرض أن  $\varepsilon > 0$  . من تعريف ١٨ - ١ ، يوجد  $v \in V$  حيث  $x^* \leq v \leq x^* + \varepsilon$  . لذلك  $x^* + \varepsilon$  تنتمى أيضاً إلى  $V$  ، إذن يمكن أن يوجد على الأكثر عدد محدود من  $n \in N$  بحيث أن  $x^* + \varepsilon < x_n$  ومن ناحية أخرى  $x^* - \varepsilon$  ليست في  $V$  ، لذلك يوجد عدد لانهاى من  $n \in N$  بحيث أن  $x^* - \varepsilon < x_n$  ومن ثم (أ) تعنى ضمناً (ب) .

إذا تحققت (ب) فإنه بأخذ  $\varepsilon > 0$  . حينئذ يكون عندنا لكل كبيرة  $m$  كبيراً كافياً  $v_m \leq x^* + \varepsilon$  ، لذلك  $\inf \{v_m : m \in N\} \leq x^* + \varepsilon$  . لكن بما أنه يوجد عدد لا نهائى من  $n \in N$  بحيث أن  $x^* - \varepsilon < x_n$  فإن  $x^* - \varepsilon < v_m$  لكل  $m \in N$  ومن ثم  $x^* - \varepsilon \leq \inf \{v_m : m \in N\}$  . بما أن  $\varepsilon > 0$  اختيارية ، فنستنتج أن  $x^* = \inf \{v_m : m \in N\}$  وتكون (ج) متحققة .

إذا عرفت المتتابعة  $(v_m)$  كما في (ج) فتكون متناقصة بإطراد ومن ثم  $(v_m) = \lim (v_m)$  حيث (ج) تعنى ضمناً (د) .

نفرض الآن أن  $x^*$  تحقق (د) ،  $X = (x_{n_k})$  هي متتابعة جزئية تقاربية من  $X$  بما أن  $n_k \geq k$  فيكون لدينا  $x_{n_k} \leq v_k$  ومن ثم  $\lim X' \leq \lim (v_k) = x^*$  . وبالعكس لاحظ أنه يوجد  $n_1 \in N$  بحيث أن  $v_1 - 1 < x_{n_1} \leq v_1$  . استنتاجياً نختار  $n_{k+1} > n_k$  بحيث أن

$$v_k - \frac{1}{k+1} < x_{n_{k+1}} \leq v_k .$$

بما أن  $\lim (v_k) = x^*$  ، فينتج أن  $x^* = \lim (x_{n_k})$  . لذلك (د) تتضمن (هـ) .

أخيراً ، نفرض أن  $w = \sup L$  . إذا أعطيت  $\varepsilon > 0$  فيمكن أن يوجد على الأكثر عدد محدود من  $n \in N$  حيث  $w + \varepsilon < x_n$  . (من نظرية بولترانو - فير اشتراش ١٦ - ٤) .

وإذن  $\limsup X \leq w + \varepsilon$  و  $w + \varepsilon \in V$  . ومن جهة أخرى توجد متتابعة  $X'$  متقاربة إلى عدد ما أكبر من  $w - \varepsilon$  . مما يثبت أن  $w - \varepsilon$  ليست في  $V$  وإذن  $w - \varepsilon \leq \limsup X$  . وبما أن  $\varepsilon > 0$  اختيارية نستنتج أن  $w = \limsup X$  . وإذن (أ) تتضمن (أ') .

كلا الميزتين (د) ، (أ) يمكن اعتبارهما تحقيقاً للمصطلح « العلو النهائي » يوجد ميزتان متناظرتان للأدنى النهائي لمتتابعة محدودة والقارىء يجب أن ينسخها ويبرهنها .

الآن نكون الخواص الجبرية الأساسية للعلو النهائي وللأدنى النهائي لمتتابعات محدودة .

١٨ - ٣ نظرية . بفرض  $X = (x_n)$  و  $Y = (y_n)$  متابعتين محدودتين لأعداد حقيقية . فإن العلاقات الآتية تكون متحققة

$$\liminf (x_n) \leq \limsup (x_n) \quad (أ')$$

$$\text{(ب) إذا كانت } c \geq 0 \text{ ، فإن } \liminf (cx_n) = c \liminf (x_n) \text{ ،}$$

$$\limsup (cx_n) = c \limsup (x_n)$$

$$\text{(ب') إذا كانت } c \leq 0 \text{ ، فإن } \liminf (cx_n) = c \limsup (x_n) \text{ ،}$$

$$\limsup (cx_n) = c \liminf (x_n)$$

$$\liminf (x_n) + \liminf (y_n) \leq \liminf (x_n + y_n) \quad (ج)$$

$$\limsup (x_n + y_n) \leq \limsup (x_n) + \limsup (y_n) \quad (د)$$

$$\text{(أ) إذا كانت } x_n \leq y_n \text{ لجميع } n \text{ ، فإن } \liminf (x_n) \leq \liminf (y_n) \text{ ،}$$

$$\text{وأيضاً } \limsup (x_n) \leq \limsup (y_n)$$

البرهان . (أ') إذا كانت  $w < \liminf (x_n)$  ،  $v > \limsup (x_n)$  فإنه يوجد بدرجة لا نهائية كثير من  $n \in \mathbb{N}$  بحيث أن  $w \leq x_n$  ، بينما يوجد فقط عدد محدود بحيث أن  $x_n < v$  وإذن يجب أن نحصل على  $w \leq v$  التى تتضمن (أ') .

(ب) إذا كانت  $c \geq 0$  ، فإن الضرب في  $c$  يحفظ كل المتباينات التى على الصورة  $w \leq x_n$  إلخ .

(ب') إذا كانت  $c \leq 0$  ، فإن الضرب في  $c$  يعكس المتباينات ويحول العلو النهائي إلى الأدنى النهائي وبالعكس .

نص (ج) يكون ثنائياً إلى (د) ويمكن اشتقاقه مباشرة من (د) أو برهانه باستخدام نفس النوع من المناقشة . لبرهنة (د) ، نفرض  $v > \limsup (x_n)$  و  $u > \limsup (y_n)$  من التعريف يوجد فقط عدد محدود من  $n \in \mathbb{N}$  بحيث أن  $x_n < v$  وعدد محدود بحيث أن

$u < y_n$  . وإذن يمكن أن يوجد فقط عدد محدود من  $n$  بحيث أن  $v + u < x_n + y_n$  .  
 كما يوضح أن  $\limsup (x_n + y_n) \leq v + u$  هذا يبرهن نص (د) .

الآن نبرهن النص الثاني في (هـ) . إذا كانت  $u > \limsup (y_n)$  فإنه يمكن فقط وجود عدد محدود من أعداد طبيعية  $n$  بحيث أن  $u < y_n$  . بما أن  $x_n \leq y_n$  ، فينتج  $\limsup (x_n) \leq \limsup (y_n)$  وكذلك  $\limsup (x_n) \leq \limsup (y_n)$  وهو المطلوب إثباته .

كل من الشروط المكافئة المعطاة في نظرية ١٨ - ٢ يمكن استعماله لبرهنة أجزاء نظرية ١٨ - ٣ .

يقترح كفاية بعض هذه البراهين البديلة كتمرين .

ربما يسأل ما إذا كان يمكن أن تحل محل المتباينات في نظرية ١٨ - ٣ متساويات بوجه عام ، الإجابة لا ، لأنه إذا كانت  $X = [(-1)^n]$  فإن  $\liminf X = -1$  ،  $\limsup X = +1$  إذا كانت  $Y = ((-1)^{n+1})$  فإن  $X + Y = (0)$  بحيث أن

$$\liminf X + \liminf Y = -2 < 0 = \liminf (X + Y),$$

$$\limsup (X + Y) = 0 < 2 = \limsup X + \limsup Y$$

قد رأينا أن الأدنى النهائي والأعلى النهائي يوجدان لأي متتابة محددة . بصرف النظر عما إذا كانت المتتابة تقاربية . الآن سنوضح أن وجود  $\lim X$  تكون مكافئة لتساوى  $\limsup X$  ،  $\liminf X$  .

١٨ - ٤ مفترض . نفرض أن  $X$  متتابة محدودة لأعداد حقيقية . حينئذ  $X$  تقاربية إذا وإذا فقط  $\liminf X = \limsup X$  ، في أي حالة تكون  $\lim X$  هي القيمة المشتركة .

البرهان . إذا كانت  $x = \lim X$  ، فإنه لكل  $\varepsilon > 0$  يوجد عدد طبيعي  $N(\varepsilon)$  بحيث أن

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon, \quad n \geq N(\varepsilon)$$

المتباينة الثانية توضح أن  $\limsup X \leq x + \varepsilon$  والمتباينة الأولى توضح أن  $x - \varepsilon \leq \liminf X$  . وإذن  $x - \varepsilon \leq \liminf X \leq \limsup X \leq x + \varepsilon$  . وبما أن  $\varepsilon > 0$  اختيارية ، فيكون لدينا المتساوية المتصوص عليها .

وبالعكس ، نفرض أن  $x = \liminf X = \limsup X$  إذا كانت  $\varepsilon > 0$  ، فينتج نظرية ١٨ - ٢ (ب) أنه يوجد عدد طبيعي  $N_1(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $n \geq N_1(\varepsilon)$



فإن  $x_n < x + \varepsilon$  . بالمثل يوجد عدد طبيعي  $N_2(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $n \geq N_2(\varepsilon)$  فإن  $x - \varepsilon < x_n$  . بفرض  $N(\varepsilon) = \sup \{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$  ، إذا كانت  $n \geq N(\varepsilon)$  فإن  $|x_n - x| < \varepsilon$  ، مما يثبت أن  $x = \lim X$  . وهو المطلوب إثباته .

### متتابعات غير محدودة :

أحياناً يكون من المناسب إيجاد العلو النهائي والأدنى النهائي المعروف لمتتابعات اختيارية ( أى ليست بالضرورة محدودة ) في  $R$  لإجراء هذا نحتاج لنقدم الرمز  $+\infty$  ،  $-\infty$  ، لكن مع التأكيد بعد اعتبارهما أعداداً حقيقية ، هما مجرد رمزين مناسبين فقط .

إذا كانت  $S$  فئة غير خالية في  $R$  وكانت غير محدودة من أعلى ، فنعرف  $\sup S = +\infty$  . إذا كانت  $T$  فئة غير خالية في  $R$  وكانت غير محدودة من أسفل فنعرف  $\inf T = -\infty$  . وكما لاحظنا بعد تعريف  $+\infty$  ،  $-\infty$  ، أن كل عدد حقيقي يكون حداً أعلى لفئة خالية  $\emptyset$  ، لذلك نعرف  $\sup \emptyset = -\infty$  بالمثل كل عدد حقيقي يكون حداً أسفل لفئة خالية  $\emptyset$  ، لذلك نعرف  $\inf \emptyset = +\infty$  .

الآن نفرض أن  $X = (x_n)$  متتابعة في  $R$  وغير محدودة من أعلى ، حينئذ فإن الفئة  $V$  لأعداد  $v \in R$  بحيث أنه يوجد على الأكثر عدد محدود من  $n \in N$  حيث  $v < x_n$  تكون خالياً . إذن  $\inf V = +\infty$  . أى أنه إذا كانت  $X = (x_n)$  متتابعة في  $R$  غير محدودة من أعلى ، فنجد أن

$$\limsup (x_n) = +\infty$$

بالمثل ، إذا كانت  $Y = (y_n)$  متتابعة في  $R$  وغير محدودة من أسفل ، فنجد أن

$$\liminf (y_n) = -\infty$$

نلاحظ أنه إذا كانت  $X = (x_n)$  متتابعة في  $R$  وغير محدودة من أعلى ، فإن الفئات  $\{x_n : n \geq m\}$  ليست محدودة من أعلى وإذن

$$v_m = \sup \{x_n : n \geq m\} = +\infty$$

لكل  $m \in N$  .

### نهايات لا نهائية :

إذا كانت  $X = (x_n)$  متتابعة في  $R$  ، فنقول إن  $X = (x_n)$  تتباعد إلى  $+\infty$  ونكتب  $\lim (x_n) = +\infty$  إذا كان ، لكل  $\alpha \in R$  ، يوجد  $K(\alpha) \in N$  بحيث أنه إذا كانت  $n \geq K(\alpha)$  فإن  $x_n > \alpha$  .

بالمثل نقول إن  $X = (x_n)$  تتباعد إلى  $-\infty$  ونكتب  $\lim (x_n) = -\infty$  في حالة أنه لكل  $\alpha \in \mathbb{R}$  يوجد  $K(\alpha) \in \mathbb{N}$  بحيث أنه إذا كانت  $n \geq K(\alpha)$  فإن  $x_n < \alpha$ .

ويمكن ، كتمرين إثبات أن  $X = (x_n)$  تتباعد إلى  $+\infty$  إذا وإذا فقط

$$\liminf (X_n) = \limsup (x_n) = +\infty$$

وأن  $X = (x_n)$  تتباعد إلى  $-\infty$  إذا وإذا فقط

$$\liminf (x_n) = \limsup (x_n) = -\infty$$

### تعرينات :

١٨ - (أ) حدد الأعلى النهائي والأدنى النهائي للمتتابعات المحدودة الآتية في

$$((-1)^n/n) \quad (ب) \quad ((-1)^n) \quad (أ)$$

$$(\sin n) \quad (د) \quad ((-1)^n + 1/n) \quad (ج)$$

١٨ - (ب) إذا كانت  $X = (x_n)$  متتابعة محدودة في  $\mathbb{R}$  ، وضع أنه يوجد متتابعة جزئية للمتتابعة  $X$  بحيث تتقارب إلى  $\liminf X$ .

١٨ - (ج) برهن مباشرة النظرية المناظرة لنظرية ١٨ - ٢ للأدنى النهائي بعد تكون صيغة لها .

١٨ - (د) اعط برهاناً مباشراً لنظرية ١٧ - ٣ (ج)

١٨ - (هـ) برهن نظرية ١٨ - ٣ (د) باستخدام ١٨ - ٢ (ب) كتعريف للأعلى النهائي . افعل نفس الشيء باستخدام ١٨ - ٢ (د) ، ١٨ - ٢ (هـ) .

١٨ - (و) إذا كانت  $X = (x_n)$  متتابعة محدودة لعناصر موجبة على سبيل الحصر في  $\mathbb{R}$  وضع أن  $\limsup (x_n^{1/n}) \leq \limsup (x_{n+1}/x_n)$ .

١٨ - (ز) حدد الأعلى النهائي والأدنى للمتتابعات الآتية في  $\mathbb{R}$  .

$$(n \sin n) \quad (ب) \quad ((-1)^n n) \quad (أ)$$

$$(n \tan n) \quad (د) \quad (n(\sin n)^2) \quad (ج)$$

١٨ - (ح) اثبت أن المتتابعة  $X = (x_n)$  في  $\mathbb{R}$  تتباعد إلى  $+\infty$  إذا وإذا فقط  $\liminf X = +\infty$

١٨ - (ط) وضع أن  $\limsup X = +\infty$  إذا وإذا فقط كان توجد متتابعة جزئية  $X'$  من  $X$  بحيث أن  $\lim X' = +\infty$

١٨ - (ي) فسر نظرية ١٨ - ٢ لمتتابعات غير محدودة .

## الباب التاسع عشر — بعض امتدادات :

من المهم كثيراً في التحليل أن نقيم « رتبة مقدار » لمتتابعة أو نقارن متابعتين بالنسبة إلى مقدارهما . لإجراء ذلك نتخلص من الحدود التي لا تصنع « إسهاماً جوهرياً » . فمثلاً إذا كانت  $x_n = 2n + 17$  فإنه عند  $n \in \mathbb{N}$  بحيث تكون كبيرة ، يأتي الإسهام المسيطر من الحد  $2n$  . إذا كانت  $y_n = n^2 - 5n$  فإنه عند  $n \in \mathbb{N}$  بحيث تكون كبيرة ، يكون الحد المسيطر هو  $n^2$  . وبالرغم من أن الحدود الأولى القليلة من  $(y_n)$  أصغر من تلك التي في  $(x_n)$  ، فإن الحدود لهذه المتتابعة تنمو بسرعة أكثر من تلك التي تنمو بها الحدود في  $(x_n)$  . الآن سندخل بعض مصطلحات فنية لجعل هذه الفكرة أكثر دقة وسندخل دلالة ما ، نرجع إلى لاندאו (\*) ومفيدة غالباً .

١٩-١ تعريف . نفرض أن  $X = (x)$  و  $Y = (y_n)$  متابعتان في  $R$  ونفرض أن  $y_n \neq 0$  لكل  $n \in \mathbb{N}$  بحيث تكون كبيرة كبراً كافياً . نقول إن  $X$  و  $Y$  متكافئان ونكتب

$$X \sim Y \quad \text{أو} \quad (x_n) \sim (y_n)$$

عندما  $\lim (x_n/y_n) = 1$  . نقول إن  $X$  لها رتبة أقل مقدار من  $Y$  ونكتب

$$X = o(Y) \quad \text{أو} \quad x_n = o(y_n)$$

عندما  $\lim (x_n/y_n) = 0$  . نقول إن  $X$  تكون مسيطرة على  $Y$  ونكتب

$$X = O(Y) \quad \text{أو} \quad x_n = O(y_n)$$

في حالة كون المتتابعة  $(x_n/y_n)$  محدودة .

من الواضح أن إما  $X \sim Y$  أو  $X = o(Y)$  تدل على أن  $X = O(Y)$  خواص مختلفة لهذه الدلالات ستمطى في التمارين .

## مجموع سيزارو :

عرفنا سابقاً ما المقصود بالتقارب لمتتابعة  $X = (x_n)$  في  $R^p$  إلى عنصر  $x$  . لكن ، ربما يكون ممكناً أن نربط  $x$  إلى المتتابعة  $X$  كنوع من « النهاية العامة » حتى ولو لم تتقارب المتتابعة  $X$  إلى  $x$  بمعنى تعريف ١٤ - ٣ . يوجد طرق كثيرة التي بها يمكن للشخص أن يعمم

---

(\*) أدولف هانز « ج. اتش » لاندائو ( ١٨٧٧ - ١٩٢٨ ) كان استاذاً في « بيتنجن » ومعروف بأبحاثه وكتبه على نظرية العدد والتحليل . هذه الكتب مشهورة بشدهتها واختصارها في الأسلوب ( وبلغتها الألمانية الأولية ) .

فكرة نهاية متتابعة ويمكنه إعطاء مقدار كبير من البيان عن أن بعض هذه الطرق ستأخذنا بعيداً أبعد من مجال هذا الكتاب . لكن ، توجد طريقة أولية في طبيعتها وفي نفس الوقت مفيدة في تطبيقاتها لمتتابعات تذبذبية .

بما أن هذه الطريقة لها بعض الأهمية وبرهان النتيجة الرئيسية نموذجي لمناقشات تحليلية كثيرة ، فندخل هنا مقدمة مختصرة لنظرية قابلية الجمع لسيزارو (\*) .

١٩ - ٢ تعريف . إذا كانت  $X = (x_n)$  متتابعة من عناصر في  $R^p$  ، فإن المتتابعة  $S = (\sigma_n)$  المعرفة بالتعريف .

$$\sigma_1 = x_1, \quad \sigma_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \dots, \quad \sigma_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \dots$$

تسمى متتابعة المتوسطات الحسابية للمتتابعة  $X$  .

وبمعنى آخر ، توجد عناصر  $S$  بأخذ متوسطات الحدود في  $X$  . وحيث أن هذا المتوسط يميل إلى ملامسة تذبذبات من حين لآخر في  $X$  ، فن المقول أن نتوقع أن يكون للمتتابعة  $S$  فرصة أكبر للتقارب عن المتتابعة الأصلية  $X$  . في حالة تقارب المتتابعة  $S$  لمتوسطات حسابية إلى عنصر  $y$  ، نقول ان المتتابعة  $X$  تكون جمع سيزارو إلى  $y$  ، أو أن  $y$  هي النهاية  $(C, 1)$  للمتتابعة  $X$  .

مثال ذلك ، بفرض  $X$  هي المتتابعة الحقيقية غير التقاربية  $X = (1, 0, 1, 0, \dots)$  فقد تبين ترواً أنه إذا كانت  $n$  عدداً طبيعياً زوجياً فإن  $\sigma_n = \frac{1}{2}$  وإذا كانت  $n$  عدداً فردياً فإن  $\sigma_n = (n+1)/2n$  . بما أن  $\frac{1}{2} = \lim (\sigma_n)$  فإن المتتابعة  $X$  لها جمع سيزارو إلى  $\frac{1}{2}$  ، الذي ليس نهاية المتتابعة  $X$  ولكن يبدو أنه النهاية العامة الطبيعية التي يمكننا ربطها للمتتابعة  $X$  .

ويبدو أنه من المقبول لتعميم فكرة نهاية المتتابعة أن نفتض بأن النهاية العامة تعطى القيمة العادية للنهاية عندما تكون المتتابعة تقاربية . الآن سنوضح أن طريقة سيزارو لها هذه الخاصية .

١٩ - ٣ نظرية . إذا كانت المتتابعة  $X = (x_n)$  تتقارب إلى  $x$  ، فإن المتتابعة  $S = (\sigma_n)$  المتوسطات الحسابية تتقارب أيضاً إلى  $x$  .

(\*) ارنست سيزارو ( ١٨٥٩ - ١٩٠٦ ) درس في روما ودرس في نابولي ، وقد عمل في الهندسة والجبر وايضا بالتحليل .

البرهان . نحتاج لحساب المقدار الآتي :

$$\begin{aligned} \sigma_n - x &= \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) - x \\ (19.1) \quad &= \frac{1}{n} \{(x_1 - x) + (x_2 - x) + \dots + (x_n - x)\} \end{aligned}$$

بما أن  $x = \lim (x_n)$  ، فينتج بأخذ  $\varepsilon > 0$  أنه يوجد عدد طبيعي  $N(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $m \geq N(\varepsilon)$  فإن  $\|x_m - x\| < \varepsilon$  . أيضاً حيث أن المتتابعة  $X = (x_n)$  تقاربية . يوجد عدد حقيق  $A$  بحيث أنه  $\|x_k - x\| < A$  لكل  $k$  . إذا كانت  $k = 1$  ،  $n \geq N = N(\varepsilon)$  ، نقسم المجموع في الطرف الأيمن من ١ - ١٩ إلى مجموع من  $k = 1$  إلى  $k = N$  مضافاً إليه مجموع من  $k = N+1$  إلى  $k = n$  ونستخدم التقدير  $\|x_k - x\| < \varepsilon$  للمحدود  $n - N$  الأخيرة لنحصل

$$n \geq N(\varepsilon) \quad \text{عند} \quad \|\sigma_n - x\| \leq \frac{NA}{n} + \frac{n-N}{n} \varepsilon$$

إذا كانت  $n$  كبيرة كبراً كافياً ، فإن  $NA/n < \varepsilon$  وبما أن  $(n - N)/n < 1$  فنجد أن  $\|\sigma_n - x\| < 2\varepsilon$  لكل  $n$  كبيرة كبراً كافياً . ومن ثم  $x = \lim (\sigma_n)$  وهو المطلوب إثباته .

سوف لا نتابع نظرية قابلية الجمع أكثر من هذا ، لكي نجعل القارئ يرجع إلى كتب على متسلسلات تباعدية وقابلية الجمع . مثال ذلك ، انظر الكتاب لمؤلفه كنيوب المدون في المراجع . إحدى أكثر التطبيقات الأساسية الشيقة لقابلية الجمع لسيزارو هي نظرية فيجر الشهيرة التي تنص على أن دالة متصلة يمكن استردادها من متسلسلة فورير لها بطريقة سيزارو لقابلية الجمع . حتى ولو كانت الدالة بحيث لا يمكن استخلاصها من هذه المتسلسلة بالتقارب العادي (انظر نظرية ٣٨ - ١٢) .

### متتابعات مزدوجة ومكررة :

نتذكر أن متتابعة في الفراغ  $R^p$  هي دالة معرفة على الفئة  $N$  لأعداد طبيعية وبمدي في الفراغ  $R^p$  . متتابعة مزدوجة في الفراغ  $R^p$  هي دالة  $X$  نطاقها  $N \times N$  وتتكون من جميع الأزواج المرتبة لأعداد طبيعية ومداها في  $R^p$  وبمعنى آخر ، عند كل زوج مرتب  $(m, n)$  للأعداد الطبيعية تكون القيمة للمتتابعة المزدوجة  $X$  عنصراً في الفراغ  $R^p$  والذي سوف نرمز له نموذجاً بالرمز  $x_{mn}$  . وفي الحالة العامة سنستعمل رمزاً مثل  $X = (x_{mn})$  لتمثيل  $X$  ، لكن من المناسب أحياناً أن ندون العناصر في شكل مصفوفة منتظمة مثل

$$(19.2) \quad X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

لاحظ أنه في هذا النظام ، يشير الدليل الأول إلى الصف الذى يظهر فيه العنصر  $x_{mn}$  ويشير الدليل الثانى إلى العمود الذى يظهر فيه نفس العنصر .

١٩-٤ تعريف . إذا كانت  $X = (x_{mn})$  هى متتابة مزدوجة في الفراغ  $R^p$  ، فإنه يقال لعنصر  $x$  انه نهاية ( أو نهاية مزدوجة ) للمتتابة  $X$  إذا كان يوجد لكل عدد موجب  $\varepsilon$  عدد طبيعى  $N(\varepsilon)$  بحيث أنه لكل  $m, n \geq N(\varepsilon)$  فإن  $\|x_{mn} - x\| < \varepsilon$  في هذه الحالة نقول ان المتتابة المزدوجة تتقارب إلى  $X$  ونكتب

$$x = \lim X \quad \text{أو} \quad x = \lim_{mn} (x_{mn})$$

كثيراً من النظرية الأساسية الأولية لنهايات المتتابعات تطبق مع تغيير بسيط على المتتابعات المزدوجة . بوجه خاص ، حقيقة كون النهاية المزدوجة وحيدة التعمين ( إن وجدت ) تبرهن تماماً بنفس الطريقة كما في نظرية ١٥ - ٦ . يوجد أيضاً معيار كوشي لتقارب المتتابة المزدوجة الذى سنكتب نصه والذى نترك برهانه للقارئ .

١٩-٥ معيار كوشي . إذا كانت  $X = (x_{mn})$  متتابة مزدوجة في الفراغ  $R^p$  ، فإن  $X$  تكون تقاربية إذا وإذا فقط كان يوجد لكل  $\varepsilon > 0$  عدد طبيعى  $M(\varepsilon)$  بحيث أنه لكل  $m, n, r, s \geq M(\varepsilon)$  فإن

$$\|x_{mn} - x_{rs}\| < \varepsilon.$$

سوف لا نتمتع في أى تفاصيل أكثر في هذا الجزء لنظرية المتتابعات المزدوجة الذى يوازى نظرية المتتابة المفردة . بالأحرى نقترح ملاحظة باختصار العلاقة بين النهاية كما عرفت في ١٩-٤ والنهايات المكررة .

وكبداية ، نلاحظ أن المتتابة المزدوجة يمكن اعتبارها ( بطريقتين على الأقل ) كتتابة لمتتابعات . إحدى الطرق ، يمكننا اعتبار كل صف في النظام المرتب في ( ١٩ - ٢ ) متتابة في الفراغ  $R^p$  . أى إن الصف الأول في النظام ( ١٩ - ٢ ) ينتج المتتابة

$$Y_1 = (x_{1n} : n \in N) = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, \dots)$$

الصف الثانى في ( ١٩ - ٢ ) ينتج المتتابة  $Y_2 = (x_{2n} : n \in N)$  .. إلخ . وكنتفكير لا بأس به هو اعتبار النهايات لمتتابعات الصف  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m, \dots$  ( عند وجود

هذه النهايات ) نفرض أن هذه النهايات موجودة ونرمز لها بالرموز  $y_1, y_2, \dots, y_m, \dots$  نحصل على متتابعة لعناصر في  $\mathbb{R}^p$  التي ربما يمكن فحصها جيداً للتقارب . أى إننا نعتبر وجود  $y = \lim (y_m)$  . وحيث أن العناصر  $y_m$  مطاة بالصورة  $y_m = \lim Y_m$  حيث  $Y_m = (x_{mn} : n \in \mathbb{N})$  فإن هذا يقودنا إلى التعبير عن النهاية  $y = \lim (y_m)$  عند وجوده ) بالتعبير

$$y = \lim_m \lim_n (x_{mn})$$

سنشير إلى  $y$  كنهاية مكررة للمتتابعة المزدوجة ( أو أكثر دقة كنهاية الصف المتكرر لهذه المتتابعة المزدوجة ) .

والذي أجريناه بالنسبة لصفوف يمكن عمله على قدم المساواة بالنسبة لأعمدة أى إننا نكون المتتابعات

$$Z_1 = (x_{m1} : m \in \mathbb{N}), \quad Z_2 = (x_{m2} : m \in \mathbb{N})$$

وهكذا . بفرض أن النهايات  $z_1 = \lim Z_1, z_2 = \lim Z_2, \dots$  موجودة ، فيمكننا أن نعتبر  $z = \lim (z_n)$  وعند وجود هذه النهاية الأخيرة ، ف نرمز لها بالرمز

$$z = \lim_m \lim_n (x_{mn}),$$

ونرمز إلى  $z$  كنهاية مكررة أو النهاية المكررة لعمود لمتتابعة مزدوجة  $X = (x_{mn})$

والسؤال الأول الذي يمكن أن نسأله هو : إذا كانت النهاية المزدوجة للمتتابعة  $X = (x_{mn})$  موجودة ، فينته هل توجد النهايات المكررة ؟ . والإجابة عن هذا السؤال ربما تكون مفاجأة للقارئ ، هي بالنسبة . لنرى هذا نفرض أن  $X$  هي متتابعة مزدوجة في  $\mathbb{R}$  والمطاة على الصورة  $x_{mn} = (-1)^{m+n}(1/m + 1/n)$  ، فقد رأينا حالا أن النهاية المزدوجة لهذه المتتابعة موجودة وتساوى صفراً . بينما قد تحقق من قبل أنه لا أحد من المتابعتين  $Y_1 = (x_{1n} : n \in \mathbb{N}), \dots, Y_m = (x_{mn} : n \in \mathbb{N}) \dots$

لها نهاية . ومن ثم لا يمكن وجود نهاية مكررة محتملة حيث لا يوجد أحد من النهايات الداخلة .

السؤال الثاني يكون : إذا كانت النهاية المزدوجة موجودة وإذا كانت إحدى النهايات المكررة موجودة ، فهل النهاية المكررة تساوى النهاية المزدوجة ؟ . في هذه المرة تكون الإجابة بالإيجاب . وفي الحقيقة ، سنقرر الآن نتيجة قوية نوعاً ما .

١٩ - نظرية نهاية مزدوجة . إذا كانت النهاية المزدوجة  $x = \lim_{mn} (x_{mn})$  موجودة وإذا كانت توجد لكل عدد طبيعي  $m$  النهاية  $y_m = \lim_n (x_{mn})$  فإن النهاية المكررة  $\lim_m \lim_n (x_{mn})$  موجودة وتساوى  $x$  .

البرهان . نجد من الفرض ، بأخذ  $\varepsilon > 0$  أنه يوجد عدد طبيعي  $N(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $m, n \geq N(\varepsilon)$  فإن  $\|x_{mn} - x\| < \varepsilon$  . ثانياً من الفرض ، حيث أن النهايات  $y_m = \lim_n (x_{mn})$  موجودة . فينتج من المتباينة السابقة ومفترض ١٥ - ٨ أن  $\|y_m - x\| \leq \varepsilon$  لكل  $m \geq N(\varepsilon)$  لذلك نستنتج أن  $x = \lim (y_m)$  وهو المطلوب إثباته .

النتيجة السابقة توضح أنه إذا كانت النهاية المزدوجة موجودة ، فإن الشيء الوحيد الذي يمكنه منع النهايات المكررة من الوجود ومساواتها بالنهاية المزدوجة هو عدم وجود النهايات الداخلة . وأكثر دقة يكون عندنا النتيجة الآتية .

١٩ - ٧ نتيجة . بفرض أن النهاية المزدوجة موجودة وأن النهايات

$$y_m = \lim_n (x_{mn}), \quad z_n = \lim_m (x_{mn})$$

موجودة لجميع الأعداد الطبيعية  $m$  و  $n$  . حينئذ النهايات المكررة

$$\lim_n \lim_n (x_{mn}), \quad \lim_n \lim_m (x_{mn})$$

ومساوية للنهاية المزدوجة .

نستعمل بعد ذلك عما إذا كان وجود تساوى النهايتين المكررتين يضمن وجود النهاية المزدوجة . الجواب هو لا . هذا يتضح بفحص المتتابعة المزدوجة  $X = (x_{mn})$  في  $R$  المعروفة بأن  $x_{mn} = 1$  عندما  $m \neq n$  ،  $x_{mn} = 0$  عندما  $m = n$  . هنا كلا النهايتين المكررتين موجودتين ومتساويتين . بينما لا توجد النهاية المزدوجة ولكن ، تحت بعض شروط إضافية ، يمكننا ضمان وجود النهاية المزدوجة من وجود إحدى النهايتين المكررتين .

١٩ - ٨ تعريف . لكل عدد طبيعي  $m$  ، نفرض أن  $Y_m = (x_{mn})$  متتابعة في الفراغ  $R^p$  ومتقاربة إلى  $y_m$  ، نقول إن المتتابعات  $\{Y_m : m \in N\}$  تكون تقاربية منتظمة إذا كان يوجد ، لكل  $\varepsilon > 0$  ، عدد طبيعي  $N(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $n \geq N(\varepsilon)$  فإن  $\|x_{mn} - y_m\| < \varepsilon$  لجميع الأعداد الطبيعية  $m$  .

سيكمل القارئ حسناً عندما يقارن هذا التعريف مع تعريف ١٧ - ٤ ويلاحظ أنهما من نفس الصيغة . جزئياً لكي نملل لإثبات نظرية ١٩ - ١٠ ، سنوضح أنه إذا كانت كل من المتتابعات  $y_m$  تقاربية ، فإن وجود النهاية المزدوجة يضمن أن المتتابعات  $\{Y_m : m \in N\}$  تكون تقاربية تقارباً منتظماً .

١٩ - ٩ مقترض . إذا كانت النهاية المزدوجة لمتتابعة مزدوجة  $X = (x_{mn})$  موجودة وإذا كانت ، لكل عدد طبيعي  $m$  ، المتتابعة  $Y_m = (x_{mn} : n \in N)$  تقاربية ، فإن هذه المجموعة تكون تقاربية منتظمة .



البرهان. بما أن النهاية المزدوجة موجودة ، فبأخذ  $\varepsilon > 0$  نجد أنه يوجد عدد طبيعي  $N(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $m, n \geq N(\varepsilon)$  فإن  $\|x_{mn} - x\| < \varepsilon$ . من الفرض نجد أن المتتابعة  $Y_m = (x_{mn}, n \in \mathbb{N})$  تقترب إلى عنصر  $y_m$  وباستخدام مقترض ١٥ - ٨ نجد أنه إذا كانت  $m \geq N(\varepsilon)$  فإن  $\|y_m - x\| \leq \varepsilon$  أى إنه إذا كانت  $m, n \geq N(\varepsilon)$  فإننا نستنتج أن

$$\|x_{mn} - y_m\| \leq \|x_{mn} - x\| + \|x - y_m\| < 2\varepsilon$$

وبالإضافة إلى ذلك ، تكون ، عند  $m = 1, 2, \dots, N(\varepsilon) - 1$  المتتابعة  $Y_m$  متقاربة من  $y_m$  ، ومن ثم يوجد عدد طبيعي  $K(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $n \geq K(\varepsilon)$  ، فإن  $\|x_{mn} - y_m\| < \varepsilon$  ،  $m = 1, 2, \dots, N(\varepsilon) - 1$  بفرض  $M(\varepsilon) = \sup \{N(\varepsilon), K(\varepsilon)\}$  فإننا نستنتج أنه إذا كانت  $n \geq M(\varepsilon)$  ، فإنه لأي قيمة للمقدار  $m$  نحصل على

$$\|x_{mn} - y_m\| < 2\varepsilon$$

هذا يثبت انتظام التقارب للمتتابعات  $\{Y_m : m \in \mathbb{N}\}$  وهو المطلوب إثباته .  
المفترض السابق يوضح أنه ، تحت الفرض بأن المتتابعات  $Y_m$  تقاربة ، فإن التقارب المنتظم لهذه المجموعة من المتتابعات شرط ضروري لوجود النهاية المزدوجة . ثبت الآن نتيجة في الاتجاه العكسي .

١٩ - ١٠ نظرية نهاية مكررة . نفرض أن النهايات الفردية

$$y_m = \lim_n (x_{mn}), \quad z_n = \lim_m (x_{mn})$$

موجود لكل  $m, n \in \mathbb{N}$  وأن التقارب لأحد من هذه المجموعات منتظم . فإن كلا من النهايتين المكررتين والنهاية المزدوجة موجودة وكل الثلاثة متساوية .

البرهان . نفرض أن التقارب للمجموعة  $\{Y_m : m \in \mathbb{N}\}$  منتظم . وإذن بإعطاء  $\varepsilon > 0$  فإنه يوجد عدد طبيعي  $N(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $n \geq N(\varepsilon)$  فإن لكل

$$(19.3) \quad \|x_{mn} - y_m\| < \varepsilon$$

الأعداد الطبيعية  $m$  . لتوضيح أن  $\lim (y_m)$  موجود ، نأخذ عدداً ثابتاً  $q \geq N(\varepsilon)$  . بما أن  $z_q = \lim (x_{rq}, r \in \mathbb{N})$  موجود ، نعرف أنه إذا كانت  $r, s \geq R(\varepsilon, q)$  فإن

$$\|y_r - y_s\| \leq \|y_r - x_{rq}\| + \|x_{rq} - x_{sq}\| + \|x_{sq} - y_s\| < 3\varepsilon$$

لذلك  $(y_r)$  هي متتابعة كوشي وتقترب إلى عنصر  $y$  في  $R^p$  مما يؤكد وجود النهاية المكررة

$$y = \lim_m (y_m) = \lim_m \lim_n (x_{mn})$$

الآن سنوضح أن النهاية المزدوجة موجودة ، حيث أن  $y = \lim (y_m)$  ، بأخذ  $\varepsilon > 0$  فإنه يوجد مقدار  $M(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $m \geq M(\varepsilon)$  فإن  $\|y_m - y\| < \varepsilon$  نفرض  $K(\varepsilon) = \sup \{N(\varepsilon), M(\varepsilon)\}$  ونستعمل ثانياً (١٩-٢) نستنتج أنه إذا كانت  $m, n \geq K(\varepsilon)$  فإن

$$\|x_{mn} - y\| \leq \|x_{mn} - y_m\| + \|y_m - y\| < 2\varepsilon$$

هذا يثبت أن النهاية المزدوجة موجودة ومساوية للنهاية  $y$  .

أخيراً ، لتوضيح أن النهاية المكررة الأخرى موجودة وتساوى للنهاية  $y$  ، فإننا نستخدم نظرية ١٩-٦ أو نتيجتها .

ربما يكون من التخمين أن ، مع أن البرهان المعطى حالياً يعتمد على وجود كلا من مجموعات النهايات الفردية وانتظام النهاية لواحد منهما ، الاستنتاج ربما ينتج من وجود ( وانتظام ) لمجموعة واحدة بالاضبط لنهايات فردية . سنترك هذا للقارئ لفحص صحة أو بطلان هذا التخمين .

## تمارين :

١٩- (أ) كون العلاقات الآتية :

$$\begin{array}{ll} (n^2+2) = o(n^2) & \text{(ب)} \quad (n^2+2) \sim (n^2-3) \quad \text{(أ)} \\ ((-1)^n n^2) = o(n^2) & \text{(د)} \quad ((-1)^n n^2) = O(n^2) \quad \text{(ج)} \\ (\sin n) = O(1) & \text{(و)} \quad (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \sim (1/2\sqrt{n}) \quad \text{(هـ)} \end{array}$$

١٩- (ب) بفرض أن  $Z$  و  $Y$  و  $X$  متباينات بمتناقص غير صفرية . وضع أن

$$X \sim X \quad (١)$$

(ب) إذا كانت  $X \sim Y$  فإن  $Y \sim X$  .

(ج) إذا كانت  $X \sim Y$  و  $Y \sim Z$  فإن  $X \sim Z$  .

١٩- (ج) إذا كانت  $X_1 = O(Y)$  و  $X_2 = O(Y)$  ، فنستنتج أن  $X_1 \pm X_2 = O(Y)$

ونلخص هذا في المعادلة :

$$O(Y) \pm O(Y) = O(Y) \quad \text{(أ)} \quad \text{اعط تحليلاً مشابهاً لهذا وأثبت أن}$$

$$o(Y) \pm o(Y) = o(Y) \quad \text{(ب)}$$

(ج) إذا كانت  $c \neq 0$  حينئذ  $o(cY) = o(Y)$  ،  $O(cY) = O(Y)$  .

$$O(o(Y))=o(Y), \quad o(O(Y))=o(Y) \quad (د)$$

$$O(X)O(Y)=O(XY), \quad O(X)o(Y)=o(XY), \quad o(X)o(Y)=o(XY) \quad (هـ)$$

١٩- (د) أثبت أن  $Y=o(X)$  و  $X=o(Y)$  لا يمكن أن يتحققا في وقت واحد .  
اعط مثالا لمتتابعات بحيث أن  $X=O(Y)$  ولكن  $Y \neq O(X)$  .

١٩- (هـ) إذا كانت  $X$  متتابعة مطردة في الفراغ  $R$  وضع أن المتتابعة للمتوسطات الحسابية تكون مطردة .

١٩- (و) إذا كانت  $X=(x_n)$  متتابعة في  $R$  ،  $(\sigma_n)$  متتابعة للمتوسطات الحسابية ، حينئذ  $\limsup (\sigma_n) \leq \limsup (x_n)$  اعط مثالا فيه تظل المتباينة قائمة .

١٩- (ز) إذا كانت  $X=(x_n)$  متتابعة لأعداد حقيقية موجبة ، فهل  $(\sigma_n)$  متزايدة باطراد ؟

١٩- (ح) إذا كانت المتتابعة  $X=(x_n)$  في الفراغ  $R^p$  هي حاصل جمع سيزارو ، فإن  $X=o(n)$  ( إرشاد :  $x_n = n\sigma_n - (n-1)\sigma_{n-1}$  ) .

١٩- (ط) بفرض أن  $X$  متتابعة مطردة في  $R$  ، هل صحيح أن  $X$  تكون حاصل جمع سيزارو إذا وإذا فقط كانت تقاربية ؟

١٩- (ي) اعط برهانا لنظرية ١٩- هـ

١٩- (ك) اعتبر وجود النهايات المزدوجة والمكررة للمتتابعات المزدوجة  $(x_{mn})$  حيث  $x_{mn}$  مبينة كالآتي :

$$(أ) \quad (-1)^{m+n} \quad (ب) \quad \frac{1}{m+n} \quad (ج) \quad \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

$$(د) \quad \frac{m}{m+n} \quad (هـ) \quad (-1)^m \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) \quad (و) \quad \frac{mn}{m^2+n^2}$$

١٩- (ل) هل المتتابعة المزدوجة التقاربية محدودة ؟

١٩- (م) إذا كانت  $X=(x_{mn})$  متتابعة مزدوجة تقاربية لأعداد حقيقية ، وإذا كانت النهاية  $y_m = \limsup_r (x_{mr})$  موجودة لكل  $m \in N$  فإنه يكون لدينا  $\lim_{mn} (x_{mn}) = \lim_m (y_m)$

١٩- (ن) أي من المتتابعات المزدوجة في تمرين ١٩- ك تكون بحيث أن المجموعة  $\{Y_m = \lim (x_{mn}) : m \in N\}$  تقاربية منتظمة ؟

١٩- (س) بفرض  $X=(x_{mn})$  متتابعة مزدوجة محدودة في الفراغ  $R$  بخاصية أنه لكل  $m \in N$  تكون المتتابعة  $Y_m=(x_{mn} : n \in N)$  مطردة الزيادة ولكل  $n \in N$  تكون المتتابعة  $Z_n=(x_{mn} : m \in N)$  مطردة الزيادة . هل صحيح أن الهاتين المكررتين موجودتان ومتساويتان ؟ هل النهاية المزدوجة تحتاج إلى أن توجد ؟

١٩- (ع) ناقش المسألة الموضوعة في آخر فقرة من هذا الهاب .

## دوال متصلة

سنبدأ الآن دراستنا لنصف من الدوال الأكثر أهمية في التحليل ، والدوال المتصلة . في هذا الفصل ، سنخلط النتائج في فصل ٢ ، ٣ ونجني محصولاً غنياً من نظريات ذات عمق وفائدة كبيرة .

باب ٢٠ . يقدم ويفحص الفكرة عن الاتصال . نقدم في باب ٢١ النصف الهام من الدوال الخطية . الباب الأساسي ٢٢ يدرس خواص الدوال المتصلة على الفئات المدجة والمتصلة ، يناقش باب ٢٣ فكرة الاتصال المنتظم . ستستعمل النتائج لهذه الأبواب الأربعة مراراً خلال بقية الكتاب متتابعات لدوال متصلة . سندرس في باب ٢٤ ، وندرس النهاية الأعلى والنهاية الأدنى في باب ٢٥ . يعرض الباب الباقي بعض نتائج هامة ومشوقة ، لكن هذه النتائج سوف لا تستخدم في الأبواب القادمة .

وليس من المفروض أن القارئ عنده أى ألفة سابقة بمعالجة قوية للدوال المتصلة . لكن ، في بعض الأمثلة والتجربيات ، تستخدم الدوال الأسية واللوغاريتمية والمثلثية لإعطاء أمثلة ليست بسيطة .

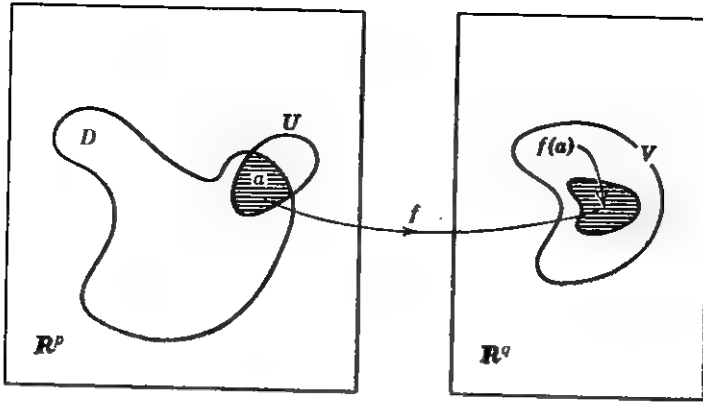
### الباب العشرون — خواص محلية لدوال متصلة :

سنفترض أن  $f$  هي دالة نطاقها  $D(f)$  ومحتوية في الفراغ  $R^p$  ومداها  $R(f)$  محتوية في الفراغ  $R^q$  بوجه عام سوف لا تتطلب أن  $D(f) = R^p$  أو أن  $p = q$  .

أولاً سوف نعرف الاتصال بدلالة الجوار وعندئذ نشير إلى شروط قليلة مكافئة .

١٠-١ تعريف . إذا كانت  $a \in D(f)$  ، فنقول إن  $f$  متصلة عند  $a$  إذا كان لكل جوار  $V$  من  $f(a)$  يوجد جوار  $U$  ( معتمد على  $V$  ) من  $a$  بحيث أنه إذا كانت  $x$  أى عنصر من  $U \cap D(f)$  فإن  $f(x)$  تكون عنصراً من  $V$  . ( انظر شكل ٢٠ - ١ ) إذا كانت  $A \subseteq D(f)$  فنقول إن  $f$  متصلة في  $A$  في حالة اتصالها عند كل نقطة من  $A$  .

أحياناً يقال إن دالة متصلة هي دالة بحيث « ترسل نقاطاً متجاورة إلى نقاط متجاورة » .



( شكل ٢٠ - ١ )

هذا التعبير البديهي ممنوع إذا كان شخصاً يعتقد أن الصورة لجوار  $a$  لابد أن تكون جوار الدالة  $f(a)$ . ( اعتبر  $x \mapsto |x|$  عند  $x = 0$  ).

نعطى الآن نصين متكافئين قد أمكن استخدامهما كالتعريف .

٢٠ - ٧ نظرية . بفرض  $a$  هي نقطة في النطاق  $D(f)$  للدالة  $f$  . النصوص الآتية تكون متكافئة :

( أ ) الدالة  $f$  تكون متصلة عند  $a$  .

( ب ) إذا كانت  $\epsilon > 0$  ، فيوجد عدد  $\delta(\epsilon) > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $x \in D(f)$  فإن  $\|x - a\| < \delta(\epsilon)$  ، فإن  $\|f(x) - f(a)\| < \epsilon$  .

( ج ) إذا كانت  $(x_n)$  أى متتابعة لعناصر النطاق  $D(f)$  بحيث تقتارب إلى  $a$  ، فإن المتتابعة  $(f(x_n))$  تقتارب إلى  $f(a)$  .

البرهان . نفرض أن ( أ ) صحيحة وأن  $\epsilon > 0$  إذن الكرة  $V_\epsilon = \{y \in \mathbb{R}^q : \|y - f(a)\| < \epsilon\}$  هي جوار النقطة  $f(a)$  يوجد من تعريف ٢٠ - ١ يوجد جوار  $U$  للنقطة  $a$  ، بحيث أنه إذا كانت  $x \in U \cap D(f)$  فإن  $f(x) \in V$  . بما أن  $U$  هي جوار للنقطة  $a$  ، فيوجد عدد حقيق موجب  $\delta(\epsilon)$  بحيث تكون الكرة المفتوحة التي نصف قطرها  $\delta(\epsilon)$  ومركزها  $a$  محتوية في  $U$  . لذلك شرط ( أ ) يفي ( ب ) .

نفرض أن ( ب ) صحيحة ونفرض أن  $(x_n)$  متتابعة من عناصر في  $D(f)$  ومتقاربة إلى  $a$  . بفرض  $\epsilon > 0$  ونستجيب بالشرط ( ب ) لنحصل على  $\delta(\epsilon) > 0$  بالخاصية المنصوصة

في (ب) . بسبب تقارب  $(x_n)$  إلى  $a$  ، يوجد عدد طبيعي  $N(\delta(\varepsilon))$  بحيث أنه إذا كانت  $n \geq N(\delta(\varepsilon))$  فإن  $\|x_n - a\| < \delta(\varepsilon)$  . بما أن كل  $x_n \in D(f)$  فينتج من (ب) أن  $\|f(x_n) - f(a)\| < \varepsilon$  مما يثبت أن (ج) تظل صحيحة .

أخيراً سنناقش بطريقة غير مباشرة ونوضح أنه إذا كان شرط (أ) لا يظل قائماً ، فإن شرط (ج) لا يظل قائماً . إذا فشلت (أ) ، فإنه يوجد جوار  $V_0$  للدالة  $f(a)$  بحيث أنه لكل أي جوار  $U$  للنقطة  $a$  ، يوجد عنصر  $x_U$  ينتمي إلى  $D(f) \cap U$  لكن بحيث أن  $f(x_U)$  لا ينتمي إلى  $V_0$  . لأنه كل عدد طبيعي  $n$  تعتبر الجوار  $U_n$  للنقطة  $a$  المعروفة بالصورة  $U_n = \{x \in \mathbb{R}^p : \|x - a\| < 1/n\}$  ، من الجملة السابقة ، نجد أنه لكل  $n$  في  $N$  يوجد عنصر  $x_n$  ينتمي إلى  $D(f) \cap U_n$  ولكن بحيث أن  $f(x_n)$  لا تنتمي إلى  $V_0$  . المتتابعة  $(x_n)$  المكونة تؤول إلى  $a$  وتقتارب إلى  $D(f)$  ، وأيضاً لا ينتمي أحد من عناصر المتتابعة  $(f(x_n))$  إلى الجوار  $V_0$  للدالة  $f(a)$  . ومن ثم نكون قد كونا متتابعة فيها الشرط (ج) لا يظل قائماً . هذا يثبت أن جزء (ج) ينتج (أ) . وهو المطلوب إثباته .

مقياس عدم الاتصال المفيد الآتي هو نتيجة لما قد أجريناه حالا .

٢٠-٣ مقياس عدم الاتصال . الدالة  $f$  ليست متصلة عند نقطة  $a$  في  $D(f)$  إذا وإذا فقط كان يوجد متتابعة  $(x_n)$  من عناصر في  $D(f)$  بحيث تقتارب إلى  $a$  لكن المتتابعة  $(f(x_n))$  للصور لا تقتارب إلى  $f(a)$  .

النتيجة الآتية صياغة أخرى بسيطة للتعريف . نتذكر من تعريف ٢٠-١٢ أن الصورة العكسية  $f^{-1}(H)$  لفئة جزئية  $H$  من  $\mathbb{R}^q$  تحت  $f$  تكون معروفة بأنها

$$f^{-1}(H) = \{x \in D(f) : f(x) \in H\}$$

٢٠-٤ نظرية . الدالة  $f$  متصلة عند نقطة  $a$  في  $D(f)$  إذا وإذا فقط كان يوجد لكل جوار  $V$  للدالة  $f(a)$  جوار  $V_1$  للنقطة  $a$  بحيث أن

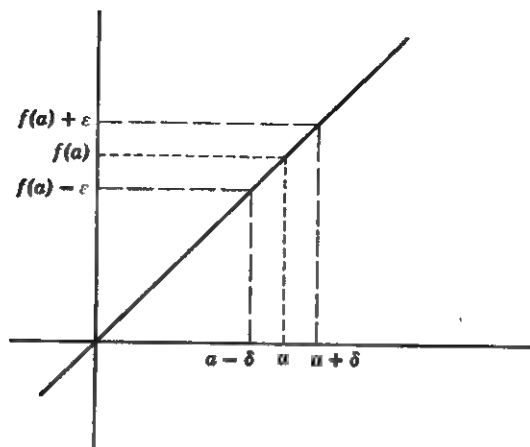
$$V_1 \cap D(f) = f^{-1}(V) \quad (20.1)$$

البرهان . إذا كانت  $V_1$  جواراً للنقطة  $a$  بحيث يحقق هذه المعادلة ، حينئذ يمكننا أخذ  $U = V_1$  . وبالعكس ، إذا كان تعريف ٢٠-١ متحققاً ، حينئذ يمكننا أخذ  $V_1 = U \cup f^{-1}(V)$  لنحصل على معادلة ٢٠-١ .

قبل دفع النظرية أكثر من هذا ، سنقف وقفة أمام بعض أمثلة . وللتبسيط معظم الأمثلة هي من الحالة التي فيها  $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^q = \mathbb{R}$

٢٠-٥ أمثلة . (أ) نفرض أن  $D(f) = \mathbb{R}$  ونفرض أن  $f$  هي الدالة الثابتة المساوية

للمد الحقيقي  $c$  لجميع الأعداد الحقيقية  $x$  . إذن  $f$  تكون متصلة عند كل نقطة للفراغ  $R$  ،  
وفي الحقيقة ، يمكننا أخذ الجوار  $U$  .



( شكل ٢٠-٢ )

في تعريف ٢٠-١ ليكون مساوياً إلى  $R$  لأي نقطة  $a$  في  $D(f)$  . بالمثل ، الدالة  $g$   
المعرفة بأنها

$$g(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$= 2, \quad 2 \leq x \leq 3$$

هي دالة متصلة عند كل نقطة في نطاقها .

(ب) نفرض أن  $D(f) = R$  ونفرض أن  $f$  هي الدالة المتطابقة المعرفة بالتعريف  
 $x \in R$  ،  $f(x) = x$  ( انظر شكل ٢٠-٢ ) . إذا كانت  $a$  عدداً حقيقياً معطى  
بفرض أن  $\epsilon > 0$  ونفرض أن  $\delta(\epsilon) = \epsilon$  . حينئذ . إذا كانت  $|x - a| < \delta(\epsilon)$  ، فيكون  
لدينا  $|f(x) - f(a)| = |x - a| < \epsilon$

(ج) نفرض  $D(f) = R$  ونفرض أن  $f$  هي دالة التربيع المعرفة بأنها  $f(x) = x^2$  ،  
 $x \in R$  نفرض أن  $a$  تنتمي إلى  $R$  ونفرض أن  $\epsilon > 0$  ، حينئذ  $|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x - a| |x + a|$   
نريد أن نجعل التعبير السابق أقل من  $\epsilon$  بجعل  $|x - a|$  صغيرة  
صغراً كافياً . إذا كانت  $a = 0$  فلنختار  $\delta(\epsilon) = \sqrt{\epsilon}$  . إذا كانت  $a \neq 0$  فلنأخذ نريد أن  
نحصل على حد للمقدار  $|x + a|$  في جوار  $a$  . مثال ذلك ، إذا كانت  $|x - a| < |a|$   
فإن  $|x + a| < |x| + |a| < 3|a|$  ، ومن ثم

$$(20.2) \quad |f(x) - f(a)| \leq 3|a||x - a|$$

بحيث أن  $|x - a| < |a|$  . أى أنه إذا عرفنا  $\delta(\varepsilon) = \inf \{|a|, \varepsilon/3|a|\}$  ، فإنه عندما  $|x - a| < \delta(\varepsilon)$  ، فإن المتباينة (٢٠-٢) تظل قائمة ويكون عندنا

(د) نعتبر نفس الدالة كما في (ج) لكن نستخدم أسلوباً فنياً مختلفاً قليلاً بدلاً من تحليل  $x^2 - a^2$  إلى عوامل ، نكتبه ككثيرة حدود في  $x - a$  . أى أن

$$x^2 - a^2 = (x^2 - 2ax + a^2) + (2ax - 2a^2) = (x - a)^2 + 2a(x - a)$$

باستخدام المتباينة المثلثية ، نحصل على

$$|f(x) - f(a)| \leq |x - a|^2 + 2|a||x - a|$$

إذا كانت  $\delta \leq 1$  و  $|x - a| < \delta$  فإن  $|x - a|^2 < \delta^2 \leq \delta$  والحد في الطرف الأيمن يكون المقدار  $\delta + 2|a|\delta = \delta(1 + 2|a|)$  . سيطر عليه . ومن ثم يكون قد أرشدنا لاختيار

$$\delta(\varepsilon) = \inf \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{1 + 2|a|} \right\}$$

(٥) اعتبر  $D(f) = \{x \in \mathbf{R} : x \neq 0\}$  ونفرض أن  $f$  معرفة بأنها  $f(x) = 1/x$  ،  $x \in D(f)$  إذا كانت  $a \in D(f)$  ، فإن

$$|f(x) - f(a)| = |1/x - 1/a| = \frac{|x - a|}{|ax|}$$

نريد مرة أخرى إيجاد حد لمعامل المقدار  $|x - a|$  الذى يكون متحققاً في جوار  $a \neq 0$

نلاحظ أنه إذا كانت  $|x - a| < \frac{1}{2}|a|$  فإن  $\frac{1}{2}|a| < |x|$  ويكون عندنا

$$|f(x) - f(a)| \leq \frac{2}{|a|^2} |x - a|$$

وإذن قد أرشدنا لأخذ  $\delta(\varepsilon) = \inf \{\frac{1}{2}|a|, \frac{1}{2}\varepsilon|a|^2\}$

(و) نفرض أن  $f$  معرفة عند  $D(f) = \mathbf{R}$  بأنها

$$f(x) = 0, \quad x \leq 0, \\ = 1, \quad x > 0$$

ربما يلاحظ أن  $f$  متصلة عند كل النقط  $a \neq 0$  . سنوضح أن  $f$  غير متصلة عند صفر باستخدام معيار عدم الاتصال ٢٠ - ٣ . وفي الحقيقة ، إذا كانت  $x_n = 1/n$  فإن المتتابعة  $(f(1/n)) = (1)$  لا تقرب من  $f(0)$  ( انظر شكل ٢٠ - ٣ ) .

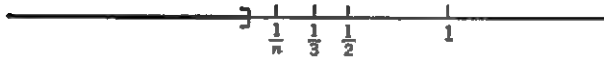


( ز ) نفرض  $D(f) = \mathbb{R}$  ونفرض أن  $f$  دالة درشليت (\*) غير المتصلة المعرفة كما يلي :

$$f(x) = 1 \text{ إذا كانت } x \text{ قياسية}$$

$$f(x) = 0 \text{ إذا كانت } x \text{ غير قياسية}$$

إذا كانت  $a$  عدداً قياسياً ، نفرض أن  $X = (x_n)$  متتابعة لأعداد غير قياسية بحيث تقرب من  $a$  ( نظرية ٦ - ١٠ تؤكد لنا وجود مثل هذه المتتابعة ) . بما أن  $f(x_n) = 0$  ، لكل  $n \in \mathbb{N}$  فإن المتتابعة  $(f(x_n))$  لا تقرب إلى  $f(a) = 1$  ،  $f$  ليست متصلة عند العدد القياسي  $a$  . وبمعنى آخر ، إذا كانت  $b$  عدداً غير قياسى ، فإنه توجد متتابعة  $Y = (y_n)$  لأعداد قياسية تتقارب إلى  $b$  المتتابعة  $(f(y_n))$  لا تتقارب من  $f(b)$  ، لذلك تكون  $f$  غير متصلة عند  $b$  وإذن ، دالة درشليت غير متصلة عند أى نقطة .



( شكل ٢٠ - ٣ )

( ح ) نفرض  $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$  لأى عدد غير قياسى  $x > 0$  ، نعرف  $f(x) = 0$  لأى عدد قياسى على الصورة  $m/n$  ، حيث العددان الطبيعيان  $m$  و  $n$  ليس بينهما عامل مشترك ماعداً واحد ، نعرف  $f(m/n) = 1/n$  . سنوضح أن  $f$  متصلة عند كل عدد قياسى فى  $D(f)$  وغير متصلة عند كل عدد قياسى  $D(f)$  . النص الأخير ينتج بأخذ متتابعة لأعداد غير قياسية بحيث تقرب إلى العدد القياسى المعلوم واستخدام معيار عدم الاتصال . نفرض أن  $a$  عدد غير قياسى ،  $\varepsilon > 0$  ، حينئذ يوجد عدد طبيعى  $n$  بحيث أن  $1/n < \varepsilon$  . إذا كانت  $\delta$  مختارة صغيرة صغراً كافياً بحيث أن الفترة  $(a - \delta, a + \delta)$  لا تحتوى عدداً قياسياً مقامه أقل من  $n$  ، فينتج أنه عند  $x$  فى هذه الفترة يكون لدينا  $|f(x) - f(a)| = |f(x)| \leq 1/n < \varepsilon$  . أى أن  $f$  متصلة عند العدد غير القياسى  $a$  . لذلك تكون هذا الدالة متصلة بالضغط عند النقط غير القياسية فى نطاقها .

( \* ) بيتر جوستاف ليبجين درشليت ( ١٨٠٥ - ١٨٥٩ ) ولد فى ( راين لاند ) وتعلم فى برلين لمدة ثلاثين عاماً تقريباً قبل ذهابه إلى جيتنجن خلفاً للأستاذ جاوس . قد أوجد اسهامات أساسية فى نظرية العدد والتحليل .

(ط) في هذه المرة ، نفرض أن  $D(f) = \mathbb{R}^2$  ، ونفرض أن  $f$  هي الدالة في  $\mathbb{R}^2$  بقيم في  $\mathbb{R}^2$  معرفة بالآتي

$$f(x, y) = (2x + y, x - 3y)$$

نفرض أن  $(a, b)$  نقطة ثابتة في  $\mathbb{R}^2$  ، سنوضح أن  $f$  متصلة عند هذه النقطة .  
ولإجراء هذا ، نحتاج لتوضيح أنه يمكننا جعل المقدار

$$\|f(x, y) - f(a, b)\| = \{(2x + y - 2a - b)^2 + (x - 3y - a + 3b)^2\}^{1/2}$$

صغيراً اختيارياً بأخذ  $(x, y)$  قريبة قريباً كافياً من  $(a, b)$  . بما أن  
 $\{p^2 + q^2\}^{1/2} \leq \sqrt{2} \sup\{|p|, |q|\}$  ، فن الواضح جداً ملاحظة أنه يمكن جعل الحدين

$$|2x + y - 2a - b|, \quad |x - 3y - a + 3b|$$

صغيرين اختيارياً بأخذ  $(x, y)$  قريبة قريباً كافياً من  $(a, b)$  في  $\mathbb{R}^2$  . وفي الحقيقة  
بمتباينة المثلث نجد أن

$$|2x + y - 2a - b| = |2(x - a) + (y - b)| \leq 2|x - a| + |y - b|$$

الآن  $\|(x, y) - (a, b)\| = \{(x - a)^2 + (y - b)^2\}^{1/2} \leq |x - a| + |y - b|$  وبالمثل المقدار  $|x - a|$  ،  
ومن ثم يكون لدينا

$$|2x + y - 2a - b| \leq 3\|(x, y) - (a, b)\|$$

بالمثل

$$|x - 3y - a + 3b| \leq |x - a| + 3|y - b| \leq 4\|(x, y) - (a, b)\|$$

لذلك إذا كانت  $\varepsilon > 0$  ، يمكننا أخذ  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/(4\sqrt{2})$  ومتأكدين من أنه إذا كانت  
 $\|(x, y) - (a, b)\| < \delta(\varepsilon)$  فإن  $\|f(x, y) - f(a, b)\| < \varepsilon$  ، مع أنه يمكن الحصول على  
فترة أكبر بمقدار  $\delta$  بتحليل أكثر صفاء (مثال ذلك باستخدام متباينة شفايتز ٨ - ٧) .

(ي) ثانياً نفرض أن  $D(f) = \mathbb{R}^2$  ونفرض أن  $f$  معرفة بأنها

$$f(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$$

إذا كانت  $(a, b)$  نقطة ثابتة في  $\mathbb{R}^2$  ، فإن

$$\|f(x, y) - f(a, b)\| = \{(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2 + (2xy - 2ab)^2\}^{1/2}$$

كما في (ك) ، نفحص الحدين في الطرف الأيمن كل على حدة ، سيلاحظ أننا  
نحتاج للحصول على حسابات أولية لمقدار . من المتباينة المثلثية ، نجد أن

$$|x^2 + y^2 - a^2 - b^2| \leq |x^2 - a^2| + |y^2 - b^2|$$

إذا كانت النقطة  $(x, y)$  في نطاق مسافة واحد صحيح من  $(a, b)$  ، فإن  $|x| \leq |a| + 1$

لذلك  $|x+a| \leq 2|a|+1$  ،  $|y| \leq |b|+1$  بحيث أن  $|y+b| \leq 2|b|+1$  ونجد أن

$$\begin{aligned} |x^2+y^2-a^2-b^2| &\leq |x-a|(2|a|+1)+|y-b|(2|b|+1) \\ &\leq 2(|a|+|b|+1)\|(x,y)-(a,b)\| \end{aligned}$$

ونبسط مماثل نجد أن

$$\begin{aligned} |2xy-2ab| &= 2|xy-xb+xb-ab| \leq 2|x||y-b|+2|b||x-a| \\ &\leq 2(|a|+|b|+1)\|(x,y)-(a,b)\| \end{aligned}$$

لذلك ، نضع

$$\delta(\varepsilon) = \inf \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}(|a|+|b|+1)} \right\}$$

إذا كانت  $\|(x,y)-(a,b)\| < \delta(\varepsilon)$  ، وإذن نحصل على  $\|f(x,y)-f(a,b)\| < \varepsilon$  .  
ما يثبت أن  $f$  متصلة عند النقطة  $(a,b)$  .

### محصول دوال :

النتيجة الآتية هي نتيجة مباشرة لنظريتي ١٥ - ٦ ، ٢٠ - ٢ (ج) ، لذلك سوف لا ننسخ التفاصيل . وبالتناوب ، يمكن برهنة هذه النتيجة مباشرة باستخدام مناقشات موازية تماماً التي استخدمت في البرهان لنظرية ١٥ - ٦ . نذكر أنه إذا كانت  $f$  ،  $g$  دالتين نطاقهما  $D(f)$  ،  $D(g)$  في  $R^p$  ومداهما في  $R^q$  . ونعرف حاصل جمعهما  $f+g$  ، باقي طرحهما  $f-g$  وحاصل ضربهما القياسي  $g \cdot f$  لكل  $x$  في  $D(f) \cap D(g)$  بالصيغ الآتية :

$$f(x)+g(x), \quad f(x)-g(x), \quad f(x) \cdot g(x)$$

بالمثل ، إذا كانت  $c$  عدداً حقيقياً وإذا كانت  $\varphi$  دالة نطاقها  $D(\varphi)$  في  $R^p$  ومداها في  $R$  ، فنعرف حواصل  $f$  عند  $c$  في  $D(f)$  ،  $f \cdot \varphi$  عند  $x$  في  $D(\varphi) \cap D(f)$  بالصيغتين

$$cf(x), \quad \varphi(x)f(x)$$

وفي الحالة الخاصة ، إذا كانت  $\varphi(x) \neq 0$  عند  $x \in D_0$  ، فإنه يمكننا تعريف خارج القسمة  $f/\varphi$  عند  $x$  في  $D(f) \cap D_0$  بالتعريف

$$f(x)/\varphi(x)$$

الآن بهذه التعاريف نقرر النتيجة .

٢٠ - ٦ نظرية . إذا كانت الدوال  $\varphi$  ،  $g$  ،  $f$  متصلة عند نقطة ، فإن المحصلات الجبرية

لهذه الدوال

$f+g, \quad f-g, \quad f \cdot g, \quad cf, \quad \varphi f \quad \text{و} \quad f/\varphi$   
تكون أيضاً متصلة عند هذه النقطة .

يوجد محصلة جبرية مفيدة غالباً . إذا كانت  $f$  مرفقة في  $D(f)$  من  $R^p$  إلى  $R^q$  فنعرف القيمة المطلقة  $|f|$  للدالة  $f$  بأنها الدالة التي مداها في الأعداد الحقيقية  $R$  والتي قيمتها عند  $x$  في  $D(f)$  هي  $|f(x)|$  .

٢٠-٧ نظرية . إذا كانت  $f$  دالة متصلة عند نقطة ، فإن  $|f|$  تكون أيضاً متصلة هناك

البرهان . من المتباينة المثلثية ، نجد أن

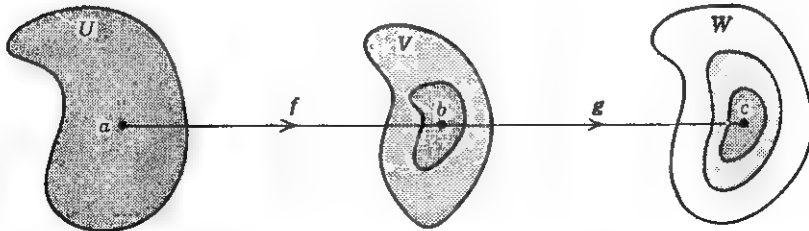
$$||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)|$$

التي تنتج منها النتيجة المطلوبة في الحال وهو المطلوب إثباته .

نتذكر مفهوم تحصيل دالتين . نفرض أن  $f$  لها نطاق  $D(f)$  في  $R^q$  ومداها في  $R^p$  ونفرض أن  $g$  لها نطاق  $D(g)$  في  $R^q$  ومداها في  $R$  . عرفنا في تعريف ٢-٢ تركيب  $h = g \circ f$  بنطاق  $D(h) = \{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\}$  وعند  $x$  في  $D(h)$  وضعنا  $h(x) = g[f(x)]$  . أي أن  $h = g \circ f$  هي دالة ترسم  $D(h)$  ، التي هوفئة جزئية من  $D(f) \subseteq R^p$  إلى  $R$  . الآن سنثبت الاتصال لهذه الدالة .

٢٠-٨ نظرية . إذا كانت  $f$  دالة متصلة عند  $a$  وكانت  $g$  متصلة عند  $b = f(a)$  فإن التحصيل  $g \circ f$  يكون متصلاً عند  $a$  .

البرهان . نفرض  $W$  هي جوار النقطة  $c = g(b)$  . بما أن  $g$  متصلة عند  $b$  ، فيوجد جوار  $V$  عند  $b$  بحيث أنه إذا كانت  $y$  تنتمي إلى  $V \cap D(g)$  فإن  $g(y) \in W$  . بما أن  $f$  متصلة عند  $a$  ، فيوجد جوار  $U$  للنقطة  $a$  بحيث أنه إذا كانت  $x$  تنتمي إلى  $U \cap D(f)$  فإن  $f(x)$  تكون في  $V$  لذلك ، إذا كانت  $x$  تنتمي إلى  $U \cap D(g \circ f)$  فإن  $f(x)$  تكون في  $V \cap D(g)$  و  $g[f(x)]$  تنتمي إلى  $W$  . ( انظر شكل ٢٠-٤ ) . هذا يثبت أن  $h = g \circ f$  متصلة عند  $a$  . وهو المطلوب إثباته .



(شكل ٢٠-٤)

## تمرينات :

٢٠- (أ) اثبت أنه إذا كانت  $f$  معرفة عند  $x \geq 0$  بأنها  $f(x) = \sqrt{x}$  ، فإن  $f$  تكون متصلة عند كل نقطة من نطاقها .

٢٠- (ب) وضح أن « دالة كثيرة الحدود » أى دالة  $f$  على الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{عند } x \in \mathbb{R}$$

تكون متصلة عند كل نقطة من الفراغ  $\mathbb{R}$

٢٠- (ج) وضح أن « دالة قياسية » (أى خارج قسمة دالتين كثيرتي الحدود) تكون متصلة عند كل نقطة من القطعة المعرفة عندها

٢٠- (د) استخدم متباينة شفارتز لتوضح أنه يمكن أخذ  $\delta(\epsilon) = \epsilon/\sqrt{15}$  في مثال

٢٠- (ط) .

٢٠- (هـ) بفرض أن  $f$  هى دالة في  $\mathbb{R}$  إلى  $\mathbb{R}$  ومعرفة بالتعريف

$$f(x) = x \quad \text{، } x \text{ غير قياسية}$$

$$f(x) = 1 - x, \quad \text{، } x \text{ قياسية}$$

وضح أن  $f$  تكون متصلة عند  $x = \frac{1}{2}$  وغير متصلة عند أى قيمة أخرى .

٢٠- (و) بفرض أن  $f$  متصلة في  $\mathbb{R}$  إلى  $\mathbb{R}$  . وضح أنه إذا كانت  $f(x) = 0$

عندما تكون  $x$  قياسية فإن  $f(x) = 0$  لكل  $x$  في  $\mathbb{R}$

٢٠- (ز) بفرض أن  $f$  ،  $g$  دالتان متصلتان في  $\mathbb{R}$  إلى  $\mathbb{R}$  . هو صحيح أن

$f(x) = g(x)$  عند  $x \in \mathbb{R}$  إذا وإذا فقط كانت  $f(x) = g(x)$  عند جميع الأعداد القياسية  $y$  في  $\mathbb{R}$  ؟

٢٠- (ح) استخدم المتباينة  $|\sin x| \leq |x|$  عند  $x \in \mathbb{R}$  لتوضح أن دالة الجيب تكون

متصلة عند  $x = 0$  استخدم هذه الحقيقة مع المتطابقة

$$\sin x - \sin u = 2 \sin \frac{1}{2}(x - u) \cos \frac{1}{2}(x + u)$$

لبرهنة أن دالة الجيب متصلة عند أى نقطة في الفراغ  $\mathbb{R}$

٢٠- (ط) باستخدام النتيجة في التمرين السابق ، وضح أن الدالة  $g$  المعرفة في  $\mathbb{R}$  إلى  $\mathbb{R}$

بالتعريف

$$g(x) = x \sin(1/x), \quad x \neq 0,$$

$$= 0, \quad x = 0$$

متصلة عند كل نقطة . ارمس شكلاً تخطيطياً لهذه الدالة .

٢٠- (ى) بفرض أن  $h$  معرفة عند  $x \neq 0, x \in \mathbb{R}$  بأنها

$$h(x) = \sin(1/x), \quad x \neq 0$$

اثبت أنه كيفما تكون  $h$  معرفة عند  $x = 0$  ، فإن الدالة ستكون غير متصلة عند  $x = 0$  .

٢٠- (ك) بفرض أن  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  معرفة بأنها

$$F(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{إذا كانت } x, y \in \mathbb{Q}$$

$$= 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

عين النقط التي عندها  $F$  تكون متصلة .

٢٠- (ل) نقول أن دالة  $f$  في  $\mathbb{R}$  إلى  $\mathbb{R}$  جمعية إذا كانت تحقق

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

عند كل  $x, y \in \mathbb{R}$  . وضح أن الدالة الجمعية المتصلة عند  $x = 0$  تكون متصلة عند أى نقطة للفراغ  $\mathbb{R}$  . اثبت أن دالة جمعية باطراد متصلة عند أى نقطة .

٢٠- (م) بفرض أنه إذا كانت  $f$  دالة جمعية متصلة في  $\mathbb{R}$  . وإذا كانت  $c = f(1)$  ، أثبت أن  $f(x) = cx$  عند كل  $x$  في  $\mathbb{R}$  ( إرشاد : أولاً وضح أنه إذا كانت  $r$  عدداً قياسياً ، فإن  $f(r) = cr$  ) .

٢٠- (ن) بفرض  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تحقق العلاقة

$$g(x+y) = g(x)g(y) \quad \text{عند } x, y \in \mathbb{R}$$

وضح أنه إذا كانت  $g$  متصلة عند  $x = 0$  ، فإن  $g$  تكون متصلة عند كل نقطة . أيضا ، إذا كانت  $g(a) = 0$  عند نقطة ما  $a \in \mathbb{R}$  حيث  $a \neq 0$  ، فإن  $g(x) = 0$  لكل  $x \in \mathbb{R}$  .

٢٠- (س) إذا كانت  $|f|$  متصلة عند نقطة ، فهل صحيح أن  $f$  تكون أيضاً متصلة عند هذه النقطة ؟

٢٠- (ع) بفرض  $f, g: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  متصلة عند نقطة  $a \in \mathbb{R}^p$  وبفرض  $k$  و  $h$  معرفتان في  $\mathbb{R}^p$  إلى  $\mathbb{R}$  بالتعريف

$$h(x) = \sup \{f(x), g(x)\}, \quad k(x) = \inf \{f(x), g(x)\}$$

وضح أن  $h$  و  $k$  متصلتان عند  $a$  ( إرشاد : لاحظ أن

$$\inf \{b, c\} = \frac{1}{2}(b+c-|b-c|) \quad , \quad \sup \{b, c\} = \frac{1}{2}(b+c+|b-c|)$$

٢٠- (ف) إذا كانت  $x \in \mathbb{R}$  ، فنعرف غالباً  $[x]$  بأنه أكبر عدد صحيح  $n \in \mathbb{Z}$  بحيث أن

$x \leq n$  الراسم  $x \leftarrow [x]$  يسمى دالة أكبر عدد صحيح . ارسم شكلاً تخطيطياً وعين نقط الاتصال للدوال المعرفة عند  $x \in \mathbb{R}$  بما يلي

$$\begin{array}{ll} g(x) = x - [x] & \text{(ب)} \\ k(x) = \sin \frac{1}{2} \pi [x] & \text{(د)} \end{array} \quad \begin{array}{ll} f(x) = [x] & \text{(ا)} \\ h(x) = [2 \sin x] & \text{(ج)} \end{array}$$

٢٠- (ص) دالة  $f$  معرفة في فترة  $I \subseteq \mathbb{R}$  إلى  $\mathbb{R}$  يقال إنها متزايدة في  $I$  إذا كانت  $f(x) \leq f(x')$  تضمن  $x \leq x', x, x' \in I$  . يقال إنها متزايدة بالضبط في  $I$  إذا كانت  $f(x) < f(x')$  تدل على أن  $x < x', x, x' \in I$  . يمكن إعطاء تعريفات مشابهة لدوال متناقصة ودوال متناقصة بالضبط . دالة إما متزايدة أو متناقصة في فترة يقال إنها مطردة في هذه الفترة .

(أ) إذا كانت  $f$  متزايدة في  $I$  ، فإن  $f$  تكون متصلة عند نقطة داخلية  $c \in I$  إذا وإذا فقط كان يوجد لكل  $\varepsilon > 0$  نقط  $x_1, x_2 \in I, x_1 < c < x_2$  بحيث أن  $f(x_2) - f(x_1) < \varepsilon$

(ب) إذا كانت  $f$  متزايدة في  $I$  ، فإن  $f$  تكون متصلة عند نقطة داخلية  $c \in I$  إذا وإذا فقط كان

$$\sup \{f(x) : x < c\} = f(c) = \inf \{f(x) : x > c\}$$

٢٠- (ق) بفرض أن  $f$  متزايدة في  $I = [a, b]$  بمعنى التمرين السابق وبفرض

$$j_c = \inf \{f(x) : x > c\} - \sup \{f(x) : x < c\}$$

إذا كانت  $j_c > 0$  ، نقول أن  $f$  لها وثبة  $j_c$  عند النقطة  $c$  .

(أ) إذا كانت  $n \in \mathbb{N}$  وضح أنه يمكن أن توجد فئة محدودة من نقط في  $I$  التي عندها  $f$  يكون لها وثبة تزيد عن  $1/n$  .

(ب) وضح أن الدالة المتزايدة يمكن أن يكون لها على الأكثر فئة محسوبة من نقط عدم الاتصال .

### مشروعات :

٢٠-  $\alpha$  نفرض أن  $g$  دالة في  $\mathbb{R}$  إلى  $\mathbb{R}$  وليست مساوية للصفر تطابقياً وتحقق المعادلة الدالية

$$(*) \quad x, y \in \mathbb{R} \quad \text{عند} \quad g(x+y) = g(x)g(y)$$

النفرض من هذا المشروع هو توضيح أن  $g$  يجب أن تكون « دالة أسية » :

(أ) أثبت أن  $g$  دالة متصلة عند كل نقطة من  $\mathbb{R}$  إذا وإذا فقط كانت متصلة عند النقطة  $x = 0$  .

- (ب) وضح أن  $g(x) > 0$  لكل  $x \in \mathbb{R}$  .
- (ج) أثبت أن  $g(0) = 1$  . إذا كانت  $a = g(1)$  ، فإن  $a > 0$  و  $g(r) = a^r$  لجميع  $r \in \mathbb{Q}$  .
- (د) الدالة  $g$  تكون متزايدة بالضبط ، أو ثابتة ، أو متناقصة بالضبط على حسب كون  $g(1) = 1$  ،  $g(1) > 1$  ، أو  $0 < g(1) < 1$  . عندما تكون  $g$  متصلة .
- (هـ) إذا كانت  $g(x) > 1$  عند  $x$  في فترة ما  $(0, \delta)$  ،  $\delta > 0$  فإن  $g$  متزايدة بالضبط ومتصلة في  $\mathbb{R}$  .
- (و) إذا كانت  $a > 0$  ، فإنه يوجد على الأكثر دالة متصلة واحدة  $g$  تحقق (\*) بحيث أن  $g(1) = a$  .
- (ز) نفرض أن  $a > 1$  . بالرجوع إلى مشروع ٦ -  $\beta$  وضح أنه توجد دالة متصلة وحيدة تحقق (\*) بحيث أن  $g(1) = a$  .
- ٢٠ -  $\beta$  نفرض  $P = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$  ونفرض أن  $h: P \rightarrow \mathbb{R}$  دالة لا تساوى الصفر تطابقياً وتحقق المعادلة الدالية
- $$h(xy) = h(x) + h(y) \quad \text{عند } x, y \in P \quad (\dagger)$$
- الفرض من هذا المشروع هو توضيح أن  $h$  يجب أن تكون « دالة لوغاريتمية » .
- (أ) وضح أن  $h$  متصلة عند كل نقطة من  $P$  إذا وإذا فقط كانت دالة متصلة عند النقطة  $x = 1$  .
- (ب) وضح أن  $h$  لا يمكن تعريفها عند  $x = 0$  لتحقق ( $\dagger$ ) عند  $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$  .
- (ج) وضح أن  $h(1) = 0$  . إذا كانت  $x > 0$  ،  $r \in \mathbb{Q}$  ، فإن  $h(x^r) = rh(x)$  .
- (د) وضح أنه إذا كانت  $h(x) \geq 0$  في فترة ما  $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$  فإن  $h$  تكون متزايدة بالضبط ومتصلة في  $P$  .
- (هـ) إذا كانت  $h$  متصلة ، وضح أن  $h(x) \neq 0$  عند  $x \neq 1$  . أيضا ، أما  $h(x) > 0$  عند  $x > 1$  ، أو  $h(x) < 0$  عند  $x > 1$  .
- (و) إذا كانت  $b > 1$  ، وضح أنه توجد على الأكثر دالة متصلة واحدة في  $P$  وتحقق ( $\dagger$ ) وبحيث أن  $h(b) = 1$  .
- (ز) بفرض أن  $b > 1$  . بالرجوع إلى مشروع ٦ -  $\gamma$  . وضح أنه توجد دالة متصلة وحيدة تحقق ( $\dagger$ ) بحيث أن  $h(b) = 1$  .



**الباب الواحد والعشرون — دوال خطية :**

اختصت المناقشة السابقة بدوال اختيارية معرفة في جزء من الفراغ  $R^p$  إلى  $R^q$ . قبل الاستمرار في المناقشة نريد أن نقدم صنفاً من دوال بسيطة نسبياً ولكنها هامة جداً بدرجة كبيرة ، وتسمى «الدوال الخطية» والتي تظهر في تطبيقات كثيرة جداً.

٢١-١ تعريف. يقال لدالة  $f$  نطاقها  $R^p$  ومداها في  $R^q$  أنها خطية في حالة

$$(21.1) \quad f(ax + by) = af(x) + bf(y)$$

الحسين  $a, b$  في  $R$  ،  $x, y$  في  $R^p$  .

ينج بالاستنتاج من (٢١ - ١) أنه إذا كانت  $a, b, \dots, c$  تكون  $n \in \mathbb{N}$  أعداداً حقيقية ،  $x, y, \dots, z$  هي  $n$  عناصر من  $R^p$  ، فإن

$$f(ax + by + \cdots + cz) = af(x) + bf(y) + \cdots + cf(z)$$

وقد لوحظ حالا أن القوال في مثال ٢٠ - ٦ (ب) ، ٢٦ - ٦ (ط) هي دوال خطية في الحالة  $p = q = 1$  ،  $p = q = 2$  ، على الترتيب . وفي الحقيقة ليس من الصعب تمييز الدالة الخطية في الحالة العامة من  $R^p$  إلى  $R^q$  .

٢١-٢ نظرية . إذا كانت  $f$  دالة خطية نفاظها  $R^p$  ومداها في  $R^q$  ، فيوجد  $pq$  أعداد حقيقية  $(c_{ij})$  ، بحيث أنه إذا كانت  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  أى نقطة في  $R^p$  وكانت  $y = (y_1, y_2, \dots, y_q) = f(x)$  هى صورتها تحت  $f$  ، فنجد أن :

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1p}x_p, \\ y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2p}x_p, \\ &\vdots \\ y_q &= c_{q1}x_1 + c_{q2}x_2 + \dots + c_{qp}x_p \end{aligned} \quad (21.2)$$

وبالعكس ، إذا كانت  $(c_{ij})$  مجموعة من  $pq$  من الأعداد الحقيقية ، فإن الدالة التي تنقل  
النصر  $x$  في  $R^p$  إلى النصر  $y$  في  $R^q$  طبقاً للمعادلات  $(21 - 2)$  هي دالة خطية نطاقها  
 $R^p$  ومداها في  $R^q$ .

البرهان . بفرض أن  $e_1, e_2, \dots, e_p$  عناصر الفراغ  $R^p$  ومغطاة بواسطة

$$(1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_p = (0, 0, \dots, 1)$$

نفحص الصور لهذه المتجهات تحت الدالة الخطية  $f$  . نفرض أن



حقيقية . كما لاحظنا أنه يمكن وصف مفعول الدالة  $f$  بدلالة مصفوفتها . سوف لا يكون من الضروري تطوير أى من النظرية الشاملة للمصفوفات ، كيفما ، لكن سنعتبر المصفوفة ( ٢١ - ٤ ) كاختزال لوصف مفصل للدالة الخطية  $f$  .

الآن سنبرهن أن الدالة الخطية من  $R^p$  إلى  $R^q$  تكون أوتوماتيكياً ( ذاتياً أو تلقائياً ) متصلة لإجراء هذا ، أولاً يفيد ذكر متباينة شفارتز في الصورة

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_pb_p|^2 \leq \{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_p^2\} \{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_p^2\}$$

نستخدم هذه المتباينة لكل مقدار في المعادلة ( ٢١ - ٢ ) لنحصل على ، عند  $1 \leq i \leq q$  ، التقدير

$$|y_i|^2 \leq (|c_{i1}|^2 + |c_{i2}|^2 + \dots + |c_{ip}|^2) \|x\|^2 = \sum_{j=1}^p |c_{ij}|^2 \|x\|^2$$

بجمع هذه المتباينات ، نحصل على

$$\|y\|^2 \leq \left\{ \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p |c_{ij}|^2 \right\} \|x\|^2$$

التي منها نستنتج أن

$$\|y\| = \|f(x)\| \leq \left\{ \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p |c_{ij}|^2 \right\}^{1/2} \|x\| \quad (21.5)$$

٢١ - ٢ نظرية . إذا كانت  $f$  دالة خطية نطاقها  $R^p$  ومداها في  $R^q$  ، فإنه يوجد مقدار ثابت موجب  $A$  بحيث أنه إذا كانت  $u$  و  $v$  أى متجهين في  $R^p$  . فإن

$$\|f(u) - f(v)\| \leq A \|u - v\| \quad (21.6)$$

لذلك ، تكون دالة خطية  $R^p$  إلى  $R^q$  متصلة عند كل نقطة .

البرهان . قد رأينا ، في استنتاج قانون ( ٢١ - ٥ ) أنه يوجد مقدار ثابت  $A$  بحيث أنه إذا كانت  $x$  أى عنصر للفراغ  $R^p$  فإن  $\|f(x)\| \leq A \|x\|$  . الآن نفرض  $x = u - v$  . ونستخدم خاصية الخطية للدالة  $f$  لنحصل على  $f(x) = f(u - v) = f(u) - f(v)$  . وإذن ، ينتج القانون ( ٢١ - ٦ ) من الواضح أن هذه العلاقة تضمن الاتصال للدالة  $f$  ، لأننا يمكننا جعل  $\|f(u) - f(v)\| < \varepsilon$  بأخذ  $\|u - v\| < \varepsilon/A$  إذا كانت  $A > 0$  .

ويمكن كتبرين توضيح أنه إذا كانت  $f$  و  $g$  دالتين خطيتين في  $R^p$  إلى  $R^q$  ، فإن  $f + g$  هي دالة خطية في  $R^p$  إلى  $R^q$  . بالمثل ، إذا كانت  $c \in R$  ، فإن  $cf$  تكون دالة خطية . نترك للقارئ توضيح أن المجموعة  $\mathcal{L}(R^p, R^q)$  لكل النوال الخطية في  $R^p$

إلى  $R^q$  هي فراغ متجه تحت لهذه العمليات المتجهة . وسنبين في التمرينات كيفية تعريف عمود على هذا الفراغ المتجه .

### تمرينات :

٢١- ( أ ) وضح أن  $f: R^p \rightarrow R^q$  دالة خطية إذا وإذا فقط  $f(ax) = af(x)$  ،

كل  $x, y \in R^p$  ولكل  $a \in R$  لكل  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  .

٢١- ( ب ) إذا كانت  $f$  دالة خطية للفراغ  $R^p$  إلى  $R^q$  ، وضح أن الأعمدة للمصفوفة

المثلة ( ٢١ - ٤ ) للدالة  $f$  تحدد العناصر في  $R^q$  التي ترسم إليها العناصر

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_p = (0, 0, \dots, 1)$$

من الفراغ  $R^p$  بالدالة  $f$  .

٢١- ( ج ) بفرض  $f$  دالة خطية للفراغ  $R^2$  إلى الفراغ  $R^3$  والتي تنقل العناصر

$f(e_1) = (2, 1, 0)$ ،  $f(e_2) = (1, 0, -1)$  إلى المتجهات  $R^3$  إلى الفراغ  $R^2$   $e_1 = (1, 0)$ ،  $e_2 = (0, 1)$

للفراغ  $R^3$  . اعط تمثيلاً بالمصفوفة للدالة  $f$  . ما هي المتجهات في  $R^3$  التي تكون الصور تحت

$f$  للعناصر  $(1, 3)$  و  $(1, 1)$  و  $(2, 0)$  ؟

٢١- ( د ) إذا كانت  $f$  تدل على الدالة الخطية في تمرين ٢١ - ج ، اثبت أنه ليس كل

متجه في  $R^3$  يكون صورة تحت الدالة  $f$  لمتجه في  $R^2$  .

٢١- ( هـ ) بفرض أن  $g$  أي دالة خطية من  $R^2$  إلى  $R^3$  . وضح أنه ليس كل عنصر من

$R^3$  هي الصورة تحت  $g$  لمتجه في  $R^2$  .

٢١- ( و ) بفرض  $h$  أي دالة خطية من  $R^1$  إلى  $R^2$  . وضح أنه يوجد متجهات ليست

أصفاراً في  $R^2$  التي ترسم إلى متجه صفر في  $R^2$  بواسطة  $h$  .

٢١- ( ز ) بفرض أن  $f$  دالة خطية من  $R^2$  إلى  $R^2$  وبفرض أن التمثيل بمصفوفة للدالة  $f$  هو

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

وضح أن  $f(x) \neq 0$  عند  $x \neq 0$  إذا وإذا فقط  $\Delta = ad - bc \neq 0$

٢١- ( ح ) بفرض أن الدالة  $f$  هي نفسها في تمرين ٢١ - ز السابق . وضح أن  $f$  ترسم

$R^2$  إلى  $R^2$  إذا وإذا فقط  $\Delta = ad - bc \neq 0$  . وضح أنه إذا كانت  $\Delta \neq 0$  فإن الدالة

المكسبة  $f^{-1}$  تكون خطية وتمثل بالمصفوفة

$$\begin{bmatrix} d/\Delta & -b/\Delta \\ -c/\Delta & a/\Delta \end{bmatrix}$$

٢١ - (ط) بفرض  $g$  دالة خطية من  $R^p$  إلى  $R^q$  . وضع أن  $g$  تكون تناظراً أحادياً إذا وإذا فقط كانت  $g(x)=0$  تضمن أن  $x = 0$  .

٢١ - (ي) إذا كانت  $h$  دالة خطية وكانت تناظراً أحادياً من  $R^p$  إلى  $R^p$  . وضع أن الدالة العكسية  $h^{-1}$  دالة خطية فوقية من  $R^p$  إلى  $R^p$  .

٢١ - (ك) وضع أن حاصل جمع وتحصيل دالتين خطيتين يكونان دالتين خطيتين .

٢١ - (ل) إذا كانت  $f$  راسماً خطياً من  $R^p$  إلى  $R^q$  ، وعرف

$$\|f\|_{pq} = \sup \{ \|f(x)\| : x \in R^p, \|x\| \leq 1 \}$$

وضع أن الراسم  $f \mapsto \|f\|_{pq}$  يعرف عموداً في فراغ المتجه  $\mathcal{L}(R^p, R^q)$  لكل الدوال الخطية في  $R^p$  إلى  $R^q$  . وضع أن  $\|f(x)\| \leq \|f\|_{pq} \|x\|$  لكل  $x \in R^p$

٢١ - (م) إذا كانت  $f$  راسماً خطياً من  $R^p$  إلى  $R^q$  ، عرف

$$M(f) = \inf \{ M > 0 : \|f(x)\| \leq M \|x\|, x \in R^p \}$$

وضع أن  $M(f) = \|f\|_{pq}$

٢١ - (ن) إذا كانت  $f, g$  في  $\mathcal{L}(R^p, R^p)$  وضع أن  $f \circ g$  تكون أيضاً في  $\mathcal{L}(R^p, R^p)$

وأن  $\|f \circ g\|_{pp} \leq \|f\|_{pp} \|g\|_{pp}$  . وضع أن المتباينة يمكن أن تكون صحيحة ودقيقة للدوال معينة من  $f, g$  .

٢١ - (س) اعط مثالا لراسم خطي  $F$  في  $\mathcal{L}(R^p, R^q)$  مثلاً بمصفوفة  $[c_{ij}]$  حيث نجد

$$\|f\|_{pq} < \left\{ \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p c_{ij}^2 \right\}^{1/2}$$

٢١ - (ع) إذا كانت (٢١ - ٤) تغطي المصفوفة المثلثة للدالة  $f$  . وضع أن  $\|f\|_{pq} \leq |c_{ii}|$

لكل  $i, j$

## الباب الثاني والعشرون — خواص كروية للدوال متصلة :

اعتبرنا في باب ٢٠ الاتصال « المحلى » ، أو بمعنى آخر كنا مهتمين بالاتصال عند نقطة . في هذا الباب سوف نهم بإيجاد بعض خواص عميقة للدوال المتصلة . هنا سوف نتخصص بالاتصال « الكروى » بمعنى أننا سوف نفترض أن الدوال متصلة عند كل نقطة من نطاقها .

مالم توجد إشارة خاصة خلاف ذلك ، ستدل  $f$  إلى دالة نطاقها  $D(f)$  محتوية في  $R^p$  ومداها في  $R^q$  . نتذكر أنه إذا كانت  $B$  فئة جزئية للمدى في الفراغ  $R^q$  ، فإن الصورة العكسية للفئة الجزئية  $B$  تحت  $f$  هي الفئة

$$f^{-1}(B) = \{x \in D(f) : f(x) \in B\}$$

لاحظ أن  $f^{-1}(B)$  تكون تلقائياً فئة جزئية من النطاق  $D(f)$  حتى إذا كانت  $B$  ليست بالضرورة فئة جزئية من مدى الدالة  $f$ .

في مناهج التوبولوجيا ، حيث أحدها يكون أكثر اختصاصاً بالاتصال الكروى عن الاتصال المحلى تستخدم النتيجة الآتية غالباً كتعريف لاتصال كروى ويتضح أهميتها حالاً .

٢٢-١ نظرية الاتصال الكروى . النصوص الآتية تكون متكافئة .

(أ)  $f$  تكون متصلة في نطاقها  $D(f)$  .

(ب) إذا كانت  $G$  أى فئة مفتوحة في  $R^q$  ، حينئذ توجد فئة مفتوحة  $G_1$  في  $R^p$  بحيث أن  $G_1 \cap D(f) = f^{-1}(G)$  .

(ج) إذا كانت  $H$  أى فئة مغلقة في  $R^q$  ، حينئذ توجد فئة مغلقة  $H_1$  في  $R^p$  بحيث أن  $H_1 \cap D(f) = f^{-1}(H)$  .

البرهان . أولاً ، سنفرض أن (أ) تظل قائمة ونفرض أن  $G$  فئة جزئية مفتوحة في الفراغ  $R^q$  . إذا كانت  $a$  تنتمي إلى  $f^{-1}(G)$  ، حينئذ بما أن  $G$  جوار الدالة  $f(a)$  فينتج من اتصال الدالة  $f$  عند  $a$  أنه يوجد فئة مفتوحة  $U(a)$  بحيث أنه إذا كانت  $x \in D(f) \cap U(a)$  فإن  $f(x) \in G$  . نختار  $U(a)$  لكل  $a$  في  $f^{-1}(G)$  ونفرض أن  $G_1$  هي الاتحاد للفئات  $U(a)$  . من نظرية ٩-٢ (ج) ، نجد أن الفئة  $G_1$  مفتوحة ومن الواضح أن  $G_1 \cap D(f) = f^{-1}(G)$  . إذن (أ) تدل على (ب) .

الآن سنوضح أن (ب) تدل على (أ) . إذا كانت  $a$  نقطة اختيارية في النطاق  $D(f)$  ، وكانت  $G$  جواراً مفتوحاً للدالة  $f(a)$  ، فإن شرط (ب) يدل على أنه يوجد فئة مفتوحة  $G_1$  في  $R^p$  بحيث أن  $G_1 \cap D(f) = f^{-1}(G)$  بما أن  $f(a) \in G$  فينتج أن  $a \in G_1$  . إذن جوار النقطة  $a$  . إذا كانت  $x \in G_1 \cap D(f)$  فإن  $f(x) \in G$  . إذن  $f$  تكون متصلة عند النقطة  $a$  هذا يبرهن أن شرط (ب) يدل على (أ) .

الآن نبرهن على تكافؤ الشرطين (ب) ، (ج) . أولاً نلاحظ أنه إذا كانت  $B$  أى فئة جزئية من الفراغ  $R^q$  وإذا كانت  $C = R^q \setminus B$  ، فنجد أن  $f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C) = \emptyset$

$$D(f) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C) \quad (22.1)$$

إذا كانت  $B_1$  فئة جزئية من الفراغ  $R^p$  بحيث أن  $B_1 \cap D(f) = f^{-1}(B)$  فإن  $C_1 = R^p \setminus B_1$  ،  $B_1 \cap D(f) = f^{-1}(B)$  ،  $C_1 \cap f^{-1}(B) = \emptyset$

$$(22.2) \quad D(f) = (B_1 \cap D(f)) \cup (C_1 \cap D(f)) = f^{-1}(B) \cup (C_1 \cap D(f))$$

القانونين (٢٢-١) ، (٢٢-٢) يكونان تمثيلين للنطاق  $D(f)$  كالاتحاد للدالة العكسية  $f^{-1}(B)$  مع فئة أخرى التي لا توجد فقط مشتركة معها . وإذن نحصل على  $C_1 \cap D(f) = f^{-1}(C)$

نفرض أن (ب) تظل قائمة وأن  $H$  مغلقة في  $R^q$  استخدم البرهان المنتهى حالا في الحالة التي عندها  $B = R^q \setminus H$  ،  $C = H$  . وإذن  $B$  ،  $B_1$  فئتان مفتوحتان في  $R^q$  ،  $R^p$  ، على الترتيب ، لذلك تكون  $C_1 = R^p \setminus B_1$  مغلقة في  $R^p$  . هذا يوضح أن (ب) تدل على (ج) .

لتوضيح أن (ج) تدل على (ب) ، استخدم المناقشة السابقة عند  $B = R^q \setminus G$  حيث  $G$  فئة مفتوحة في  $R^q$  .

في الحالة التي فيها  $D(f) = R^p$  ، تصير النتيجة السابقة بسيطة لدرجة ما .

٢٢-٢ نتيجة . نفرض أن  $f$  معرفة في كل الفراغ  $R^p$  ومداها في  $R^q$  . فإن النصوص الآتية تكون متكافئة :

(أ)  $f$  تكون متصلة في  $R^p$  .

(ب) إذا كانت  $G$  مفتوحة في  $R^q$  ، فإن  $f^{-1}(G)$  تكون مفتوحة في  $R^p$

(ج) إذا كانت  $H$  مغلقة في  $R^q$  ، فإن  $f^{-1}(H)$  تكون مغلقة في  $R^p$  .

يجب أن نؤكد أن نظرية الاتصال الكروى (٢٢-١) لم تذكر أنه إذا كانت الدالة  $f$  متصلة وإذا كانت  $G$  فئة مفتوحة في  $R^p$  ، فإن الصورة المباشرة  $f(G) = \{f(x) : x \in G\}$  تكون مفتوحة في  $R^q$  . في الحالة العامة ، لا تحتاج دالة متصلة إلى إرسال فئات مفتوحة إلى فئات مفتوحة أو فئات مغلقة إلى فئات مغلقة . مثال ذلك ، الدالة  $f$  في  $R$  إلى  $R$  ، المعرفة بأنها

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

دالة متصلة في  $R$  [ في الحقيقة ، قد لوحظ في مثالي ٢٠-٥ (أ) ، (ج) أن الدالتين  $f_1(x) = 1$  ،  $f_2(x) = x^2$  عند  $x \in R$  متصلتان عند كل نقطة .

وينتج من نظرية ١٥-٦ ، أن

$$f_3(x) = 1+x^2, \quad x \in R$$

تكون متصلة عند كل نقطة وبما أن  $f$  لا تتلاشى أبداً ، فإن النظرية نفسها تدل على أن الدالة  $f$  المغطاة أعلاه تكون متصلة في  $R$  . إذا كانت  $G$  فئة مفتوحة  $(-1, 1)$  ،  $G = f^{-1}(G)$  فإن  $f(G) = (1/2, 1]$  ، وهي ليست مفتوحة في  $R$  . بالمثل ، إذا كانت  $H$  هي الفئة المغلقة

$H = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$  فإن  $f(H) = (0, \frac{1}{2}]$  ، وهي ليست مغلقة في  $\mathbb{R}$  . بالمثل ، الدالة  $f$  ترسم الفئة  $\mathbb{R}$  ، التي تكون إما مفتوحة أو مغلقة في  $\mathbb{R}$  ، إلى الفئة  $f(\mathbb{R}) = (0, 1]$  ، التي ليست مفتوحة وليست مغلقة في  $\mathbb{R}$  .

المغزى للملاحظات السابقة هو أن خاصية الفئة من حيث كونها مفتوحة أو مغلقة لا تظل قائمة ضرورياً تحت راسم لدالة متصلة . لكن ، توجد خواص هامة لفئة تحتفظ بها الفئة تحت راسم متصل . مثال ذلك ، سنوضح الآن أن خواص الارتباط والدمج للفئات لها هذه الميزة .

### حفظ الاتصال أو الارتباط :

نتذكر من تعريف ١٢ - ١ أن الفئة  $H$  في  $\mathbb{R}^p$  تكون غير مرتبطة إذا كان يوجد فئتان مفتوحتان  $B$  و  $A$  في الفراغ  $\mathbb{R}^p$  بحيث أن  $A \cap H$  ،  $B \cap H$  فئتان غير متصلتين وغير خاليتين واتحادهما هو  $H$  . فئة تكون مرتبطة إذا لم تكن غير متصلة .

٢٢-٣ حفظ الارتباط . إذا كانت  $H \subseteq D(f)$  مرتبطة في  $\mathbb{R}^p$  وكانت الدالة  $f$  متصلة في  $H$  فإن  $f(H)$  تكون مرتبطة في  $\mathbb{R}^q$  .

البرهان . نفرض أن  $h$  هي تقييد الدالة  $f$  إلى الفئة  $H$  بحيث أن  $D(h) = H$  و  $h(x) = f(x)$  لكل  $x \in H$  . نلاحظ أن  $f(H) = h(H)$  وأن  $h$  متصلة في  $H$  .

إذا كانت  $f(H) = h(H)$  ليست مرتبطة في  $\mathbb{R}^q$  ، فإنه يوجد فئتان مفتوحتان  $B$  و  $A$  في  $\mathbb{R}^q$  بحيث أن  $A \cap h(H)$  ،  $B \cap h(H)$  فئتان غير متصلتين وغير خاليتين واتحادهما هو  $h(H)$  . ومن نظرية الاتصال الكروي ٢٢ - ١ ، نجد أنه يوجد فئتان مفتوحتان  $B_1$  و  $A_1$  في  $\mathbb{R}^p$  بحيث أن

$$A_1 \cap H = h^{-1}(A), \quad B_1 \cap H = h^{-1}(B)$$

هذه التقاطعات ليست خالية وعدم اتصالها ينتج من عدم اتصال الفئات  $A \cap h(H)$  ،  $B \cap h(H)$  . الفرض بأن اتحاد الفئات  $A \cap h(H)$  ،  $B \cap h(H)$  هو  $h(H)$  يدل على أن اتحاد  $A_1 \cap H$  ،  $B_1 \cap H$  هو  $H$  . لذلك ، يدل عدم ارتباط  $f(H) = h(H)$  على عدم ارتباط  $H$  . وهو المطلوب إثباته .

الكلمة الفعلية « متصلة » تقترح أنه لا يوجد « انفصالات » مفاجئة في الرسم التخطيطي للدالة ، ومن ثم لا تكون النتيجة الآتية بأى طريقة غير متوقعة ، لكن ، مطلوب من القارئ أن يحاول إيجاد برهان مختلف لهذه النظرية وسوف يصل إلى تقدير عمقها .



٢٢-٤ نظرية القيمة المتوسطة لبولزانو . نفرض أن  $H \subseteq D(f)$  فئة جزئية مرتبطة من الفراغ  $R^p$  وبفرض أن  $f$  متصلة في  $H$  وأن لها قيما في الفراغ  $R$  . إذا كانت  $h$  أى عدد حقيقى بحق

$$\inf \{f(x) : x \in H\} < k < \sup \{f(x) : x \in H\}$$

فإنه توجد على الأقل نقطة واحدة من  $H$  ، حيث تأخذ  $f$  عندها القيمة  $k$  .

البرهان . إذا كانت  $k \notin f(H)$  ، فإن الفئتين  $A = \{t \in R : t < k\}$  ،  $B = \{t \in R : t > k\}$  تكونان قطعاً للدالة  $f(H)$  مما يخالف النظرية السابقة وهو المطلوب إثباته

### حفظ الإدماج ( الموج ) :

سنفرض الآن أن الخاصية الهامة للإدماج يمكن حفظها تحت راسم متصل . سنتذكر أنه نتيجة لنظرية هاين - بوريل الهامة ١١ - ٢ تكون فئة جزئية  $K$  من الفراغ  $R^p$  مدمجة .

إذا وإذا فقط كانت مغلقة ومحدودة في  $R^p$  . أى أن النتيجة الآتية يمكن أن تكون صياغتها بقولنا أنه إذا كانت  $K$  مغلقة ومحدودة في  $R^p$  وإذا كانت  $f$  متصلة في  $K$  ومداها في  $R^q$  ، فإن  $f(K)$  تكون مغلقة ومحدودة في  $R^q$  .

٢٢-٥ حفظ الإدماج ( الموج ) . إذا كانت  $K \subseteq D(f)$  مدمجة و  $f$  متصلة في  $K$  ، فإن  $f(K)$  تكون مدمجة .

البرهان الأول . نفرض أن  $K$  متصلة ومحدودة في الفراغ  $R^p$  وسنوضح أن  $f(K)$  مغلقة ومحدودة في الفراغ  $R^q$  . إذا كانت  $f(K)$  ليست محدودة ، لكل  $n \in N$  فإنه توجد نقطة  $x_n$  في  $K$  حيث  $\|f(x_n)\| \geq n$  . بما أن  $K$  محدودة فإن المتتابعة  $X = (x_n)$  محدودة ، ومن ثم ينتج من نظرية بولزانو فيرشتراس ١٦ - ٤ أنه يوجد متتابعة جزئية من  $X$  وتتقارب إلى عنصر  $x$  . وبما أن  $x_n \in K$  حيث  $n \in N$  فإن النقطة  $x$  تنتمى إلى الفئة المغلقة  $K$  . ومن ثم تكون  $f$  متصلة عند  $x$  ، وإذن  $f$  تكون محدودة بالمقدار  $1 + \|f(x)\|$  في جوار  $x$  . بما أن هذا يخالف الفرض بأن  $\|f(x_n)\| \geq n$  ، فإن الفئة  $f(K)$  محدودة .

سنبرهن أن  $f(K)$  مغلقة بتوضيح أن أى نقطة تجمع  $y$  من  $f(K)$  يجب أن تكون محتوية في هذه الفئة . في الحقيقة ، إذا كانت  $n$  عددا طبيعياً ، فإنه توجد نقطة  $z_n$  في  $K$  بحيث أن  $\|f(z_n) - y\| < 1/n$  . ومن نظرية بولزانو فيرشتراس ١٦ - ٤ ، نجد أن المتتابعة

$Z = (z_n)$  لها متتابعة جزئية  $Z' = (z_{n(k)})$  بحيث تقتارب إلى عنصر  $z$  . بما أن  $K$  مغلقة .  
فينتج أن  $z \in K$  وتكون الدالة  $f$  متصلة عند  $z$  لذلك

$$f(z) = \lim_k (f(z_{n(k)})) = y$$

بما يثبت أن  $f$  تنتمي إلى  $f(K)$  . ومن ثم  $f(K)$  مغلقة .

البرهان الثاني . بتقييد  $f$  إلى  $K$  يمكننا فرض أن  $D(f) = K$  . نفترض الآن أن  $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$  هي عائلة من فئات مفتوحة في  $\mathbb{R}^q$  التي اتحادها يحتوى  $f(K)$  . ومن نظرية الاتصال الكروي ٢٢ - ١ نجد أنه يوجد لكل فئة  $G_\alpha$  في  $\mathcal{G}$  فئة جزئية مفتوحة  $C_\alpha$  من  $\mathbb{R}^p$  بحيث أن  $C_\alpha \cap D = f^{-1}(G_\alpha)$  . العائلة  $\mathcal{C} = \{C_\alpha\}$  تتكون من فئات جزئية مفتوحة من  $\mathbb{R}^p$  ، نحن نطالب بأن الاتحاد لهذه الفئات يحتوى  $K$  . لأنه ، إذا كانت  $x \in K$  ، فإن  $f(x)$  تكون محتوية في  $f(K)$  ، ومن ثم تنتمي  $f(x)$  إلى فئة ما  $G_\alpha$  ومن التركيب تنتمي  $x$  إلى الفئة المناظرة  $C_\alpha$  . بما أن  $K$  مدمجة ، فتكون محتوية في الاتحاد لعدد محدود من الفئات في  $\mathcal{C}$  وتكون صورتها  $f(K)$  محتوية في الاتحاد لعدد محدود من الفئات المناظرة في  $\mathcal{G}$  . وبما أن هذا صحيح لعائلة اختيارية  $\mathcal{G}$  من فئات مفتوحة تغطي  $f(K)$  فتكون الفئة  $f(K)$  مدمجة في  $\mathbb{R}^q$  .

إذا كان الملى الدالة هو  $\mathbb{R}$  فإنه يمكن أحيانا إعادة صياغة النظرية الآتية بقولنا إن دالة متصلة ذات قيم حقيقية في فئة مدمجة تدرك قيمتها العظمى وقيمتها الصغرى .

٢٢ - ٦ نظرية القيمة العظمى والصغرى . نفرض أن  $K \subseteq D(f)$  مدمجة في  $\mathbb{R}^p$  ونفرض أن  $f$  دالة متصلة ذات قيمة حقيقية . إذن يوجد نقط  $x^*$  ،  $x_*$  في  $K$  بحيث أن

$$f(x^*) = \sup \{f(x) : x \in K\}, \quad f(x_*) = \inf \{f(x) : x \in K\}$$

البرهان الأول . بما أن  $K$  مدمجة في  $\mathbb{R}^p$  ، فينتج من النظرية السابقة أن  $f(K)$  محدودة في  $\mathbb{R}$  . نفرض أن  $M = \sup f(K)$  ونفرض أن  $(x_n)$  متتابعة في  $K$  بحيث أن

$$f(x_n) \geq M - 1/n, \quad n \in \mathbb{N}$$

ينتج من نظرية بولزانو فيرشتراس ١٦ - ٤ ، أن تقترب متتابعة جزئية ما  $(x_{n(k)})$  إلى نهاية  $x^* \in K$  . بما أن  $f$  متصلة عند  $x^*$  ، فيجب أن يكون  $f(x^*) = \lim(f(x_{n(k)})) = M$  برهان وجود  $x_*$  مشابه تماما .

البرهان الثاني . بتقييد  $f$  إلى  $K$  ، يمكننا فرض أن  $D(f) = K$  . نضع  $M = \sup f(K)$  . إذن لكل  $n \in \mathbb{N}$  ، نفرض  $G_n = \{u \in \mathbb{R} : u < M - 1/n\}$  . بما أن

$G_n$  مفتوحة ، فينتج من نظرية الاتصال الكروى ٢٢-١ أنه يوجد فئة مفتوحة  $C_n$  في  $R^p$  بحيث أن

$$C_n \cap K = \{x \in K : f(x) < M - 1/n\}$$

الآن إذا لم نصل إلى القيمة  $M$  ، فإن اتحاد العائلة  $\mathcal{C} = \{C_n\}$  لفئات مفتوحة تحتوي جميع الفئة  $K$  . حيث أن  $K$  مدمجة والعائلة  $\{C_n \cap K\}$  متزايدة ، فإنه يوجد  $r \in N$  بحيث أن  $K \subseteq C_r$  . لكن حينئذ نحصل على  $f(x) < M - 1/r$  لكل  $x \in K$  ، مما يخالف الحقيقة التي تقول أن  $M = \sup f(K)$  وهو المطلوب إثباته

إذا كانت  $f$  لها مدى في  $R^q$  حيث  $q > 1$  ، فإن النتيجة الآتية تكون أحياناً مفيدة .

٢٢-٧ نتيجة . نفرض أن  $f$  دالة في  $D(f) \subseteq R^p$  إلى  $R^q$  ونفرض أن  $K \subseteq D(f)$  مدمجة . إذا كانت  $f$  متصلة في  $K$  ، حينئذ توجد فقط  $x^*$  ،  $x_*$  في  $K$  بحيث أن

$$\|f(x^*)\| = \sup \{\|f(x)\| : x \in K\}, \quad \|f(x_*)\| = \inf \{\|f(x)\| : x \in K\}$$

ينتج من نظرية ٢١-٢ أنه إذا كانت  $f: R^p \rightarrow R^q$  خطية ، فإنه يوجد مقدار ثابت  $M > 0$  بحيث أن  $\|f(x)\| \leq M \|x\|$  لجميع  $x \in R^p$  . لكن ليس صحيحاً دائماً أنه يوجد مقدار ثابت  $m > 0$  بحيث أن  $\|f(x)\| \geq m \|x\|$  لكل  $x \in R^p$  . الآن سنوضح أن هذه هي الحالة فقط وإذا فقط كانت  $f$  دالة خطية ادخالية .

٢٢-٨ نتيجة . نفرض أن  $f: R^p \rightarrow R^q$  دالة خطية . إذن  $f$  تكون دالة إدخالية أو دالة ولوجية إذا وإذا فقط كان يوجد  $m > 0$  بحيث أن  $\|f(x)\| \geq m \|x\|$  لكل  $x \in R^p$  .

البرهان . نفرض أن  $x$  دالة إدخالية ، ونفرض أن  $S = \{x \in R^p : \|x\| = 1\}$  وحدة الكرة المدمجة في  $R^p$  .

يوجد من نتيجة ٢٢-٧ بحيث أن  $x_* \in S$   $\|f(x_*)\| = m = \inf \{\|f(x)\| : x \in S\}$  بما أن  $f$  ولوجية فإن  $m = \|f(x_*)\| > 0$  . ومن ثم  $\|f(x)\| \geq m > 0$  لكل  $x \in S$  . الآن ، إذا كانت  $u \in R^p$  ،  $u \neq 0$  ، فإن  $u/\|u\|$  تنتمي إلى  $S$  وينتج من كون  $f$  خطية أن

$$\frac{1}{\|u\|} \|f(u)\| = \left\| f\left(\frac{u}{\|u\|}\right) \right\| \geq m$$

ومنها ينتج أن  $\|f(u)\| \geq m \|u\|$  لجميع  $u \in R^p$  (لأن النتيجة بسيطة عند  $u = 0$ ) . وبالعكس ، نفرض أن  $\|f(x)\| \geq m \|x\|$  لكل  $x \in R^p$  . إذا كانت  $f(x_1) = f(x_2)$  ، فنجد أن

$$0 = \|f(x_1) - f(x_2)\| = \|f(x_1 - x_2)\| \geq m \|x_1 - x_2\|$$

التي تدل على أن  $x_1 = x_2$  . لذلك تكون الدالة  $f$  ادخالية وهو المطلوب إثباته .

إحدى النتائج المدهشة لنظرية ٢٢ - ٥ هي أنه إذا كانت  $f$  دالة متصلة وإدخالية في نطاق مدمج فإن الدالة العكسية  $f^{-1}$  تكون متصلة تلقائياً .

٢٢ - ٩ اتصال الدالة العكسية . نفرض أن  $K$  فئة جزئية مدمجة من  $R^p$  .

ونفرض أن  $f$  دالة متصلة إدخالية بنطاق  $K$  ويمدى  $f(K)$  في  $R^q$  . حينئذ تكون الدالة العكسية متصلة بنطاق  $f(K)$  ومدى  $K$  .

البرهان . نلاحظ أنه حيث  $K$  مدمجة ، فإن نظرية ٢٢ - ٥ تدل على أن  $f(K)$  مدمجة ومن ثم مغلقة . بما أن  $f$  إدخالية من الفرض ، فإن الدالة العكسية  $g = f^{-1}$  تكون معرفة . افرض أن  $H$  أي فئة مغلقة في  $R^p$  واعتبر  $H \cap K$  ، حيث أن هذه الفئة محدودة ومغلقة فتؤكد نظرية ٩ - ٦ (ج) ، ونظرية بوريل هاين أن  $H \cap K$  فئة جزئية مدمجة من  $R^p$  . فستنتج من نظرية ٢٢ - ٥ ، أن  $H_1 = f(H \cap K)$  مدمجة ومن ثم فهي مغلقة في  $R^q$  . الآن إذا كانت  $g = f^{-1}$  ، فإن

$$H_1 = f(H \cap K) = g^{-1}(H)$$

بما أن  $H_1$  فئة جزئية من  $D(g) = f(K)$  ، فيمكننا كتابة المعادلة الأخيرة في الصورة  $H_1 \cap D(g) = g^{-1}(H)$

من نظرية الاتصال الكروي ٢٢ - ١ (ج) ، نستنتج أن  $g = f^{-1}$  تكون متصلة . وهو المطلوب إثباته .

سنختم هذا الباب بتقديم بعض المدلولات التي ستكون مناسبة .

٢٢ - ١٠ تعريف . إذا كانت  $D \subseteq R^p$  ، فإن المجموعة لكل الدوال المتصلة في  $D$  إلى  $R^q$  يرمز لها بالرمز  $C_{pq}(D)$  . المجموعة لكل الدوال المحدودة المتصلة في  $D$  إلى  $R^q$  يرمز لها بالرمز  $BC_{pq}(D)$  . إذا كانت  $p$  ،  $q$  معروفتين بالفهم ، فسُرمز لهاتين المجموعتين فقط بالرمزين  $C(D)$  ،  $BC(D)$  .

الجزء الأول من النتيجة الآتية هي نتيجة من نظرية ٢٠ - ٦ . والجزء الثاني يبرهن بنفس طريقة برهان مفترض ١٧ - ٨ .

٢٢ - ١١ نظرية . (أ) الفراغات  $C_{pq}(D)$  ،  $BC_{pq}(D)$  هي فراغات متجهة تحت العمليات المتجهة .

$$. x \in D \text{ عند } (f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (cf)(x) = cf(x)$$

(أ) الفراغ  $BC_{pq}(D)$  هو فراغ عمودى تحت العمود .

$$\|f\|_D = \sup \{\|f(x)\| : x \in D\}$$

بالطبع ، في الحالة الخاصة التي فيها  $D$  فئة جزئية مدمجة من  $\mathbb{R}^p$  ، فإن  $C_{pq}(D) = BC_{pq}(D)$

### تمريعات :

٢٢- (أ) فسر نظرية الاتصال الكروى ٢٢-١ للدالتين ذات القيمة الحقيقية  $f(x) = x^2$  ،  
خذ فئات مختلفة مفتوحة ومنغلقة وحدد صورها العكسية تحت  $f$  و  $g(x) = 1/x, x \neq 0$  .

٢٢- (ب) إذا كانت  $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  معرفة بأنها

$$h(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ = 0, \quad \text{خلاف ذلك}$$

أعرض فئة مفتوحة  $G$  بحيث أن  $h^{-1}(G)$  ليست مفتوحة في  $\mathbb{R}$  ، وأعرض فئة منغلقة  $F$  بحيث أن  $h^{-1}(F)$  ليست منغلقة في  $\mathbb{R}$  .

٢٢- (ج) إذا كانت  $f$  محدودة ومتصلة في  $\mathbb{R}^p$  إلى  $\mathbb{R}$  وإذا كانت  $f(x_0) > 0$  ، وضع  
أن  $f$  موجبة مضبوطة في جوار ما للنقطة  $x_0$  . هل نفس الاستنتاج يظل قائماً إذا كانت  $f$   
متصلة فقط عند  $x_0$  ؟

٢٢- (د) إذا كانت  $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  كثيرة الحدود ، وكانت  $c \in \mathbb{R}$  ، وضع أن الفئة  
 $\{(x, y): p(x, y) < c\}$  تكون مفتوحة في  $\mathbb{R}^2$  .

٢٢- (هـ) إذا كانت  $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  متصلة في  $\mathbb{R}^p$  ،  $\alpha < \beta$  ، أثبت أن الفئة  
 $\{x \in \mathbb{R}^p: \alpha \leq f(x) \leq \beta\}$  تكون منغلقة في  $\mathbb{R}^p$  .

٢٢- (و) تكون فئة جزئية  $D \subseteq \mathbb{R}^p$  غير مرتبطة إذا وإذا فقط كان يوجد  
دالة متصلة  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  بحيث أن  $f(D) = \{0, 1\}$  .

٢٢- (ز) بفرض  $f$  متصلة في  $\mathbb{R}^2$  إلى  $\mathbb{R}^q$  . عرف الدالتين  $g_1$  و  $g_2$  في  $\mathbb{R}^2$  إلى  $\mathbb{R}^q$  بالآتي .

$$g_1(t) = f(t, 0), \quad g_2(t) = f(0, t)$$

أثبت أن  $g_1$  و  $g_2$  متصلتان .

٢٢- (ح) بفرض أن  $g_1$  و  $g_2$  و  $f$  مرتبطة بالقوانين المذكورة في التمرين السابق .  
أثبت أنه من خاصية اتصال  $g_1$  ،  $g_2$  عند  $t = 0$  ، لا يمكن البرهنة على اتصال  $f$   
عند  $(0, 0)$  .

- ٢٢- (ط) اعط مثالا لدالة في  $I = [0, 1]$  إلى  $R$  بحيث تكون غير محدودة .
- ٢٢- (ى) اعط مثالا لدالة محدودة  $f$  في  $I$  إلى  $R$  والتي لا تتناول أى المديين  $\inf \{f(x): x \in I\}$  أو  $\sup \{f(x): x \in I\}$  .
- ٢٢ (ك) اعط مثالا لدالة  $g$  متصلة ومحدودة في  $R$  إلى  $R$  والتي لا تستطيع أن تقبل أى المديين  $\inf \{g(x): x \in R\}$  أو  $\sup \{g(x): x \in R\}$  .
- ٢٢- (ل) وضح أن لكل كثيرة الحدود ذات درجة فردية ومعاملات حقيقية جذرا حقيقيا . وضح أن كثيرة الحدود  $p(x) = x^4 + 7x^2 - 9$  لها على الأقل جذران حقيقيان .
- ٢٢- (م) إذا كانت  $c > 0$  و  $n$  عددا طبيعيا ، فإنه يوجد عدد موجب وحيد  $b$  بحيث أن  $b^n = c$
- ٢٢- (ن) نفرض أن  $f$  دالة متصلة في  $I$  إلى  $R$  حيث  $f(0) < 1$  ،  $f(1) > 0$  ، إذا كانت  $N = \{x \in I : f(x) < 0\}$  وإذا كانت  $c = \sup N$  ، فأثبت أن  $f(c) = 0$
- ٢٢- (س) نفرض أن  $f$  دالة متصلة في  $R$  إلى  $R$  والتي تزايد بدقة ( بمعنى أنه إذا كانت  $x'' < x' < x'''$  فإن  $f(x'') < f(x')$  ) . أثبت أن  $f$  دالة إدغالية وأن دالتها المكسية  $f^{-1}$  تكون متصلة ومزايده مضبوطة .
- ٢٢- (ع) بفرض  $f$  دالة متصلة في  $R$  إلى  $R$  والتي لا تستطيع أخذ أى من قيمتها مرتين ، فهل صحيح أن  $f$  يجب أن تكون متزايدة بدقة أو متناقصة مضبوطة .
- ٢٢- (ف) بفرض  $g$  هي دالة في  $I$  إلى  $R$  ، أثبت أنه إذا كانت  $g$  تستطيع أخذ كل من قيمها بالضبط مرتين ، فإن  $g$  لا يمكن أن تكون متصلة عند كل نقطة من  $I$  .
- ٢٢- (ص) بفرض  $f$  دالة متصلة في الفترة  $[0, 2\pi]$  إلى  $R$  وبحيث أن  $f(0) = f(2\pi)$  . أثبت أنه يوجد نقطة  $c$  في هذه الفترة بحيث أن  $f(c) = f(c + \pi)$  ( ارشاد : اعتبر  $g(x) = f(x) - f(x + \pi)$  . استنتج أنه يوجد ، عند أى وقت ، نقط في الجهة المقابلة من الكرة الأرضية على خط الاستواء التي لها نفس درجة الحرارة .
- ٢٢- (ق) إذا كانت  $\varphi: [0, 2\pi) \rightarrow R^2$  معرفة بأنها  $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$  عند  $t \in [0, 2\pi)$  . حينئذ  $\varphi$  تكون راسما متصلا إدغاليا في الفترة  $[0, 2\pi)$  إلى دائرة الوحدة  $S = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  . أثبت أن  $\varphi^{-1}: S \rightarrow [0, 2\pi)$  لا يمكن أن تكون متصلة ( نستنتج أن نظرية ٢٢-٩ ربما تفشل إذا كان النطاق ليس مدمجا) .

## مشروع :

٢٢-  $\alpha$  الفرض من هذا المشروع هو توضيح أن كثيرا من النتائج في باب ٢٢ تظل صحيحة للدوال المتصلة التي نطاقها ومداها تكون محتوية في فراغات مترية . ( لإثبات هذه النتائج

ربما نلاحظ أنه إما أن التعاريف السابقة يمكن تطبيقها في الفراغات المترية أو يمكن صياغتها ثانياً لعمل هذا .

- (أ) وضع أن نظرية ٢٠ - ٢ يمكن صياغتها لدالة من فراغ واحد مترى إلى آخر .  
 (ب) وضع أن نظرية الاتصال الكروى ٢٢ - ١ تظل صحيحة بدون تغيير .  
 (ج) أثبت أن خاصية حفظ الارتباط أى نظرية ٢٢ - ٣ تظل صحيحة .  
 (د) أثبت أن حفظ الإدماج أى نظرية ٢٢ - ٥ تظل قائمة .

### الباب الثالث والعشرون — اتصال منتظم ونقط ثابتة :

نفرض أن  $f$  معرفة في فئة جزئية  $D(f)$  من  $R^p$  إلى  $R^q$  . فقد لوحظ سابقاً أن النصين الآتيين متكافئان :

- (i)  $f$  تكون متصلة عند كل نقطة في  $D(f)$  .  
 (ii) بأخذ  $\varepsilon > 0$  ،  $u \in D(f)$  ، فإنه يوجد  $\delta(\varepsilon, u) > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $x$  تنتمى إلى  $D(f)$  ،  $\|x - u\| \leq \delta$  ، فإن  $\|f(x) - f(u)\| \leq \varepsilon$  .  
 الشيء الملاحظ هنا هو أن  $\delta$  تعتمد ، بوجه عام ، على كلا من  $\varepsilon$  ،  $u$  أى أن توقف  $\delta$  على  $u$  هو انعكاس الحقيقة التى تقول إن الدالة ربما تغير قيمتها بسرعة بالقرب من نقط معينة ويبطئ بالقرب من نقط أخرى .

الآن يمكن أن يحدث أن دالة تكون بحيث أن العدد  $\delta$  يمكن اختياره بحيث لا يعتمد على النقطة  $u$  في  $D(f)$  ويعتمد فقط على  $\varepsilon$  . مثال ذلك ، إذا كانت  $f(x) = 2x$  ، فإن

$$|f(x) - f(u)| = 2|x - u|$$

وبذلك يمكننا اختيار  $\delta(\varepsilon, u) = \varepsilon/2$  لجميع قيم  $u$  .

ومن ناحية أخرى ، إذا كانت  $g(x) = 1/x$  عند  $x > 0$  ، حينئذ .

$$g(x) - g(u) = \frac{u - x}{ux}$$

إذا كانت  $u < \delta < 0$  ،  $|x - u| \leq \delta$  فنترك للقارىء توضيح أن

$$|g(x) - g(u)| \leq \frac{\delta}{u(u - \delta)}$$

وأن هذه المتباينة لا يمكن تحييدها ، حيث التساوى في الحقيقة يظل قائماً عند  $x = u - \delta$  . إذا أردنا جعل  $|g(x) - g(u)| \leq \varepsilon$  فإن أكبر قيمة للعدد  $\delta$  التى يمكننا اختيارها هي

$$\delta(\varepsilon, u) = \frac{\varepsilon u^2}{1 + \varepsilon u}$$

أى أنه إذا كان  $u > 0$  ، فإن  $g$  تكون متصلة عند  $u$  لأننا يمكننا اختيار  $\delta(\varepsilon, u) = \varepsilon u^2 / (1 + \varepsilon u)$  وهذه تكون أكبر قيمة يمكننا اختيارها . بما أن

$$\inf \left\{ \frac{\varepsilon u^2}{1 + \varepsilon u} : u > 0 \right\} = 0$$

فإنه لا يمكننا الحصول على  $\delta(\varepsilon, u) > 0$  التى لا تتوقف على اختيار  $u$  لجميع النقط  $u > 0$  .

الآن سوف نقيّد  $g$  لنطاق أصغر . فى الحقيقة ، نفرض أن  $a > 0$  ونعرف  $h(x) = 1/x$  عند  $x \geq a$  . إذن يوضح التحليل الذى أجريناه حالا . أنه يمكننا استخدام نفس قيمة  $\delta(\varepsilon, u)$  . لكن ، هذه المرة يكون النطاق أصغر وأن

$$\inf \left\{ \frac{\varepsilon u^2}{1 + \varepsilon u} : u \geq a \right\} = \frac{\varepsilon a^2}{1 + \varepsilon a} > 0$$

وإذن إذا عرفنا  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon a^2 / (1 + \varepsilon a)$  ، فإنه يمكننا استخدام هذا العدد لجميع النقط  $u \geq a$  . لكى نساعد فى تثبيت هذه الأفكار ، يجب على القارئ أن يتصفح بسرعة الأمثلة ٢٠ - ٢١ . وأن يحدد فى أى الأمثلة اختيرت  $\delta$  بحيث تعتمد على السؤال وفى أى الأمثلة اختيرت  $\delta$  مستقلة عن النقطة .

بهذه التمهيدات نقدم الآن التعريف الأساسى .

٢٢ - ١ تعريف . نفرض أن  $f$  لها نطاق  $D(f)$  فى  $R^p$  وملى فى  $R^q$  . نقول إن  $f$  متصلة بانتظام فى فئة  $A \subseteq D(f)$  إذا كان يوجد لكل  $\varepsilon > 0$  ،  $\delta(\varepsilon) > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $x$  ،  $u$  تنتميان إلى  $A$  ،  $\|x - u\| \leq \delta(\varepsilon)$  ، فإن  $\|f(x) - f(u)\| \leq \varepsilon$  .

من الواضح أنه إذا كانت الدالة  $f$  متصلة بانتظام فى  $A$  ، فإنها تكون متصلة عند كل نقطة من  $A$  . لكن ، فى الحالة العامة العكس ليس صحيحاً . من المفيد أن نتذكر ما المقصود بقولنا إن دالة ليست متصلة بانتظام ، لذلك نقرر معياراً مثل هذا تاركين برهانه للقارئ .

٢٢ - ٢ مقترضى . شرط ضرورى وكاف لأن تكون الدالة  $f$  غير متصلة بانتظام فى  $A \subseteq D(f)$  هو أنه يوجد  $\varepsilon_0 > 0$  ، ومتابعتان  $X = (x_n)$  ،  $Y = (y_n)$  فى  $A$  بحيث أنه إذا كانت  $n \in N$  فإن  $\|x_n - y_n\| \leq 1/n$  ،  $\|f(x_n) - f(y_n)\| > \varepsilon_0$  .  
كثيرين يجب على القارئ أن يستخدم هذا المعيار لتوضيح أن  $g(x) = 1/x$  ليست متصلة بانتظام فى  $D(g) = \{x : x > 0\}$  .



الآن سنقدم نتيجة هامة تؤكد أن أى دالة متصلة تكون تلقائياً متصلة بانتظام فى أى فئة مدجة فى نطاقها .

٢٢ - ٢٣ نظرية الاتصال المنتظم . نفرض أن  $f$  دالة متصلة بنطاق  $D(f)$  فى  $R^p$  ومدى فى  $R^q$  . إذا كانت  $K \subseteq D(f)$  مدجة ، فإن  $f$  تكون متصلة بانتظام فى  $K$  .

برهان أول . نفرض أن  $f$  ليست متصلة بانتظام فى  $K$  حسب مفترض ٢٣ - ٢٢ ، يوجد  $\varepsilon_0 > 0$  ومتابعتان  $(x_n)$  ،  $(y_n)$  فى  $K$  بحيث أنه إذا كانت  $n \in N$  ، فإن

$$(23.1) \quad \|x_n - y_n\| \leq 1/n, \quad \|f(x_n) - f(y_n)\| > \varepsilon_0$$

بما أن  $K$  مدجة فى  $R^p$  ، المتتابعة  $X$  محدودة ، فينتج من نظرية بولزانو فيرشتراس ١٦ - ٤ ، أنه يوجد متتابعة جزئية  $(y_{n(k)})$  من  $(y_n)$  بحيث تقتارب إلى عنصر  $z$  . بما أن  $K$  مغلقة ، فإن النهاية  $z$  تنتمى لى  $K$  ، فتكون الدالة  $f$  متصلة عند  $z$  . من الواضح أن المتتابعة الجزئية المناظرة  $(x_{n(k)})$  من  $Y$  تقتارب أيضاً إلى  $z$  .

ينتج من نظرية ٢٠ - ٢ (ج) أن كلا المتابعتين  $(f(y_{n(k)}))$  و  $(f(x_{n(k)}))$  تقتارب إلى  $f(z)$  . لذلك ، إذا كانت  $k$  كبيرة كبراً كافياً ، فإننا نحصل على  $\|f(x_{n(k)}) - f(y_{n(k)})\| < \varepsilon_0$  لكن هذا يخالف العلاقة الثانية فى (٢٣ - ١) .

برهان ثان . (يمكن عطاء برهان قصير بحيث يتوقف على نظرية غطاء لبسيج ١١ - ٥ ، لكن نفضل استخدام تعريف الإدماج) . نفرض أن  $f$  دالة متصلة عند كل نقطة للفئة المدجة  $K$  . طبقاً لنظرية ٢٠ - ٢ (ب) ، بأخذ  $\varepsilon > 0$  و  $u$  فى  $K$  نجد أنه يوجد عدد  $\delta(\frac{1}{2}\varepsilon, u) > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $x \in K$  و  $\|x - u\| < \delta(\frac{1}{2}\varepsilon, u)$  فإن  $\|f(x) - f(u)\| < \frac{1}{2}\varepsilon$  لكل  $u$  فى  $K$  ، كون الكرة المفتوحة  $G(u) = \{x \in R^p : \|x - u\| < \frac{1}{2}\delta(\frac{1}{2}\varepsilon, u)\}$  ، حينئذ الفئة  $K$  تكون محتوية بالتأكيد فى اتحاد المائلة  $\mathcal{G} = \{G(u) : u \in K\}$  ، وإذن توجد لكل نقطة  $u$  فى  $K$  كرة مفتوحة  $G(u)$  بحيث تحتويها . بما أن  $K$  مدجة ، فتكون محتوية فى الاتحاد لعدد محدود من فئات فى المائلة  $\mathcal{G}$  ، مثلاً ،  $G(u_1), \dots, G(u_N)$  . نعرف الآن .

$$\delta(\varepsilon) = \frac{1}{2} \inf \{ \delta(\frac{1}{2}\varepsilon, u_1), \dots, \delta(\frac{1}{2}\varepsilon, u_N) \}$$

وسوف نوضح أن  $\delta(\varepsilon)$  لها الخاصية المطلوبة . لأنه ، بفرض أن  $u$  و  $x$  تنتميان إلى  $K$  وبفرض  $\|x - u\| \leq \delta(\varepsilon)$  . فنجد أنه يوجد عدد طبيعى  $k$  يحقق  $1 \leq k \leq N$  وبحيث أن  $x$  تنتمى إلى الفئة  $G(u_k)$  ، أى أن  $\|x - u_k\| < \frac{1}{2}\delta(\frac{1}{2}\varepsilon, u_k)$  . بما أن  $\delta(\varepsilon) \leq \frac{1}{2}\delta(\frac{1}{2}\varepsilon, u_k)$  فينتج أن

$$\|u - u_k\| \leq \|u - x\| + \|x - u_k\| < \delta(\frac{1}{2}\varepsilon, u_k)$$

لذلك ، نحصل على العلاقات .

$$\|f(x) - f(u_k)\| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \|f(u) - f(u_k)\| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

ومن ثم  $\|f(x) - f(u)\| < \varepsilon$  . قد وضعنا أنه إذا كانت  $u$  و  $x$  أى نقطتين من  $K$  حيث  $\|x - u\| \leq \delta(\varepsilon)$  فإن  $\|f(x) - f(u)\| < \varepsilon$  .

في أبواب قادمة سوف نستفيد من فكرة الاتصال المنتظم في مناسبات كثيرة ، لذلك لا نعطى أى تطبيقات هنا . لكن ، سنقدم هنا خاصية أخرى هي غالباً متاحة وكافية لضمان اتصال منتظم .

٢٣ - ٤ تعريف . إذا كانت الدالة  $f$  لها نطاق  $D(f)$  محتوى في  $R^n$  ومدى في  $R^q$  ، فنقول إن  $f$  تحقق شرط ليبشتر (\*) إذا كان يوجد ثابت  $A > 0$  بحيث أن

$$(23.2) \quad \|f(x) - f(u)\| \leq A \|x - u\|$$

لجميع النقط  $u$  و  $x$  في  $D(f)$  . إذا تحققت المتباينة (٢٣ - ٢) بمقدار ثابت  $A < 1$  ، فإن الدالة تسمى تقلص أو انكماش .

من الواضح أنه إذا كانت العلاقة (٢٣-٢) ، متحققة ، حينئذ بوضع  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/A$  فيمكن لشخص إثبات الاتصال المنتظم للدالة  $f$  في  $D(f)$  . لذلك ، إذا كانت الدالة  $f$  تحقق شرط ليبشتر ، فإن الدالة تكون متصلة بانتظام . لكن ، العكس ليس صحيحاً ، والذي يمكن أن يتضح باعتبار الدالة المعرفة عند  $D(f) = I$  بأنها  $f(x) = \sqrt{x}$  . إذا ظلت (٢٣-٢) قائمة ، فينتج أنه ، بوضع  $u = 0$  أن فرداً يجب أن يحصل على  $|f(x)| \leq A|x|$  لثابت ما  $A$  ، لكن لوحظ حالاً أن المتباينة الأخيرة لا تظل صحيحة .

وبتذكر نظرية ٢١-٣ ، نرى أن دالة خطية بنطاق  $R^n$  ومدى في  $R^q$  تحقق شرط ليبشتر ، وبالإضافة إلى ذلك ، سيلاحظ في باب ٢٧ أن أى دالة حقيقية بمشتقة محدودة تحقق أيضاً شرط ليبشتر .

### نظرية نقطة ثابتة :

إذا كانت  $f$  دالة بنطاق  $D(f)$  ومدى في نفس الفراغ  $R^n$  ، فيقال لنقطة  $u$  في  $D(f)$  أنها نقطة ثابتة للدالة  $f$  في حالة  $f(u) = u$  . عدد من النتائج الهامة يمكن برهنتها على أساس وجود النقط الثابتة للدوال لذلك يكون من الأهمية وجود بعض معايير إيجابية في هذا الاتجاه .

(\*) رودلف ليبشتر (١٨٣٢ - ١٩٠٣) كان أستاذاً في بون . له مساهمات في الجبر ، نظرية العدد ، الهندسة التفاضلية والتحليل .

النظرية الأولى التي نذكرها أولية الصفة ولكنها غالباً مفيدة ولها الميزة الهامة وهي أنها تمدنا بشكوكين النقطة الثابتة ، والتبسيط سنقرر أولاً النتيجة عندما يكون نطاق الدالة هو الفراغ بأكمله .

٢٢ - ه نظرية النقطة الثابتة للانكشاشات . نفرض أن  $f$  انكشاش بنطاق  $R^p$  ومدى محتوي في  $R^p$  . فتكون  $f$  لها نقطة ثابتة وحيدة .

البرهان . سنفرض أنه يوجد مقدار ثابت  $C$  حيث  $0 < C < 1$  بحيث أن  $\|f(x) - f(y)\| \leq C \|x - y\|$  لجميع  $x, y$  في  $R^p$  . نفرض أن  $x_1$  نقطة اختيارية في  $R^p$  وضع  $x_2 = f(x_1)$  ، واستنتاجياً ضع

$$(23.3) \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in N$$

سنوضح أن المتتابة  $(x_n)$  تقترب إلى نقطة ثابتة وحيدة  $u$  من  $f$  ونقدر سرعة التقارب .

لإجراء هذا ، نلاحظ أن

$$\|x_3 - x_2\| = \|f(x_2) - f(x_1)\| \leq C \|x_2 - x_1\|$$

واستنتاجياً ، أن

$$(23.4) \quad \|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leq C \|x_n - x_{n-1}\| \leq C^{n-1} \|x_2 - x_1\|$$

إذا كانت  $m \geq n$  ، فإن تكرار استخدام (٢٣ - ٤) يعطى

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &\leq \|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq \{C^{m-2} + C^{m-3} + \dots + C^{n-1}\} \|x_2 - x_1\| \end{aligned}$$

ومن ثم ينتج أنه ، عند  $m \geq n$  ، فإن

$$(23.5) \quad \|x_m - x_n\| \leq \frac{C^{n-1}}{1-C} \|x_2 - x_1\|$$

بما أن  $0 < C < 1$  ، فإن المتتابة  $(C^{n-1})$  تقترب إلى صفر . وإذن  $(x_n)$  هي متتابة كوشي . إذا كانت  $u = \lim (x_n)$  ، فن الواضح من (٢٣ - ٥) أن  $u$  نقطة ثابتة للدالة  $f$  . من (٢٣ - ٥) ونفترض  $u = 1$  ، نحصل على التقييم

$$(23.6) \quad \|u - x_n\| \leq \frac{C^{n-1}}{1-C} \|x_2 - x_1\|$$

لسرعة التقارب

أخيراً ، سنوضح أنه يوجد فقط نقطة ثابتة واحدة للدالة  $f$  . وفي الحقيقة ، إذا كانت  $v$  و  $u$  نقطتين منفصلتين ثابتتين للدالة  $f$  ، حينئذ

$$\|u - v\| = \|f(u) - f(v)\| \leq C \|u - v\|$$

بما أن  $u \neq v$  ، فينتج  $\|u - v\| \neq 0$  ، وإذن هذه العلاقة تدل على أن  $C \leq 1$  ، مما يخالف الفرض بأن  $C > 1$  .

وسلاحظ أننا في الحقيقة قد أثبتنا النتيجة الآتية .

٢٢ - ٦ نتيجة . إذا كانت الدالة  $f$  انكاشاً بثابت  $C < 1$  ، إذا كانت نقطة اختيارية في  $R^p$  ، وإذا كانت المتتابعة  $X = (x_n)$  معرفة بالمعادلة ( ٢٣ - ٣ ) فإن  $X$  تقرب إلى نقطة ثابتة وحيدة  $u$  للدالة  $f$  بسرعة تقارب تتحدد من ( ٢٣ - ٦ ) .

في حالة كون الدالة  $f$  غير معرفة في كل من  $R^p$  ، فإننا نحتاج للممارسة عناية أكثر بنوع مالكي نضمن أن التعريف المكرر ( ٢٣ - ٣ ) للمتتابعة يمكن تنفيذه وإن النقط تظل في نطاق الدالة  $f$  . بالرغم من وجود بعض قوانين أخرى فسنكتفي بالنظرية الآتية :

٢٢ - ٧ نظرية . بفرض أنه إذا كانت  $f$  انكاشاً بالثابت  $C$  المعرف  $D(f) = \{x \in R^p : \|x\| \leq B\}$  وأن  $\|f(0)\| \leq B(1 - C)$  فإن المتتابعة  $x_1 = 0, x_2 = f(x_1), \dots, x_{n+1} = f(x_n), \dots$

تقارب إلى نقطة ثابتة وحيدة للانكاش  $f$  والتي تقع في الفئة  $D(f)$  .

البرهان . في الحقيقة ، إذا كان  $x \in D = D(f)$  فإن  $\|f(x) - f(0)\| \leq C \|x - 0\| \leq CB$  ومن ثم ينتج أن

$$\|f(x)\| \leq \|f(0)\| + CB \leq (1 - C)B + CB = B$$

لذلك  $f(D) \subseteq D$  . أي أن المتتابعة  $(x_n)$  يمكن تعريفها وتظل في  $D$  . لذلك يستخدم البرهان السابق .

لنظرية التقلص أو الانكاش المثبتة في أعلى مزايا معينة : هي إنشائية ، الخطأ في التقريب يمكن تقييمه ، وتضمن النظرية نقطة ثابتة وحيدة . لكن ، لها عيب وهو أن لزوم كون الدالة انكاشاً هو شرط صارم . حقيقة هامة وعميقة ، وقد برهنت لأول مرة عام ١٩١٠ بواسطة ل. أ. ج. بروور (\*) وهي أن أي دالة متصلة بنطاق  $D = \{x \in R^p : \|x\| \leq B\}$  ومدى محتوي في  $D$  يجب أن يكون لها على الأقل نقطة واحدة ثابتة .

٢٢ - ٨ نظرية نقطة ثابتة لبروور . نفرض  $B > 0$  ، وبفرض

$D = \{x \in R^p : \|x\| \leq B\}$  فإذاً أي دالة متصلة نطاقها  $D$  ومدى محتوي في  $D$  لها على الأقل نقطة واحدة ثابتة .

(\*) ل. أ. ج. بروور ( ١٨٨١ - ١٩٦٦ ) كان أستاذاً في أمستردام وعميداً للمدرسة الهولندية للرياضيات. وبالإضافة إلى إسهاماته في التوبولوجي ، فهو معروف بعمله في الأساسيات الرياضية .

برهان هذه النتيجة عند  $p = 1$  سيمطى كتمرين . لكن في الحالة  $p > 1$  سيأخذنا البرهان بعيداً جداً عن المنزل أى في الحقل . ولبرهان مؤسس على معلومات أولية فقط . أنظر كتاب دنفورد - شفارتز صفحات ٤٦٧ - ٤٧٠ . ولحصول على بيان أكثر ترتيباً لنقطة ثابتة ونظريات مرتبطة بها فنصح باستشارة كتاب لفشتر

## تهرينات :

٢٣ - ( أ ) افحص كل من الدوال في مثال ٢٠-٥ ووضح إما أن الدالة تكون متصلة بانتظام في نطاقها أو أنها لا تكون .

٢٣ - ( ب ) اعط برهاناً لنظرية الاتصال المنتظم ( ٢٣-٣ ) باستخدام نظرية غطاء لبسيج ( ١١ - ٥ ) .

٢٣ - ( ج ) إذا كانت  $B$  محدودة في  $\mathbb{R}^p$  ،  $f: B \rightarrow \mathbb{R}^q$  دالة متصلة بانتظام ، وضح أن  $f$  محدودة في  $B$  . أثبت أن هذه النتيجة تفشل إذا كانت  $B$  ليست محدودة في  $\mathbb{R}^p$  .

٢٣ - ( د ) أثبت أن الدوال ، المعرفة عند  $x \in \mathbb{R}$  بأنها

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad g(x) = \sin x$$

تكون متصلة بانتظام في  $\mathbb{R}$  .

٢٣ - ( هـ ) أثبت أن الدوال ، المعرفة عند  $D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$  بأنها

$$h(x) = x, \quad k(x) = e^{-x}$$

تكون متصلة بانتظام في  $D$  .

٢٣ ( و ) أثبت أن الدوال الآتية ليست متصلة بانتظام في نطاقهم

$$f(x) = 1/x^2, \quad D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \quad (أ)$$

$$g(x) = \tan x, \quad D(g) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < \pi/2\} \quad (ب)$$

$$h(x) = e^x, \quad D(h) = \mathbb{R} \quad (ج)$$

$$k(x) = \sin(1/x), \quad D(k) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \quad (د)$$

٢٣ - ( ز ) نسمى دالة  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$  دورية ، إذا كان يوجد عدد  $p > 0$  بحيث أن

$$g(x+p) = g(x) \text{ لجميع } x \in \mathbb{R} . \text{ أثبت أن دالة دورية متصلة تكون محدودة ومتصلة}$$

بانتظام ، في  $\mathbb{R}$  .

٢٣ - ( ح ) نفرض أن  $f$  معرفة في  $D \subseteq \mathbb{R}^p$  إلى  $\mathbb{R}^q$  ، ونفرض أن  $f$  متصلة بانتظام

في  $D$  . إذا كانت  $(x_n)$  هي متتابعة كوشي في  $D$  ، أثبت أن  $(f(x_n))$  هي متتابعة ،

كوشي في  $\mathbb{R}^q$  .

٢٢ - (ط) بفرض أن  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  تكون متصلة بانتظام في  $(0, 1)$  ، أثبت أن  $f$  يمكن تعريفها عند  $x = 0$  ،  $x = 1$  بطريقة بحيث تصبح متصلة في  $[0, 1]$  .

٢٣ - (ى) بفرض أن  $D = \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\| < 1\}$  أثبت أن  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^q$  يمكن امتدادها إلى دالة متصلة في  $D_1 = \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\| \leq 1\}$  إلى  $\mathbb{R}^q$  إذا وإذا فقط كانت متصلة بانتظام في  $D$  .

٢٣ - (ك) إذا كانت  $f$  ،  $g$  دالتين متصلتين بانتظام في  $\mathbb{R}$  إلى  $\mathbb{R}$  ، وضح أن  $f + g$  تكون متصلة بانتظام في  $\mathbb{R}$  ، لكن  $fg$  لا تحتاج إلى كونها متصلة بانتظام في  $\mathbb{R}$  حتى إذا كانت إحدى  $f$  ،  $g$  محدودة .

٢٣ - (ل) إذا كانت  $f: I \rightarrow I$  متصلة، وضح أن  $f$  لها نقطة ثابتة في  $I$  ( ارشاد : اعتبر  $g(x) = f(x) - x$  ) .

٢٣ - (م) اعط مثالا لدالة  $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  بحيث أن  $\|f(x) - f(u)\| \leq \|x - u\|$  لجميع  $x, u \in \mathbb{R}^p$  والتي ليس لها نقطة ثابتة ( لماذا لا يتناقض هذا المثال نظرية ٢٣ - ٥ ؟ )

٢٣ - (ن) بفرض  $f, g$  دالتان متصلتان في  $[a, b]$  بحيث أن المدى  $R(f) \subseteq R(g) = [0, 1]$  أثبت أنه توجد نقطة  $c \in [a, b]$  بحيث أن  $f(c) = g(c)$

## مشروع :

٢٣ -  $\alpha$  هذا المشروع يعطى تصوراً للدول « تذبذب » دالة في فئة وعند نقطة . بفرض  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  ونفرض أن  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  محدودة وإذا كانت  $A \subseteq I$  فنعرف التذبذب للدالة  $f$  في  $A$  بأنه هو العدد

$$\Omega_f(A) = \sup \{f(x) - f(y) : x, y \in A\}$$

(أ) أثبت أن  $0 \leq \Omega_f(A) \leq 2 \sup \{|f(x)| : x \in A\}$  إذا كانت

$$\Omega_f(A) \leq \Omega_f(B) \text{ فإن } A \subseteq B \subseteq I$$

(ب) إذا كانت  $c \in I$  فنعرف التذبذب للدالة  $f$  عند  $c$  بأنه العدد

$$\omega_f(c) = \inf_0 \Omega_f(N_\delta)$$

حيث  $N_\delta = \{x \in I : |x - c| < \delta\}$  ، أثبت أن ( انظر باب ٢٥ ) .

$$\omega_f(c) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega_f(N_\delta)$$

أيضاً ، إذا كانت  $\omega_f(c) < \alpha$  فتوجد  $\delta > 0$  بحيث أن  $\Omega_f(N_\delta) < \alpha$  .

(ج) اثبت أن  $f$  دالة متصلة عند  $c \in I$  إذا وإذا فقط  $\omega_f(c) = 0$  .

(د) إذا كانت  $\alpha > 0$  وإذا كانت  $\omega_f(x) < \alpha$  لكل  $x \in I$  ، فإنه يوجد  $\delta > 0$

بحيث أنه إذا كانت  $A \subseteq I$  بحيث يكون قطرها  $d(A) = \sup \{|x - y| : x, y \in A\}$  أقل من  $\delta$  ، فإن  $\Omega_f(A) < \alpha$  .

(د) إذا كانت  $\alpha > 0$  ، فإن الفئة  $D_\alpha = \{x \in I : \omega_f(x) \geq \alpha\}$  فئة مغلقة في  $\mathbb{R}$  أثبت أن

$$D = \bigcup_{\alpha > 0} D_\alpha = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_{1/n}$$

هي فئة من نقاط التي عندها  $f$  تكون غير متصلة . ومن ثم تكون الفئة لنقط عدم الاتصال لدالة هي الاتحاد لعائلة معدودة من فئات مغلقة . ( مثل هذه الفئة تسمى فئة  $F_\sigma$  )  
(و) اعط امتداداً لهذه التعاريف والنتائج لدالة معرفة في خلية مغلقة في  $\mathbb{R}^p$  .

### الباب الرابع والعشرون — متتابعات دوال متصلة :

توجد حالات عديدة التي فيها يحتاج شخص متتابعة الدوال المنتظمة . سنقدم في هذا الباب نظريات مشوقة وهامة عن مثل هذه المتتابعات . سنستخدم نظرية ٢٤ - ١ فيما يلي كثيراً جداً وتكون نتيجة رئيسية النظريات الباقية سوف لاتستعمل مراراً ، لكن يجب أن يعتاد القارئ على نصوصها على الأقل .

في هذا الباب أهمية التقارب المنتظم ستصبح أوضح . نتذكر أنه يقال للمتتابعة  $(f_n)$  لدوال في فئة جزئية  $D$  من  $\mathbb{R}^p$  إلى  $\mathbb{R}^q$  إنها تقترب بانتظام في  $D$  إلى  $f$  إذا كان لكل  $\varepsilon > 0$  يوجد  $N(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $n \geq N(\varepsilon)$  و  $x \in D$  ، فإن  $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$  . نتذكر من نظرية (١٧ - ٩) أن هذا صحيح إذا وإذا فقط  $\|f_n - f\|_D \rightarrow 0$  عندما تكون  $(f_n)$  متتابعة محدودة .

### تبادل نهاية واتصال :

نلاحظ أن النهاية لمتتابعة لدوال متصلة ربما لاتكون متصلة . من السهل ملاحظة ذلك ، لأنه إذا كانت  $n \in \mathbb{N}$  و  $x \in I$  ، نفرض  $f_n(x) = x^n$  . قد رأينا في مثال ١٧ - ٢ (ب) ، أن المتتابعة  $(f_n)$  تقترب في  $I$  إلى الدالة  $f$  المعرفة بأنها

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, & 0 \leq x < 1, \\ &= 1, & x = 1 \end{aligned}$$

أي أنه ، بالرغم من الميزة البسيطة للدوال المتصلة  $f_n$  ، فإن دالة النهاية ليست متصلة عند النقطة  $x = 1$  .

ومع أن امتداد عدم الاتصال الدالة النهائية في المثال المعطى حالاً ليس كبيراً جداً ، فن الواضح أنه يمكن تركيب أمثلة أكثر تعقيداً والتي ستنتج عدم اتصال أكثر امتداداً . ومن المتبع فحص تماماً كيف يمكن أن يكون عدم الاتصال لنهاية متتابعة لدوال متصلة ، ولكن هذا الفحص

سيأخذ بعيداً جداً من المنزل إلى الحقل وبالإضافة إلى ذلك يكون من المهم ، لتطبيقات أكثر ، إيجاد شروط إضافية التي سوف تتضمن أن دالة النهاية متصلة .

الآن ستثبت الحقيقة الهامة التي تقول إن التقارب المنتظم للمتتابعة لدوال متصلة يكون كافياً لضمان اتصال الدالة النهائية .

٢٤ - ١ نظرية . نفرض أن  $F = (f_n)$  متتابعة لدوال متصلة نطاقها  $D$  في  $R^p$  ومداها في  $R^q$  ونفرض أن هذه المتتابعة تقرب بانتظام في  $D$  إلى دالة  $f$  . حينئذ تكون  $f$  متصلة في  $D$  .

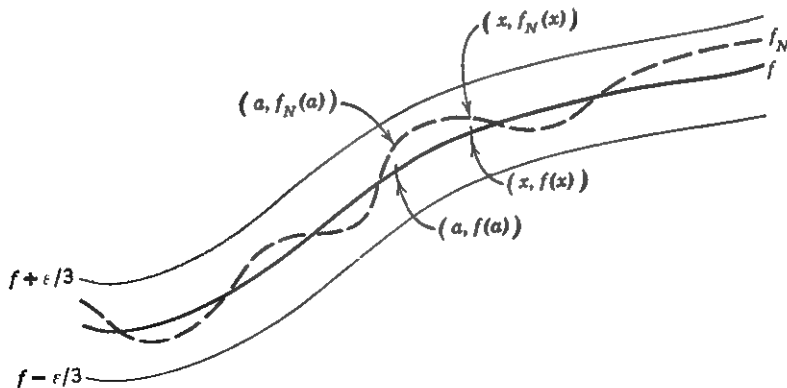
البرهان . حيث أن  $(f_n)$  تتقارب بانتظام في  $D$  إلى  $f$  ، فباخذ  $\varepsilon > 0$  فإنه يوجد عدد طبيعي  $N = N(\varepsilon/3)$  بحيث أن  $\|f_N(x) - f(x)\| < \varepsilon/3$  لكل  $x$  في  $D$  . لنوضح أن  $f$  متصلة عند نقطة  $a$  في  $D$  ، نلاحظ أن

$$(24.1) \quad \|f(x) - f(a)\| \leq \|f(x) - f_N(x)\| + \|f_N(x) - f_N(a)\| + \|f_N(a) - f(a)\| \\ \leq \varepsilon/3 + \|f_N(x) - f_N(a)\| + \varepsilon/3$$

بما أن  $f_N$  متصلة ، فيوجد عدد  $\delta = \delta(\varepsilon/3, a, f_N) > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $\|x - a\| < \delta$  و  $x \in D$  فإن  $\|f_N(x) - f_N(a)\| < \varepsilon/3$  . (أنظر شكل ٢٤ - ١) . لذلك ، نجد لكل  $x$   $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$  . هذا يثبت الاتصال للدالة النهائية  $f$  عند نقطة اختيارية  $a$  في  $D$  . وهو المطلوب إثباته

نلاحظ أنه بالرغم من أن التقارب المنتظم للمتتابعة لدوال متصلة هو كاف لاتصال دالة النهاية فهو ليس ضرورياً .

أي أنه إذا كانت  $(f_n)$  متتابعة لدوال متصلة متقاربة إلى دالة متصلة  $f$  ، فإنه لاينتج أن التقارب يكون منتظماً ( أنظر تمرين ٢٤ - ١ ) .



( شكل ٢٤ - ١ )



كما رأينا في نظرية ١٧ - ٩ ، أن تقارباً منتظماً على فئة  $D$  من متتابعة لدوال يعنى ضمناً التقارب في العمود المنتظم على  $D$  . ومن ثم يكون النظرية ٢٤ - ١ الصيغة الآتية .

٢٤ - ٢ نظرية . إذا كانت  $(f_n)$  متتابعة لدوال في  $BC_{pq}(D)$  بحيث  $\|f - f_n\|_D \rightarrow 0$  ، فإن  $f \in BC_{pq}(D)$  .

### نظريات تقريب :

يكون من المناسب لتطبيقات كثيرة أن « تقرب » دوال متصلة بدوال ذات طبيعة أولية . مع أنه يوجد تعريفات معقولة عديدة بحيث يمكن استعمالها لجعل كلمة « تقريبي » أكثر دقة ، فإن أحد التعريفات الأكثر طبيعة وفي نفس الوقت الأكثر أهمية أن الدالة الصغرية عند كل نقطة من النطاق المعلوم سوف لا تختلف عن الدالة المعطاة بأكثر من الخطأ المحدد . يشار إلى هذا المعنى أحياناً بأنه « التقريب المنتظم » وهو وثيق الارتباط بالتقارب المنتظم .

نفرض أن  $f$  دالة معطاة نطاقها  $D = D(f)$  ومداها في  $R^p$  ومداها في  $R^q$  . نقول أن دالة  $g$  هي تقريب دالة  $f$  بانتظام في  $D$  إلى داخل  $\varepsilon > 0$  إذا كان

$$\|g(x) - f(x)\| \leq \varepsilon \quad \text{لكل } x \in D;$$

أو ما يساوي نفس الشيء ، إذا كان

$$\|g - f\|_D = \sup \{\|g(x) - f(x)\| : x \in D\} \leq \varepsilon$$

هنا قد استخدمنا العمود الذي عرفناه في معادلة (١٧-٥) . نقول إن الدالة  $f$  يمكن تقريبها بانتظام في  $D$  بدوال في فصيلة  $\mathcal{G}$  . إذا ، كان يوجد لكل عدد  $\varepsilon > 0$  دالة  $g \in \mathcal{G}$  في  $\mathcal{G}$  بحيث أن  $\|g - f\|_D < \varepsilon$  ، أو ، ما يكافئه ، إذا كانت توجد متتابعة لدوال في  $\mathcal{G}$  بحيث تقرب بانتظام في  $D$  إلى  $f$  .

٢٤ - ٣ تعريف . دالة  $g$  نطاقها  $R^p$  ومداها في  $R^q$  تسمى دالة خطوة إذا كانت تأخذ عدداً محدوداً فقط لقيم مختلفة في  $R^q$  ، كل قيمة غير صغرية أخذت في فترة في  $R^p$  .

مثال ذلك ، إذا كانت  $p = q = 1$  ، فإن الدالة  $g$  المعرفة بصراحة بأنها

$$\begin{aligned} g(x) &= 0, & x &\leq -2, \\ &= 1, & -2 < x &\leq 0, \\ &= 3, & 0 < x &< 1, \\ &= -5, & 1 \leq x &\leq 3, \\ &= 0, & x &> 3. \end{aligned}$$

هي دالة خطوة

الآن سنوضح أن دالة متصلة نطاقها هو خلية مدجة يمكن أن تقرب بانتظام بواسطة دوال خطوية .

٢٤ - ٤ نظرية . نفرض أن  $f$  دالة متصلة التي نطاقها  $D$  هو خلية مدجة في  $R^p$  وقيمها تنتمي إلى  $R^q$  . حينئذ يمكن للدالة  $f$  أن تقرب بانتظام في  $D$  بواسطة دوال خطوية .

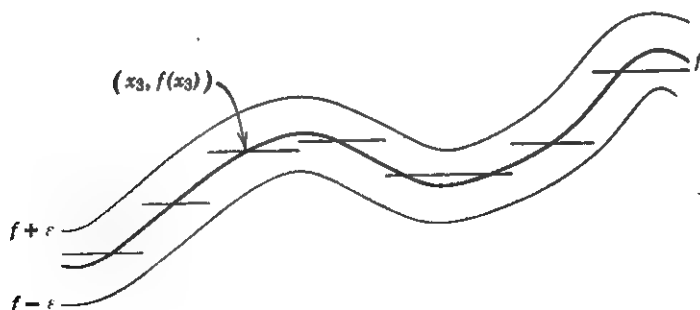
البرهان . بفرض  $\varepsilon > 0$  معطاة ؛ بما أن  $f$  متصلة بانتظام ( نظرية ٢٣ - ٣ ) فيوجد عدد  $\delta(\varepsilon) > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $x, y$  تنتمي إلى  $D$  و  $\|x - y\| < \delta(\varepsilon)$  فإن  $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$  . قسم النطاق  $D$  للدالة  $f$  إلى خلايا غير متصلة  $I_1, \dots, I_n$  بحيث أنه إذا كانت  $x, y$  تنتمي إلى  $I_k$  ، فينتج  $\|x - y\| < \delta(\varepsilon)$  . ( كيف ؟ ) نفرهس أن  $x_k$  أى نقطة تنتمي إلى الخلية  $I_k$  ،  $k = 1, \dots, n$  ونعرف  $g_\varepsilon(x) = f(x_k)$  عند  $x \in I_k$  ،  $g_\varepsilon(x) = 0$  عند  $x \notin D$  . إذن من الواضح أنه  $\|g_\varepsilon(x) - f(x)\| < \varepsilon$  . ( أنظر شكل عند  $x \in D$  بحيث أن  $g_\varepsilon$  تقريب الدالة  $f$  بانتظام في  $D$  إلى داخل  $\varepsilon$  . ) وهو المطلوب إثباته ( ٢ - ٢٤ ) .

من الطبيعي أن نتوقع أن دالة متصلة يمكن أن تقرب بانتظام بدوال بسيطة التي تكون أيضاً متصلة ( بخلاف الدوال الخطوية ) . للتبسيط ، سوف يثبت النتيجة الآتية فقط في الحالة التي فيها  $p = q = 1$  بالرغم من وجود عل ما يظهر حالات عامة لإبعاد أعلى .

نقول أن دالة  $g$  معرفة في خلية مدجة  $J = [a, b]$  من  $R$  بقيم قطعية في  $R$  خطية إذا كان يوجد عدد محدود من نقط  $c_k$  حيث  $a = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n = b$  وإعداد حقيقية مناظرة  $n, k=0, 1, \dots, n$  بحيث أنه عندما تحقق  $x$  العلاقة  $c_{k-1} < x < c_k$  تأخذ الدالة  $g$  الصورة

$$g(x) = A_k x + B_k, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

إذا كانت  $g$  متصلة في  $J$  ، فإن الثوابت  $A_k, B_k$  يجب أن تحقق بالطبع علاقات معينة



( شكل ٢٤ - ٢ - تقريب بدالة خطوية )

٢٤ - نظرية . نفرض أن  $f$  دالة متصلة نطاقها هو خلية مدمجة  $J$  في  $\mathbb{R}$  . إذن الدالة  $f$  يمكن أن تقرب بانتظام في  $J$  بدوال خطية قطعية متصلة .

البرهان . كما سبق ، تكون  $f$  دالة متصلة بانتظام في الفئة المدمجة  $J$  . لذلك ، بأخذ  $\varepsilon > 0$  ، نقسم  $J = [a, b]$  إلى خلايا بإضافة نقط متوسطة  $c_k, k = 0, 1, \dots, n$  حيث  $a = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n = b$  بحيث أن  $c_k - c_{k-1} < \delta(\varepsilon)$  . صل النقط  $[c_k, f(c_k)]$  بخط متكسر ، وعرف الدالة  $g_\varepsilon$  الناتجة المتصلة القطعية الخطية . من الواضح أن  $g_\varepsilon$  تقرب  $f$  بانتظام في  $J$  داخل  $\varepsilon$  .  
وهو المطلوب إثباته

### تقريب بكثيرات الحدود :

الآن سنبرهن نتيجة عميقة أكثر فائدة وأكثر متعة بخصوص التقريب بواسطة كثيرة الحدود . نبرهن أولاً نظرية تقريب فيراشراس عند  $p = q = 1$  باستخدام كثيرات الحدود لعالم الرياضيات سرج برنشتين (\*)

٢٤ - تعريف . نفرض أن  $f$  دالة نطاقها  $I = [0, 1]$  ومداها في  $\mathbb{R}$  . نعرف كثيرة الحدود التونية للدالة  $f$  لبرنشتين بأنها

$$(24.2) \quad B_n(x) = B_n(x; f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

هذه كثيرات الحدود لبرنشتين ليست مخيفة كما تبدو من أول لمحة .

القارىء الذى عنده بعض الخبرة بالاحتمالات يجب أن يلاحظ توزيع ذات الحدين الكامن في الخلفية . وحتى بدون مثل هذه الخبرة يمكن للقارىء ملاحظة أن القيمة  $B_n(x; f)$  لكثيرة الحدود عند النقطة  $x$  تحسب من القيم  $f(0), f(1/n), f(2/n), \dots, f(1)$  بمعاملات

ترجيح غير سالبة معينة  $\varphi_k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$  التى يمكن ملاحظة أنها صغيرة جداً عند

هذه القيم للمدد  $k$  حيث  $k/n$  تكون بعيدة عن  $x$  . في الحقيقة ، الدالة  $\varphi_k$  ليست سالبة على  $I$  وتأخذ قيمتها العظمى عند النقطة  $k/n$  . وبالإضافة إلى ذلك ، كما سنرى أسفل ، يكون حاصل الجمع لكل  $n, 0, \dots, k$  هو واحد صحيح لكل  $x$  في  $I$  .

نتذكر أن نظرية ذات الحدين تؤكد أن

(\*) سرج ن . برنشتين ( ١٨٨٠ - ١٩٦٨ ) قام بإسهامات عميقة في التحليل ، نظرية التقريب والاحتمالات ولد في أودسا وكان أستاذاً في ليننجراد وموسكو .

$$(24.3) \quad (s+t)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^k t^{n-k}$$

حيث  $\binom{n}{k}$  هي معامل ذات الحدين

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

نفحص مباشر نلاحظ أن

$$(24.4) \quad \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{k}{n} \binom{n}{k}$$

$$(24.5) \quad \binom{n-2}{k-2} = \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \binom{n}{k}$$

الآن نفرض  $s = x$  و  $t = 1 - x$  ، نحصل على

$$(24.6) \quad 1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

بكتابة  $1 - n$  بدلا من  $n$  ،  $j$  بدلا من  $k$  في (٢٤ - ٦) نحصل على

$$1 = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j}$$

اضرب هذه العلاقة الأخيرة في  $x$  واستخدم المتطابقة (٢٤ - ٤) لنحصل على

$$x = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j+1}{n} \binom{n}{j+1} x^{j+1} (1-x)^{n-(j+1)}$$

الآن نفرض  $k = j+1$  ، ومن ثم

$$x = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

أيضاً نلاحظ أن الحد المناظر إلى  $k = 0$  يمكن إغناؤه ، لأنه يتلشى . ومن ثم يكون لدينا

$$(24.7) \quad x = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

حساب مماثل ، معتمد على (٢٤ - ٦) بكتابة  $2 - n$  بدلا من  $n$  ومتطابقة (٢٤ - ٥) يعطينا

$$(n^2 - n)x^2 = \sum_{k=0}^n (k^2 - k) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

لذلك نستنتج أن

$$(24.8) \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right)x^2 + \frac{1}{n}x = \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

بضرب ( ٦ - ٢٤ ) في  $x^2$  ، ( ٧ - ٢٤ ) في  $2x$  — وجميعهما إلى ( ٨ - ٢٤ ) نحصل على

$$(24.9) \quad (1/n)x(1-x) = \sum_{k=0}^n (x-k/n)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

الذى هو تقدير سوف نحتاج إليه فيما بعد .

بفحص تعريف ٢٤ - ٦ ، يقول قانون ( ٦ - ٢٤ ) أن كثيرة الحدود النونية لبرنشتين للدالة الثابتة  $1 = f_0(x)$  تطابق  $f_0$  . قانون ( ٧ - ٢٤ ) أقول نفس الشيء للدالة  $f_1(x) = x$  . قانون ( ٨ - ٢٤ ) يؤكد أن كثيرة الحدود النونية لبرنشتين للدالة  $f_2(x) = x^2$  هي

$$B_n(x; f_2) = (1-1/n)x^2 + (1/n)x$$

التي تتقارب بانتظام على  $I$  إلى  $f_2$  ، سنبرهن الآن إنه إذا كانت  $f$  أى دالة متصلة في  $I$  إلى  $R$  ، حينئذ يكون المتتابعة كثيرة الحدود لبرنشتين الخاصة بأنها تتقارب بانتظام في  $I$  إلى  $f$  . هذا سيعطينا برهاناً استدلالياً لنظرية التقريب لفيرشتراس سنحتاج لقانون ٢٤ - ٩ عند برهان هذه النظرية .

٢٤ - ٧ نظرية تقريب برنشتين . نفرض أن  $f$  دالة متصلة في  $I$  بقيم في  $R$  . حينئذ المتتابعة لكثيرة الحدود برنشتين للدالة  $f$  ، المعرفة في معادلة ( ٢ - ٢٤ ) تتقارب بانتظام في  $I$  إلى  $f$  .

البرهان : بضرب المعادلة ( ٦ - ٢٤ ) في  $f(x)$  ، نحصل على

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

لذلك ، نحصل على العلاقة

$$f(x) - B_n(x) = \sum_{k=0}^n \{f(x) - f(k/n)\} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

التي منها ينتج أن

$$(24.10) \quad |f(x) - B_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n |f(x) - f(k/n)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

الآن  $f$  محدودة ، مثلاً بالمقدار  $M$  ، وهى أيضاً متصلة بانتظام . لاحظ أنه إذا كانت  $k$  بحيث أن  $k/n$  قريبة من  $x$  ، فإن الحد المناظر في حاصل الجمع ( ١٠ - ٢٤ ) يكون صغيراً بسبب اتصال  $f$  عند  $x$  ، ومن جهة أخرى ، إذا كانت  $k/n$  بعيدة عن  $x$  ، فإن العامل المتضمن  $f$  يمكن أن يقال فقط أنه أقل من  $2M$  وأن أى صفر يجب أن يظهر من معاملات أخرى . لذلك ،

يقودنا هذا إلى جمل ( ٢٤ - ١٠ ) جزأين : قيم  $k$  التي تجعل  $x - k/n$  صغيراً ، والتي تجعل  $x - k/n$  كبيراً .

نفرض أن  $\varepsilon > 0$  ونفرض أن  $\delta(\varepsilon)$  هي كما في تعريف الاتصال المنتظم للدالة  $f$  . نجد أنه من المناسب أن نختار  $n$  كبيرة بحيث أن

$$(24.11) \quad n \geq \sup \{ (\delta(\varepsilon))^{-4}, M^2/\varepsilon^2 \}$$

ونقسم ( ٢٤ - ١٠ ) إلى حاصلين جميعين . حاصل الجمع المأخوذ على  $k$  حيث  $\delta(\varepsilon) \leq |x - k/n| < n^{-1/4}$  ينتج التقدير

$$\sum_k \varepsilon \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \varepsilon \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \varepsilon$$

حاصل الجمع المأخوذ على  $k$  حيث  $|x - k/n| \geq n^{-1/4}$  ، أي أن ،  $(x - k/n)^2 \geq n^{-1/2}$  يمكن تقديره باستخدام القانون ( ٢٤ - ٩ ) لهذا الجزء من حاصل الجمع في ( ٢٤ - ١٠ ) نحصل على الحد الأعلى

$$\begin{aligned} \sum_k 2M \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= 2M \sum_k \frac{(x - k/n)^2}{(x - k/n)^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq 2M \sqrt{n} \sum_{k=1}^n (x - k/n)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq 2M \sqrt{n} \left\{ \frac{1}{n} x(1-x) \right\} \leq \frac{M}{2\sqrt{n}} \end{aligned}$$

لأن  $x(1-x) \leq 1/4$  في الفترة  $I$  . باستمادة التحديد ( ٢٤ - ١١ ) للمعد  $n$  ، نستنتج أن كلا هذين الجزأين من ( ٢٤ - ١٠ ) محدودة من أعلى المقدار  $\varepsilon$  . ومن ثم ، باختيار  $n$  كما في ( ٢٤ - ١١ ) نحصل على

$$|f(x) - B_n(x)| < 2\varepsilon$$

مستقلة عن قيمة  $x$  . هذا يوضح أن المتتابعة  $(B_n)$  تتقارب بانتظام في  $I$  إلى  $f$  . وهو المطلوب إثباته

كنتيجة مباشرة لنظرية برنشتين ، نحصل على النتيجة الهامة الآتية .

٢٤ - ٨ نظرية تقريب فيرشتراس . بفرض أن  $f$  دالة متصلة في فترة مدجة من  $R$  وبقم  $R$  فإن  $f$  يمكن أن تكون مقربة بانتظام بكثيرات الحدود

البرهان . إذا كانت  $f$  معرفة في  $[a, b]$  ، فإن الدالة  $g$  المعرفة في  $I = [0, 1]$  بأنها

$$g(t) = f((b-a)t + a), \quad t \in I$$

متصلة . ومن ثم يمكن أن تكون مقربة بانتظام بكثيرات الحدود لبرنشتين وتغيير بسيط للمتغير ينتج تقريب كثيرة الحدود للدالة  $f$  .

قد اخترنا التعمق في تفاصيل نظرية برنشتين ( ٢٤ - ٧ ) لأنها تغطي طريقة بنائية لإيجاد متتابعة لكثيرات الحدود التي تتقارب بانتظام في  $I$  إلى الدالة المتصلة المعطاة وبالإضافة إلى ذلك ، تتميز طريقة برهان نظرية ٢٤ - ٦ بمناقشات تحليلية كثيرة وهي مهمة لفهم مثل هذه المناقشات . أخيراً ، ومع أننا سوف نثبت نتائج تقريبية أكثر عموماً في باب ٢٦ ، لإجراء ذلك سنحتاج إلى معرفة أن دالة القيمة المطلقة يمكن تقريبها بانتظام في فترة مدجة بكثيرات الحدود . مع أنه من الممكن توضيح هذه الحالة الخاصة مباشرة ، الإثبات ليس بسيطاً كذلك . وللمناقشة أكثر تماماً للتقريب يرجع القارئ إلى كتاب (E. Cheney) المدون في المراجع .

### تمرينات :

٢٤ - ( أ ) اعط مثالا لمتتابعة لدوال متصلة والتي تتقارب إلى دالة متصلة لكن التقارب إليها ليس منتظماً .

٢٤ - ( ب ) اعط مثالا لمتتابعة لدوال غير متصلة في كل مكان وبحيث تقرب بانتظام إلى دالة متصلة .

٢٤ - ( ج ) اعط مثالا لمتتابعة لدوال متصلة التي تتقارب في فئة مدجة إلى دالة لها عدد لانهائي من مواقع عدم الاتصال .

٢٤ - ( د ) بفرض  $(f_n)$  متتابعة لدوال متصلة في  $D \subseteq \mathbb{R}^p$  إلى  $\mathbb{R}^q$  بحيث أن  $(f_n)$  تتقارب بانتظام إلى  $f$  في  $D$  ، وبفرض أن  $(x_n)$  متتابعة لعناصر في  $D$  حيث تتقارب إلى  $x \in D$  هل ينتج أن  $[f_n(x_n)]$  تتقارب إلى  $f(x)$  .

٢٤ - ( هـ ) اعتبر المتتابعات  $(f_n)$  المعرفة في  $D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$  إلى  $\mathbb{R}$  بالقوانين الآتية :

$$\begin{array}{lll} \frac{x^n}{n+x^n} \text{ (ج)} & \frac{x^n}{1+x^n} \text{ (ب)} & \frac{x^n}{n} \text{ (أ)} \\ \frac{x}{n} e^{-x/n} \text{ (و)} & \frac{x^n}{1+x^{2n}} \text{ (هـ)} & \frac{x^{2n}}{1+x^n} \text{ (د)} \end{array}$$

ناقش التقارب والتقارب المنتظم لهذه المتتابعات واتصال نهايات الدوال . في حالة كون التقارب ليس منتظماً في  $D$  ، اعتبر فترات مناسبة في  $D$  .

٢٤ - ( و ) بفرض أن  $(f_n)$  متتابعة في  $D \subseteq \mathbb{R}^p$  إلى  $\mathbb{R}^q$  والتي تتقارب في  $D$  إلى  $f$  . وبفرض أن كل  $f_n$  متصلة عند  $c$  وأن المتتابعة تتقارب بانتظام في جوار  $V$  للعنصر  $c$  . أثبت أن  $f$  متصلة عند  $c$  .

٢٤ - ( ز ) بفرض أن  $(f_n)$  متتابعة لدوال متصلة في  $D \subseteq \mathbb{R}^p$  إلى  $\mathbb{R}$  ومتناقصة باطراد بمعنى أنه إذا كانت  $x \in D$  ، فإن

$$f_1(x) \geq f_2(x) \geq \dots \geq f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \geq \dots$$

إذا كانت  $\lim(f_n(c)) = 0$  لقيمة  $c \in D$  ،  $\varepsilon > 0$  ، وضح أنه يوجد  $m \in \mathbb{N}$  وجوار  $U$  للمنصر  $c$  بحيث أنه إذا كانت  $n \geq m$  ،  $x \in U \cap D$  ، فإن  $f_n(x) < \varepsilon$  .

٢٤ - ( ح ) استخدم التمرين السابق لبرهنة النتيجة الآتية لأليس ديني (\*). إذا كانت  $(f_n)$  متتابعة مطردة لدوال متصلة والتي تتقارب عند كل نقطة لفئة مدجة  $K$  في  $\mathbb{R}^p$  إلى دالة متصلة  $f$  في  $K$  ، فإن التقارب يكون منتظماً في  $K$  .

٢٤ - ( ط ) وضح ، بمثال ، أن نظرية ديني تفشل إذا حذفنا من الفرض أولاً أن  $K$  مدجة أو أن  $f$  متصلة .

٢٤ - ( ي ) أثبت النظرية الآتية لجورج بوليا (\*\*) إذا كانت الدالة  $f_n$  في  $I$  إلى  $\mathbb{R}$  متزايدة باطراد لكل  $n \in \mathbb{N}$  وإذا كانت  $f(x) = \lim [f_n(x)]$  متصلة في  $I$  ، فإن التقارب يكون منتظماً في  $I$  . ( لاحظ عدم فرض كون  $f$  متصلة ) .

٢٤ - ( ك ) إذا كانت  $(f_n)$  متتابعة لدوال متصلة في  $D \subseteq \mathbb{R}^p$  إلى  $\mathbb{R}^q$  وبفرض  $f(x) = \lim [f_n(x)]$  عند  $x \in D$  . أثبت أن  $f$  متصلة عند نقطة  $c \in D$  إذا وإذا فقط لكل  $\varepsilon > 0$  يوجد  $m \in \mathbb{N}$  وجوار  $U$  للنقطة  $c$  بحيث أنه إذا كانت  $x \in D \cap U$  فإن  $\|f_m(x) - f(x)\| < \varepsilon$  .

٢٤ - ( ل ) بفرض أن  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  متصلة بانتظام في  $\mathbb{R}$  وعند  $n \in \mathbb{N}$  ، وبفرض  $f_n(x) = f(x + 1/n)$  عند  $x \in \mathbb{R}$  . أثبت أن  $(f_n)$  تتقارب بانتظام في  $\mathbb{R}$  إلى  $f$  .

٢٤ - ( م ) إذا كانت  $f_2(x) = x^2$  عند  $x \in I$  ،  $\xi$  من الكبر يجب أن تكون  $n$  بحيث أن كثيرة الحدود النونية لبرنشتين  $B_n$  للدالة  $f_2$  تحقق  $|f_2(x) - B_n(x)| \leq 1/1000$  لكل  $x \in I$  ؟

٢٤ - ( ن ) إذا كانت  $f_3(x) = x^3$  عند  $x \in I$  ، احسب كثيرة الحدود النونية لبرنشتين للدالة  $f_3$  . وضح مباشرة أن هذه المتتابعة لكثيرات الحدود تقترب بانتظام إلى  $f_3$  في  $I$  .

٢٤ - ( س ) فاضل معادلة  $(y - 2x)^2 = 1$  مرة واحدة بالنسبة إلى  $x$  وبالتمويض  $y = x$  ،  $x = 1 - y$  اشتقاقاً آخر لدالة  $(y - 2x)^2 = 1$  .

(\*) أليس ديني (١٨٤٥ - ١٩١٨) تعلم ودرس في ييزا . وقام بأبحاث في الهندسة والتحليل وخاصة متسلسلة فورييه .

(\*\*) جورج بوليا (١٨٨٧ - ) ولد في بودابست ودرس في زيورخ وستانفورد هو مشهور بعمله في التحليل المركب ، الاحتمالات ، نظرية العدد ونظرية الاستدلال .



٢٤ - (ع) فاضل معادلة (٢٤ - ٣) مرتين بالنسبة إلى  $\delta$  لتعطى اشتقاقاً آخر لمعادلة (٢٤ - ٨) .

٢٤ - (ف) (أ) بفرض  $J$  فترة مدجة في  $\mathbb{R}$  ، وبفرض أن  $a \in \mathbb{R}, c \in J$  . ارسم شكلاً تخيلياً للدالة  $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}$  المعرفة بأنها  $\varphi(x) = a + \frac{1}{2}(|x-c| + x+c)$  .  
(ب) اثبت أن كل دالة خطية قطعية متصلة يمكن كتابتها كحاصل جمع عدد محدود من دوال  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  في الصورة المعطاة في جزء (أ) .

(ج) بفرض أن  $c$  في أي فترة مدجة ، دالة القيمة المطلقة  $A(x) = |x|$  هي النهاية المنتظمة لمتتابعة كثيرات الحدود في  $x$  ، استخدم الملاحظة في جزء (ب) لإعطاء برهاناً آخر لنظرية تقريب : فيرستراس ( ترجع هذه الطريقة من البرهان إلى ليسيج ) .

٢٤ - (ص) أثبت أن الدوال  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  في  $\mathbb{R}$  ليست نهاية منتظمة في  $\mathbb{R}$  لمتتابعة كثيرات الحدود . ومن ثم ربما تفشل نظرية تقريب فيرستراس لفترات لانهائية .

٢٥ - (ق) أثبت أن نظرية تقريب فيرستراس تفشل لفترات مفتوحة محدودة .

## الباب الخامس والعشرون — نهايات دوال :

مع أنه من غير الممكن إعطاء تعريف قيم ، فإن حقل « التحليل الرياضى » يفهم في الحالة العامة بأنه جسم الرياضيات الذى فيه يصنع استخدام مرتب من تصورات مختلفة نهائية إذا كان هذا نصاً مضبوطاً معقولاً ، فربما يبدو شاذ للقارئ أننا انتظرنا هذا الكثير قبل إدخال باب يعالج النهايات . توجد أسباب كثيرة لهذا التأخير ، السبب الرئيسى هو أن التحليل الأولي يعالج أنواعاً مختلفة متعددة من عمليات النهاية .

قد ناقشنا من قبل التقارب لمتتابعات والنهاية المذكورة ضمناً في دراسة الاتصال .

سوف نقدم في الفصول القادمة ، العمليات النهائية المرتبطة بالمشقة والتكامل . مع أن جميع هذه التصورات للنهاية حالات خاصة من تصور عام أكثر عمومية ، فالتصور العام يكون نوعاً ما ذات صفة تجريدية : ولهذا السبب ، نفضل أن نقدم ونناقش التصورات منفصلة ، بدلا من أن تكون الفكرة العامة عن النهايات وبعد ذلك تستنتج الحالات الخاصة .

وبمجرد تفهم الحالات الخاصة جيداً نجد أنه ليس صعباً استيعاب المفهوم التجريدى . ولعرض ممتاز لهذه النهاية المجردة ، أنظر المقال العرضى من كتاب أ . ج . مشان المدون بالمراجع .

في هذا الباب ستكون مختصين بالنهاية لدالة عند نقطة وبعض امتدادات بسيطة لهذه الفكرة . هذه الفكرة درست غالباً قبل الاتصال وفي الحقيقة ، التعريف الفعلى لدالة متصلة أحياناً يعبر عنه بدلالة هذه النهاية بدلا من استخدام التعريف المعطى في باب ٢٠ . أحد الأسباب لاختيارنا دراسة

الاتصال منفصلا عن دراسة النهاية هو أننا سوف نقدم تعريفين مختلفين قليلا للنهاية لدالة عند نقطة .  
بما أن كلا التعريفين يستعملان بكثرة ، فسنقدم كليهما ونحاول أن نربط كلا منهما للآخر .

إذا لم يكن هناك إشارة خاصة للعكس ، سنفترض أن  $f$  هي دالة نطاقها  $D$  محتوي في  $\mathbb{R}^p$  وقيمها في  $\mathbb{R}^q$  وسنعتبر الخاصية النهائية للدالة  $f$  عند نقطة لجميع  $c$  من  $D$  . لذلك ، تحتوى كل جوار للنقطة  $c$  نقطاً كثيرة عددها لانهائي من  $D$  .

٢٥ - ١ تعريف . (i) يقال لعنصر  $b$  من  $\mathbb{R}^q$  إنه النهاية المحذوفة للدالة  $f$  عند النقطة  $c$  إذا كان يوجد لكل جوار  $V$  للعنصر  $b$  جوار  $U$  للنقطة  $c$  بحيث أنه إذا كانت  $x$  تنتمي إلى  $U \cap D$  ، فإن  $f(x)$  تنتمي إلى  $V$  . في هذه الحالة نكتب

$$(25.1) \quad b = \lim_{x \rightarrow c} f \quad \text{أو} \quad b = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$$

(ii) يقال لعنصر  $b$  من  $\mathbb{R}^q$  إنه النهاية غير المحذوفة من الدالة  $f$  عند النقطة  $c$  إذا كان يوجد جوار  $V$  للنقطة  $b$  جوار  $U$  للنقطة  $c$  بحيث أنه إذا كانت  $x$  تنتمي إلى  $U \cap D$  ، فإن  $f(x)$  تنتمي إلى  $V$  . في هذه الحالة نكتب

$$(25.2) \quad b = \text{Lim}_{x \rightarrow c} f \quad \text{أو} \quad b = \text{Lim}_{x \rightarrow c} f(x)$$

من المهم ملاحظة أن الفرق بين هذين المفهومين يتركز فيما إذا كانت متغير القيمة  $f(c)$  موجودا ، أم لا . لاحظ أيضاً الاختلاف التصوري الدقيق نوعاً ما الذي قد قدمناه في معادلتى ( ٢٥ - ١ ) ، ( ٢٥ - ٢ ) . ويجب التأكد من أن معظم المؤلفين يقدمون فقط أحد هذه المذلولات ، وفي هذه الحالة يشيرون إليها فقط بأنها « النهاية » ويستخدمون عامة الرمز في ( ٢٥ - ١ ) بما أن النهاية المحذوفة هي الأكثر اشتهاراً ، فقد اخترنا الاحتفاظ بالرمز التقليدي عند الإشارة إليها .

أثبتنا حالى الانفraz لكل نهاية ، إن وجدت ، سنكتفى بالنص الآتى :

٢٥ - ٢ مفترض . (أ) إذا كانت كل من النهايتين  $\lim_{x \rightarrow c} f$  ،  $\text{Lim}_{x \rightarrow c} f$  موجودة فإنها تكون محددة وحيدة .

(ب) إذا كانت النهاية غير المحذوفة موجودة ، فتوجد النهاية المحذوفة ويكون

$$\lim_{x \rightarrow c} f = \text{Lim}_{x \rightarrow c} f$$

(ج) إذا كانت  $c$  لا تنتمي إلى النطاق  $D$  للدالة  $f$  ، فإن النهاية المحذوفة تكون موجودة إذا وإذا فقط كانت النهاية غير المحذوفة موجودة .

جزء (ب) من المفترض المنصوص حالا يوضح أن مفهوم النهاية غير المحذوفة يكون بنوع ما أكثر تمقيداً من مفهوم النهايات المحذوفة . يوضح جزء (ج) أنهما يمكن أن يكونا مختلفين فقط في الحالة التي فيها  $c$  تنتمي إلى  $D$  . لإعطاء مثالا فيه هذان المفهومان مختلفان ، اعتبر الدالة  $f$  في  $R$  إلى  $R$  ومعرفة بأنها

$$(25.3) \quad \begin{aligned} f(x) &= 0, & x &\neq 0, \\ &= 1, & x &= 0. \end{aligned}$$

إذا كانت  $c = 0$  ، فإن النهاية المحذوفة للدالة  $f$  عند  $c = 0$  موجودة وتساوى صفراً ، بينما لا توجد النهاية غير المحذوفة .

الآن نقرر بعض شروط كافية وضرورية لوجود النهايات ، تاركين برهانها للقارئ . يجب التأكيد بأنه في جزء (ج) لكلتا النتيجةين تشير النهاية إلى النهاية للمتتابعة التي نوقشت في باب ١٤ .

٢٥-٣ نظرية . النصوص الآتية ، المتعلقة بالنهايات المحذوفة ، متكافئة .

(١) النهاية المحذوفة  $b = \lim_c f$  موجودة

(ب) إذا كانت  $\varepsilon > 0$  فإنه يوجد  $\delta > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $x \in D$  ،  $0 < \|x - c\| < \delta$  ، فإن  $\|f(x) - b\| < \varepsilon$  .

(ج) إذا كانت  $(x_n)$  أى متتابعة في  $D$  بحيث أن  $x_n \neq c$  ،  $c = \lim (x_n)$  فإن  $b = \lim [f(x_n)]$  .

٢٥-٤ نظرية . النصوص الآتية ، المتعلقة بالنهايات غير المحذوفة ، متكافئة .

(١) النهاية غير المحذوفة توجد أى  $b = \text{Lim}_c f$  .

(ب) إذا كانت  $\varepsilon > 0$  ، فإنه يوجد  $\delta > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $x \in D$  ،  $\|x - c\| < \delta$  فإن  $\|f(x) - b\| < \varepsilon$  .

(ج) إذا كانت  $(x_n)$  أى متتابعة في  $D$  بحيث أن  $c = \lim (x_n)$  فنجد أن  $b = \lim [f(x_n)]$  .

النتيجة الآتية تنتج علاقة بنامة بين هاتين النهايتين والاتصال للدالة  $f$  عند  $c$  .

٢٥-٥ نظرية . إذا كانت  $c$  نقطة تجمع متتمية إلى النطاق  $D$  من الدالة  $f$  ، فإن النصوص الآتية تكون متكافئة .

(أ) الدالة  $f$  متصلة عند  $c$  .

(ب) النهاية المحذوفة  $\lim_c f$  موجودة وتساوى  $f(c)$

(ج) النهاية غير المحذوفة  $\text{Lim}_c f$  موجودة .

البرهان . إذا ظلت (أ) قائمة ، كانت  $V$  جواراً للدالة  $f(c)$  ، فإنه يوجد جوار  $U$  للنقطة  $c$  بحيث أنه إذا كانت  $x$  تنتمي إلى  $U \cap D$  ، فإن  $f(x)$  تنتمي إلى  $V$  . هذا يدل بوضوح على أن  $\text{Lim } f$  تكون موجودة عند  $c$  وتساوى  $f(c)$  بالمثل ،  $f(x)$  تنتمي إلى  $V$  لكل  $x \neq c$  حيث  $x \in U \cap D$  في هذه الحالة توجد نهاية  $f$  وتساوى  $f(c)$  . بالمعكس ، قد لاحظنا حالاً أن النصين (ب) ، (ج) يدلان على (أ) .

إذا كانت  $f$  ،  $g$  دالتين لهما نهايتان محذوفتان (نسبياً غير محذوفتين) عند نقطة تجمع  $c$  من  $D(f+g) = D(f) \cap D(g)$  ، فإن حاصل جمعهما  $f+g$  له نهاية محذوفة (نسبياً غير محذوفة) عند النقطة  $c$  ويكون

$$\lim_c (f+g) = \lim_c f + \lim_c g,$$

$$\left( \lim_c (f+g) = \lim_c f + \lim_c g \right) \text{ على الترتيب}$$

نتائج مشابهة تظل قائمة لمجموعات جبرية أخرى من دوال ، كما يلاحظ بسهولة . النتيجة الآتية ، المتعلقة ، بتركيب دالتين ، أعق بسيطاً وموضع فيه النهاية غير المحذوفة تكون أبسط من النهاية المحذوفة .

٢٥ - ٦ نظرية . نفرض أى الدالة  $f$  لها نطاق  $D(f)$  في  $\mathbb{R}^p$  ومدى في  $\mathbb{R}^q$  وأن  $g$  لها نطاق  $D(g)$  في  $\mathbb{R}^q$  ومدى في  $\mathbb{R}^r$  . نفرض أن  $g \circ f$  هي تحصيل الدالتين  $g$  ،  $f$  ونفرض أن  $c$  هي نقطة تجمع للنطاق  $D(g \circ f)$  .

(أ) إذا كانت كلتا النهايتين المحذوفتين  $\lim_c f$  ،  $\lim_b g$  موجودتان وإذا كانت إما  $g$  متصلة عند  $b$  أو  $f(x) \neq b$  عند  $x$  في جوار النقطة  $c$  ، فإن النهاية المحذوفة للمحصلة  $g \circ f$  تكون موجودة عند النقطة  $c$  وأن  $a = \lim_c g \circ f$  .

(ب) إذا كانت كلتا النهايتين غير المحذوفتين  $\text{Lim}_c f$  ،  $\text{Lim}_b g$  موجودتان فإن النهاية غير المحذوفة للمحصلة  $g \circ f$  تكون موجودة عند  $c$  ويكون

$$a = \text{Lim}_c g \circ f$$

البرهان . (أ) نفرض أن  $W$  هي جوار النهاية  $a$  في  $\mathbb{R}^r$  ، بما أن  $a = \lim g$  عند  $b$  ، فيوجد جوار  $V$  النهاية  $b$  بحيث أنه إذا كانت  $y$  تنتمي إلى  $V \cap D(g)$  ،  $y \neq b$  فإن  $g(y) \in W$

بما أن  $b = \lim f$  عند  $c$  ، فيوجد جوار  $U$  للنقطة  $c$  بحيث أنه إذا كانت  $x$  تنتمي إلى  $U \cap D(f)$  ،  $x \neq c$  ، فإن  $f(x) \in V$  . ومن ثم ، إذا كانت  $x$  تنتمي إلى الفئة الصغرى الممكنة  $U \cap D(g \circ f)$  ،  $x \neq c$  ، فإن  $f(x) \in V \cap D(g)$  . إذا كانت  $f(x) \neq b$  في جوار ما  $U_1$  من  $c$  ، فينتج أنه عند  $x \neq c$  في  $(U_1 \cap U) \cap D(g \circ f)$  فإن  $(g \circ f)(x) \in W$  ، أى أن  $a$  هي النهاية المحذوفة للمجموعة  $f \circ g$  عند  $c$  . إذا كانت  $g$  متصلة عند  $b$  ، فإن  $(g \circ f)(x) \in W$  عند  $x$  في  $U \cap D(g \circ f)$  وحيث  $x \neq c$  .

لبرهنة جزء (ب) ، نلاحظ أن الاستثناءات التي أجريت في برهان جزء (أ) ليست ضرورية . ومن ثم إذا كانت  $x$  تنتمي إلى  $U \cap D(g \circ f)$  ، فإن  $f(x) \in V \cap D(g)$  ويكون تبعاً لذلك ،  $(g \circ f)(x) \in W$  .

الاستنتاج في جزء (أ) للنظرية السابقة ربما يفشل إذا أسقطنا الشرط المذكور وهو أن  $g$  متصلة عند  $b$  أو أن  $f(x) \neq b$  في جوار النقطة  $c$  لبرهنة هذه الملاحظة ، نفرض أن  $f$  هي الدالة في  $R$  إلى  $R$  المعرفة بالصيغة (٢٥-٣) ويفرض أن  $g = f$  ،  $c = 0$  ، فإن  $g \circ f$  تعطى من

$$(g \circ f)(x) = 1, \quad x \neq 0, \\ = 0, \quad x = 0$$

فصلاً عن ذلك ، نجد أن  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  ،  $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 0$  حيث من الواضح أن  $\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x) = 1$  ( لاحظ أن النهايتين المحذوفتين لهذه الدوال غير موجودتين ) .

## نهايات أعلى عند نقطة :

في الباقي من هذا الباب الجالى ، سنعتبر الحالة عند  $q = 1$  . أى أن  $f$  هي دالة نطاقها  $D$  في  $R^p$  وقيمها في  $R$  والنقطة  $c$  في  $R^p$  هي نقطة تجميع للنطاق  $D$  . سنعرف النهاية الأعلى أو الحد العلوى للدالة  $f$  عند النقطة  $c$  . مرة ثانية ، توجد إمكانيتان تعتمدان على اعتبار اما جبريات محذوفة أو جبريات غير محذوفة وسوف نناقش كلتا الإمكانيتين . من الواضح أنه يمكننا تعريف النهاية الأدنى بطريقة مشابهة . يلاحظ شيء واحد هنا هو أنه ، مع أن وجود النهاية في  $R$  ( محذوفة أو غير محذوفة ) هو مسألة دقيقة نسبياً ، فإن للنهايات الأعلى التي تعرف فاعلية أنه إذا كانت  $f$  محدودة ، فإن وجودها مضمون .

الأنكار في هذا الجزء توازى المدلول للنهاية الأعلى للمتتابة في  $R^p$  والذي قدم في باب ١٩ ، لكن ، سوف لا نفرض معرفتنا بالذي قد تم هناك ، باستثناء بعض التمارين .

٢٥-٧ تعريف . نفرض أن  $f$  محدودة في جوار النقطة  $c$  . إذا كانت  $r > 0$  ،  
نعرف  $\varphi(r)$  ،  $\Phi(r)$  بالتعاريف

$$(a) \quad \varphi(r) = \sup \{f(x) : 0 < \|x - c\| < r, x \in D\},$$

$$(b) \quad \Phi(r) = \sup \{f(x) : \|x - c\| < r, x \in D\}$$

$$(c) \quad \limsup_{x \rightarrow c} f = \inf \{\varphi(r) : r > 0\},$$
 وضع

$$(d) \quad \text{Lim sup}_{x \rightarrow c} f = \inf \{\Phi(r) : r > 0\}$$

هذه الكميات تسمى النهاية الأعلى المحذوفة ، والنهاية الأعلى غير المحذوفة للدالة  $f$  عند  $c$  ،  
على الترتيب .

بما أن هذه الكميات قد عرفت مثل الأدنى للصورة تحت الدالة  $f$  لجوار متناقص دائماً  
لنقطة  $c$  ، فن المحتمل عدم وضوح أنهم يستحقون المصطلحات « نهاية أعلى » المفترض  
الآتي يدل على تبرير للاصطلاحات .

٢٥-٨ مقترض . إذا كانت  $\Phi, \varphi$  معرفة كأعلى ، فإن

$$(a) \quad \limsup_{x \rightarrow c} f = \lim_{r \rightarrow 0} \varphi(r),$$

$$(b) \quad \text{Lim sup}_{x \rightarrow c} f = \lim_{r \rightarrow 0} \Phi(r)$$

البرهان . نلاحظ أنه إذا كانت  $0 < r < s$  ، فإن

$$\limsup_{x \rightarrow c} f \leq \varphi(r) \leq \varphi(s)$$

فضلا عن ذلك ، نجد من ٢٥-٧ (ج) ، أنه إذا كانت  $\varepsilon > 0$  فيوجد  $r_\varepsilon > 0$   
بحيث أن

$$\varphi(r_\varepsilon) < \limsup_{x \rightarrow c} f + \varepsilon$$

وإذن ، إذا كانت  $r$  تحقق  $0 < r < r_\varepsilon$  ، نحصل على  $|\varphi(r) - \limsup_{x \rightarrow c} f| < \varepsilon$  ،  
التي تثبت (أ) . سيحذف برهان جزء (ب) لأنه مشابه وهو المطلوب اثباته

٢٥-٩ مقترض . (أ) إذا كانت  $M > \limsup_{x \rightarrow c} f$  ، فيوجد جوار  $U$  للنقطة  $c$   
بحيث أن

$$f(x) < M \quad \text{عند} \quad c \neq x \in D \cap U$$

(ب) إذا كانت  $M > \text{Lim sup}_{x \rightarrow c} f$  ، فيوجد جوار  $U$  للنقطة  $c$  بحيث أن

$$f(x) < M \quad \text{عند} \quad x \in D \cap U$$

البرهان . (أ) من ٢٥ - ٧ (ج) ، نجد أن  $\inf \{\varphi(r) : r > 0\} < M$  . ومن ثم يوجد عدد حقيق  $r_1 > 0$  بحيث أن  $\varphi(r_1) < M$  . وإذن يمكننا أخذ  $\{x \in R^p : \|x - c\| < r_1\}$  . وهو المطلوب إثباته .  
برهان آخر الجزء (ب) يكون مشابهاً .

٢٥ - ١٠ مقترض . نفرض أن  $f$  ،  $g$  دالتين محدودتين في جوار النقطة  $c$  ونفرض أن  $c$  هي نقطة تجمع للنطاق  $D(f+g)$  ، فيكون

$$\limsup_{x \rightarrow c} (f+g) \leq \limsup_{x \rightarrow c} f + \limsup_{x \rightarrow c} g \quad (أ)$$

$$\limsup_{x \rightarrow c} (f+g) \leq \limsup_{x \rightarrow c} f + \limsup_{x \rightarrow c} g \quad (ب)$$

البرهان . من الملاحظة

$$\sup \{f(x) + g(x) : x \in A\} \leq \sup \{f(x) : x \in A\} + \sup \{g(x) : x \in A\}$$

نجد أنه من الواضح ، باستخدام الرمز كما في تعريف ٢٥ - ٧ ، أن

$$\varphi_{f+g}(r) \leq \varphi_f(r) + \varphi_g(r)$$

الآن نستخدم مقترض ٢٥ - ٨ ونجعل  $r \rightarrow 0$  فنحصل على برهان (أ) .  
وهو المطلوب إثباته

ستوجد نتائج مختصة بمجموعات جبرية أخرى في تمرين ٢٥ - ف .

مع أنه سوف لا نجد فرصة لتتبع هذه الأشياء ، في بعض قطاعات التحليل فن المفيد أن يكون لدينا التعميم الآتي لمفهوم الاتصال .

٢٥ - ١١ تعريف . يقال لدالة  $f$  في  $D$  إلى  $R$  أنها نصف متصلة من أعلى عند نقطة  $c$  في  $D$  في حالة

$$(25.4) \quad f(c) = \limsup_{x \rightarrow c} f$$

يقال أنها تكون نصف متصلة من أعلى في  $D$  إذا كانت نصف متصلة من أعلى عند كل نقطة من النطاق  $D$  .

بدلاً من تعريف نصف الاتصال العلوى بواسطة معادلة (٢٥ - ٤) يمكننا أن نحتاج الشرط المكافئ والأقل شيئاك الآتي

$$(25.5) \quad f(c) \geq \limsup_{x \rightarrow c} f$$

يقترح أحد مفاتيح الأهمية والمنفعة للدوال نصف المتصلة من أعلى بالمفترض الآتي ، الذي يمكن مقارنته بنظرية الاتصال الكروي ٢٢ - ١ .

٢٥-١٢ مفترض . نفرض أن  $f$  دالة نصف متصلة من أعلى بنطاق  $D$  في الفراغ  $R^p$  ونفرض أن  $k$  عدد حقيقي اختياري . حينئذ يوجد فئة مفتوحة  $G$  وفئة مغلقة  $F$  بحيث أن

$$(25.6) \quad G \cap D = \{x \in D : f(x) < k\}, \quad F \cap D = \{x \in D : f(x) \geq k\}$$

البرهان . نفرض أن  $c$  هي نقطة في  $D$  بحيث أن  $f(c) < k$  . يوجد حسب تعريف ٢٥-١١ ومفترض ٢٥-٩ (ب) ، جوار  $U(c)$  للنقطة  $c$  بحيث أن  $f(x) < k$  لجميع  $x$  في  $D \cap U(c)$  . يمكننا ، بدون فقد التعميم ، اختيار  $U(c)$  بحيث تكون جواراً مفتوحاً ، يوضع

$$G = \bigcup \{U(c) : c \in D\}$$

نحصل على فئة مفتوحة بالخاصة المنصوصة في (٢٥-٦) . إذا كانت  $F$  متممة  $G$  ، فإن  $F$  تكون مغلقة في  $R^p$  وتحقق الشرط المنصوص عليه وهو المطلوب لإثباته

من الممكن ، باستخدام المفترض المبرهن حالياً ، (تمرين ٢٥-٣) توضيح أنه إذا كانت  $K$  فئة جزئية مدمجة من  $R^p$  وكانت الدالة  $f$  نصف متصلة من أعلى في  $K$  ، فإن  $f$  تكون محدودة من أعلى في  $K$  وتوجد نقطة في  $K$  حيث  $f$  تصل إلى النهاية الأعلى لها . أي أن الدوال نصف المتصلة العليا في فئات مدمجة لها بعض الخواص التي أثبتناها للدوال المتصلة ، حتى بالرغم من أن دالة نصف متصلة من أعلى يمكن أن يكون لها نقط عدم اتصال .

سيجد القارئ أنه من الممكن امتداد التصور لنهاية أعلى عند نقطة إلى الحالة التي فيها تكون الدالة ليست محدودة وذلك باستخدام أفكار موجودة على طول السطور المطاة في نهاية باب ١٨ - بالمثل

يمكن تعريف النهاية الأعلى عندما  $x \rightarrow \pm \infty$  . هذه الأفكار مفيدة ، لكن سنتركها كتمارين

### تمارين :

٢٥- (أ) ناقش وجود كل من النهايات المحنوفة وغير المحنوفة للدوال الآتية عند النقطة  $x = 0$

$$f(x) = 1/x, \quad x \neq 0 \quad (\text{ب}) \quad f(x) = |x| \quad (\text{أ})$$

$$f(x) = \sin(1/x), \quad x \neq 0 \quad (\text{د}) \quad f(x) = x \sin(1/x), \quad x \neq 0 \quad (\text{ج})$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (\text{و}) \quad f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \quad (\text{هـ})$$

٢٥- (ب) أثبت مفترض ٢٥-٢

٢٥- (ج) إذا كانت  $f$  تدل على الدالة المعروفة في معادلة (٢٥-٣) وضح أن النهاية



المحدوفة عند  $x = 0$  تساوى صفراً وأن النهاية غير المحدوفة عند  $x = 0$  غير موجودة . ناقش وجود هاتين النهايتين للمحصلة  $f^{\circ}$  .

٢٥- (د) اثبت مفترض ٢٥-٤ .

٢٥- (هـ) وضح أن النصوص ٢٥-٥ (ب) ، ٢٥-٥ (ج) تدل على نص ٢٥-٥ (أ) .

٢٥- (و) وضح أنه إذا كانت  $f$  ،  $g$  لهما نهايات محدوفة عند نقطة تجمع  $c$  من القيمة  $D(f) \cap D(g)$  ، فإن حاصل جمع  $f + g$  له نهاية محدوفة عند  $c$  وأنه

$$\lim (f + g) = \lim f + \lim g$$

تحت نفس الفرض ، يكون حاصل الضرب النقطي ( الداخلي )  $f \cdot g$  له نهاية محدوفة عند  $c$  وأن

$$\lim (f \cdot g) = \left( \lim f \right) \cdot \left( \lim g \right)$$

٢٥- (ز) نفرض أن  $f$  معرفة في فئة جزئية  $D(f)$  للفراغ  $R$  إلى  $R^q$  . إذا كانت  $c$  أى نقطة تجمع من الفئة  $V = \{x \in R : x \in D(f), x > c\}$  وإذا كانت  $f_1$  هي تقييد  $f$  إلى  $V$  ، فنعرّف النهاية المحدوفة اليمنى للدالة  $f$  عند النقطة  $c$  بأن تكون  $\lim_c f_1$  ، طالما كانت هذه النهاية موجودة . أحياناً يرمز لهذه النهاية بالرمز  $\lim_c f$  أو بالرمز  $f(c+0)$  . صغ وكون نتيجة مماثلة لنظرية ٢٥-٣ النهاية المحدوفة اليمنى ( تعريف مشابه يمكن إعطاؤه للنهاية غير المحدوفة اليمنى وكلتي نهايتي الطرف الأيسر عند  $c$  ) .

٢٥- (ح) بفرض  $f$  معرفة في  $D = \{x \in R : x \geq 0\}$  إلى  $R$  . نقول إن عدد  $L$  هو النهاية للدالة  $f$  عند  $+\infty$  إذا كان يوجد لكل  $\varepsilon > 0$  عدد حقيقى  $m(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $x \geq m(\varepsilon)$  ، فإن  $|f(x) - L| < \varepsilon$  . في هذه الحالة نكتب  $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} f$  . اكتب في صورة قانون نتيجة مماثلة لنظرية ٢٥-٣ لهذه النهاية وبرهن عليها .

٢٥- (ط) إذا كانت  $f$  معرفة في فئة  $D(f)$  في  $R$  إلى  $R$  وإذا كانت  $c$  نقطة تجمع من  $D(f)$  فنقول إن  $f(x) \rightarrow +\infty$  عند  $x \rightarrow c$  أو إن

$$\lim_{x \rightarrow c} f = +\infty$$

في حالة وجود، لكل عدد موجب  $M$  جوار  $U$  للنقطة  $c$  بحيث أنه إذا كانت  $x \in U \cap D(f)$  ،  $x \neq c$  فإن  $f(x) > M$  . صغ وبرهن نتيجة مماثلة لنظرية ٢٥-٣ لهذه النهاية .

٢٥- (ي) في ضوء تمرينى ٢٥-ح ، ٢٥-ط ، اعط تعريفاً المقصود بالتعريفين

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$$

٢٥- (ك) كون مفترض ٢٥ - ٨ النهاية الأعلى غير المحذوفة . اعط البرهان لمفترض ٢٥- ٩ (ب) .

٢٥- (ل) عرف ماذا يقصد بالآتي  $\liminf_{x \rightarrow \infty} f = -\infty$  ،  $\limsup_{x \rightarrow \infty} f = L$  .

٢٥- (م) وضح أنه إذا كانت  $f$  دالة نصف متصلة من أعلى في فئة جزئية مدمجة  $K$  ، للفراغ  $R^p$  بقيم في  $R$  ، فإن  $f$  محدودة من أعلى وتصل إلى النهاية الأعلى الخاصة بها في  $K$  .

٢٥- (ن) وضح أن دالة نصف متصلة من أعلى في فئة مدمجة ربما لا تكون محدودة من أسفل وربما لا تصل إلى النهاية الأدنى الخاصة بها .

٢٥- (س) وضح أنه إذا كانت  $A$  فئة جزئية مفتوحة من  $R^p$  وإذا كانت  $f$  معرفة في  $R^p$  إلى  $R$  بأنها  $f(x) = 1$  عند  $x \in A$  ،  $f(x) = 0$  عند  $x \notin A$  ، فإن  $f$  هي دالة نصف متصلة من أسفل . إذا كانت  $A$  فئة جزئية مغلقة في  $R^p$  ، وضح أن  $f$  هي نصف متصلة من أعلى .

٢٥- (ع) اعط مثالا لدالة نصف متصلة من أعلى والتي لها عدد لا نهائي من نقط عدم الاتصال .

٢٥- (ف) هل صحيح أن دالة في  $R^p$  إلى  $R$  تكون متصلة عند نقطة إذا وإذا فقط كانت نصف متصلة من أعلى ومن أسفل عند هذه النقطة ؟

٢٥- (ص) إذا كانت  $(f_n)$  متتابة محدودة لدوال متصلة في  $R^p$  إلى  $R$  وإذا كانت  $f^*$  معرفة في  $R^p$  بأنها  $f^*(x) = \sup \{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$  عند  $x \in R^p$  ، فهل صحيح أن  $f^*$  تكون نصف متصلة من أعلى في  $R^p$  ؟

٢٥- (ق) إذا كانت  $(f_n)$  متتابة محدودة لدوال متصلة في  $R^p$  إلى  $R$  وإذا كانت  $f_*$  معرفة في  $R^p$  بأنها  $f_*(x) = \inf \{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$  عند  $x \in R^p$  ، فهل صحيح أن  $f_*$  تكون نصف متصلة من أعلى في  $R^p$  ؟

٢٥- (ر) نفرض أن  $f$  معرفة في فئة جزئية  $D$  من  $R^p \times R^q$  وقيم في  $R'$  . نفرض أن  $(a, b)$  نقطة تجميع في  $D$  . مثل تعريف ١٩ - ٤ ، عرف النهاية المزدوجة والنهايتين المكررتين للدالة  $f$  عند  $(a, b)$  . وضح أن وجود النهايات المزدوجة والمكررة يدل على تساويها . وضح أن النهاية المزدوجة يمكن وجودها بدون وجود أي نهاية مكررة وأن كلتا النهايتين المكررتين يمكن وجودهما متساويتين بدون وجود النهاية المزدوجة .

٢٥- (ش) نفرض أن  $f$  هي مثل التمرين السابق . مثل تعريف ١٧ - ٤ ، ١٩ - ٨ ، عرف ماذا نقصد بقولنا أن

$$g(y) = \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$$

بانتظام عند  $\gamma$  في فئة . صنع وبرهن نتيجة مماثلة لنظرية ١٩ - ١٠ .

٢٥ - (ت) نفرض أن  $f$  كبا في تعريف ٢٥ - ١ ونفرض أن النهاية المحذوفة عند  $c$  موجودة وأنه لعنصر ما  $A$  في  $\mathbb{R}^n$  ،  $r > 0$  المتباينة  $\|f(x) - A\| < r$  تظل قائمة في جوار ما للنقطة  $c$  . اثبت أن  $\|\lim_{x \rightarrow c} f - A\| \leq r$  هي نفس الاستنتاج يظل قائماً لنهاية غير محذوفة ؟

٢٥ - (ث) افحص نصف الاتصال الأعلى والأسفل للدوال في جزئ ( ز ) ، ( ح )  
مثال ٢٥ - ٥ .

٢٥ - (خ) إذا كانت  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  متصلة في  $[0, +\infty)$  ،  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  ،  
اثبت أن  $f$  متصلة بانتظام في  $[0, +\infty)$

### الباب السادس والعشرون — بعض نتائج أبعد :

سنقدم بعض نظريات في هذا الباب والتي سوف لا تستخدم فيما بعد في هذا الكتاب ، لكنها غالباً مفيدة في التوبولوجي والتحليل .

النتائج الأولى تكون امتدادات بعيدة الأثر لنظرية تقريب فيرستراس ، وبعد ذلك توجد نظرية تعملي شروط تكون دالة متصلة لها امتداد متصل ، والنتيجة النهائية تكون مماثلة لنتيجة بولتزانا — فيرستراس في الفراغ  $C_{pq}(K)$  لدوال متصلة فئة مدجة  $K$  .

### نظرية ستون — فيرستراس :

لتبسيط مناقشتنا ، ندخل المصطلحات الآتية : إذا كانت  $f$  ،  $g$  دالتين بنطاق  $D$  في  $\mathbb{R}^p$  وقيم في  $\mathbb{R}$  ، فإن الدالتين  $h$  ،  $k$  المعرفتين عند  $x$  في  $D$  بأنهما  
$$h(x) = \sup \{f(x), g(x)\}, \quad k(x) = \inf \{f(x), g(x)\}$$

يسميان الأعلى والأدنى ، للدالتين  $f$  ،  $g$  . على الترتيب . إذا كانت  $f$  ،  $g$  متصلتان في  $D$  ، فإن كلا من  $h$  ،  $k$  متصلتان . هذا ينتج من نظرية ٢٥ - ٧ وملاحظة أنه إذا كانت  $a$  و  $b$  عددين حقيقيين ، فإن

$$\sup \{a, b\} = \frac{1}{2}\{a + b + |a - b|\},$$

$$\inf \{a, b\} = \frac{1}{2}\{a + b - |a - b|\}$$

الآن نكتب صورة واحدة من تعميم ستون (\*) لنظرية تقريب فيرستراس . بالرغم من

(\*) مارشال . ستون (١٩٠٣ - ) تعلم في هارفارد ودرس في هارفارد وجامعتي شيكاغو وماساشوستس . كان ابن رئيس للعدل . وله مساهمات بناءة في التحليل العددي ، خاصة في نظريات فراغ هيلبرت والجبر البولياني .

اكتشافها حديثاً فقد أصبحت من قبل « ماثورية أو كلاسيكية » ويجب أن تكون جزءاً من خلفية كل طالب في الرياضيات . يجب على القارئ الرجوع إلى مقالة ستون المدونة في المراجع لزيادة المعلومات والتطبيقات حيث المناقشات والأبحاث أكثر اكتمالا من المعروضة هنا .

٢٦-١ نظرية تقريب ستون . نفرض أن  $K$  فئة جزئية مدمجة من  $\mathbb{R}^n$  ونفرض أن مجموعة دوال متصلة في  $K$  إلى  $\mathbb{R}$  ذات الخواص :

( أ ) إذا كانت  $f$  و  $g$  تنتمي إلى  $\mathcal{L}$  ، فإن  $\inf \{f, g\}$  ،  $\sup \{f, g\}$  تنتمي إلى  $\mathcal{L}$

( ب ) إذا كانت  $a, b \in \mathbb{R}$  ،  $x \neq y \in K$  ، فإنه توجد دالة  $f$  في  $\mathcal{L}$  بحيث أن  $f(x) = a$  ،  $f(y) = b$  .

ومن ثم أي دالة متصلة في  $K$  إلى  $\mathbb{R}$  يمكن تقريبها بانتظام في  $K$  بدوال في  $\mathcal{L}$  .

البرهان . نفرض أن  $F$  دالة متصلة في  $K$  إلى  $\mathbb{R}$  . إذا كانت  $x$  و  $y$  تنتميان إلى  $K$  ، فنفرض أن  $g_{xy} \in \mathcal{L}$  بحيث أن  $g_{xy}(x) = F(x)$  و  $g_{xy}(y) = F(y)$  . بما أن الدوال  $F, g_{xy}$  متصلة ولها نفس القيمة عند  $y$  ، بأخذ  $\varepsilon > 0$  ، فيوجد جوار مفتوح  $U(y)$  عند  $y$  بحيث أنه إذا كانت  $z$  تنتمي إلى  $K \cap U(y)$  فإن

$$(26.1) \quad g_{xy}(z) > F(z) - \varepsilon$$

يجعل  $x$  ثابتة وباختيار لكل  $y \in K$  ، جواراً مفتوحاً  $U(y)$  له هذه الخاصية من الإدماج للفئة الجزئية  $K$  ، ينتج أن  $K$  تكون محتوية في عدد محدود من مثل هذه الجوارات :  $U(y_1), \dots, U(y_n)$  . إذا كانت  $h_x = \sup \{g_{xy_1}, \dots, g_{xy_n}\}$  ، فإنه ينتج من علاقة ( ٢٦-١ ) أن

$$(26.2) \quad \text{عند } z \in K \quad h_x(z) > F(z) - \varepsilon$$

بما أن  $g_{xy}(x) = F(x)$  ، فيلاحظ أن  $h_x(x) = F(x)$  ومن ثم يوجد جوار مفتوح  $V(x)$  عند  $x$  بحيث أنه إذا كانت  $z$  تنتمي إلى  $K \cap V(x)$  ، فإن

$$(26.3) \quad h_x(z) < F(z) + \varepsilon$$

وبجعل  $K$  مدمجة مرة أخرى نحصل على عدد محدود من المتاخات  $V(x_1), \dots, V(x_m)$  وبوضع  $h = \inf \{h_{x_1}, \dots, h_{x_m}\}$  . نجد أن  $h$  تنتمي إلى  $\mathcal{L}$  وينتج من ( ٢٦-٢ ) أن

$$z \in K \quad \text{عند } h(z) > F(z) - \varepsilon$$

ومن ( ٢٦-٣ ) ينتج أن

$$z \in K \quad \text{عند } h(z) < F(z) + \varepsilon$$

وباتحاد هذه النتائج ، نحصل على  $|h(z) - F(z)| < \epsilon, z \in K$  التي تعطى التقريب المطلوب وهو المطلوب إثباته .

سلاحظ القارئ أن النتيجة السابقة لم تستخدم نظرية تقريب فيرشتراس في النتيجة الآتية ، سنستعاض عن شرط (أ) السابق بثلاثة شروط جبرية لفئة الدوام سنستخدم هنا نظرية فيرشتراس المأثورة ( الكلاسيكية ) ٢٤ - ٨ في الحالة الخاصة للقيمة المطلقة لدالة  $\varphi$  المعرفة عند  $t$  في  $R$  بأنها  $\varphi(t) = |t|$  ، لاستنتاج أن  $\varphi$  يمكن تقريبها بكثيرات الحدود في كل فئة مدجة لأعداد حقيقية .

٢٦ - ٢ نظرية ستون - فيرشتراس . نفرض أن  $K$  فئة جزئية مدجة من  $R^p$  وبفرض أن  $\mathcal{A}$  مجموعة من دوال متصلة في  $K$  إلى  $R$  ذات الخواص :

(أ) الدالة الثابتة  $e(x) = 1, x \in K$  تنتمي إلى  $\mathcal{A}$  .

(ب) إذا كانت  $g$  و  $f$  تنتميان إلى  $\mathcal{A}$  ، فإن  $\alpha f + \beta g$  تنتمي إلى  $\mathcal{A}$  لكل  $\alpha$  و  $\beta$  في  $R$  .

(ج) إذا كانت  $g$  و  $f$  تنتمي إلى  $\mathcal{A}$  ، فإن  $fg$  تنتمي إلى  $\mathcal{A}$  .

(د) إذا كانت  $x \neq y$  نقطتين من  $K$  ، فإنه توجد دالة  $f$  في  $\mathcal{A}$  بحيث أن  $f(x) \neq f(y)$  .

إذن أى دالة متصلة في  $K$  إلى  $R$  يمكن تقريبها بانتظام في  $K$  بدوال في  $\mathcal{A}$

البرهان . نفرض أن  $a, b \in R$  ،  $x \neq y$  تنتمي إلى  $K$  . حسب (د) ، توجد دالة  $f$  في  $\mathcal{A}$  بحيث أن  $f(x) \neq f(y)$  . بما أن  $e(x) = 1 = e(y)$  ، فنجد أنه توجد أعداد حقيقية  $\alpha, \beta$  بحيث أن

$$\alpha f(x) + \beta e(x) = a, \quad \alpha f(y) + \beta e(y) = b$$

لذلك توجد ، من جزء (ب) دالة  $g \in \mathcal{A}$  بحيث أن  $g(x) = a$  ،  $g(y) = b$  .

الآن نفرض أن  $\mathcal{L}$  هي مجموعة لكل الدوال المتصلة في  $K$  التي يمكن تقريبها بانتظام بدوال في  $\mathcal{A}$  . من الواضح أن  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$  ، لذلك  $\mathcal{L}$  لها خاصية (ب) من نظرية تقريب ستون ٢٦ - ١ . سنوضح الآن أنه إذا كانت  $h \in \mathcal{L}$  ، فإن  $|h| \in \mathcal{L}$  بما أن

$$\sup \{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|),$$

$$\inf \{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

وهذا سوف يدل على أن  $\mathcal{L}$  لها خاصية ٢٦ - ١ (أ) ومن ثم كل دالة متصلة في  $K$  إلى  $R$  تنتمي إلى  $\mathcal{L}$  .

بما أن  $h$  متصلة ،  $K$  مدمجة ، فينتج أنه يوجد  $M > 0$  بحيث أن  $\|h\|_K \leq M$  . بما أن  $h \in \mathcal{F}$  فتوجد متتابعة  $(h_n)$  لدوال في  $\mathcal{A}$  بحيث تتقارب بانتظام إلى  $h$  في  $K$  ويمكننا فرض أن  $\|h_n\|_K \leq M+1$  لكل  $n \in \mathbb{N}$  (لماذا ؟) . إذا أعطينا  $\varepsilon < 0$  فنستخدم الآن نظرية تقريب فيراشتراس ٢٤ - ٨ لدالة القيمة المطلقة في الفترة  $[M+1, -(M+1)]$  لنحصل على كثيرة حدود  $p_\varepsilon$  ، بحيث أن

$$||t| - p_\varepsilon(t)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{عند} \quad |t| \leq M+1$$

لذلك ينتج أن

$$x \in K \quad \text{عند} \quad ||h_n(x)| - p_\varepsilon(h_n(x))| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$$

الآن  $p_\varepsilon \circ h_n$  تنتمي إلى  $\mathcal{A}$  بسبب فرضنا (أ) ، (ب) ، (ج) . بما أن

$$||h(x)| - |h_n(x)|| \leq \|h - h_n\|_K$$

فينتج أنه إذا كانت  $n$  كبيرة كبراً كافياً ، فإن

$$x \in K \quad \text{عند} \quad ||h(x)| - p_\varepsilon \circ h(x)| \leq \varepsilon$$

بما أن  $\varepsilon > 0$  اختيارية ، فسننتج أن  $|h| \in \mathcal{L}$  ونتنتج النتيجة المطلوبة الآن من النظرية السابقة .

الآن نحصل على صورة أدق من نظرية ٢٤ - ٨ كحالة خاصة من نظرية فيراشتراس ، صورة من نظرية ٢٤ - ٨ أقوى ، هذه النتيجة تقوى النتيجة الأخيرة بطريقتين :  
(i) السماح للنطاق بأن يكون فئة جزئية مدمجة اختيارية من  $\mathbb{R}^p$  وليست بالفضاء خطية مدمجة في الفراغ  $\mathbb{R}^p$  ، (ii) السماح للمدى بأن يقع في أى فراغ  $\mathbb{R}^q$  وليس بالفضاء  $\mathbb{R}$  لفهم النص ، سنذكر أن دالة  $f$  بنطاق  $D$  في  $\mathbb{R}^p$  ومدى في  $\mathbb{R}^q$  يمكن اعتبارها مثل دوال عددها  $q$  في  $D$  إلى  $\mathbb{R}$  بواسطة تمثيل الاحداثي :

$$(26.4) \quad x \in D \quad \text{عند} \quad f(x) = (f_1(x), \dots, f_q(x))$$

إذا كانت كل من دالة الاحداثي  $f_i$  كثيرة حدود في  $p$  احداثيات  $(x_1, \dots, x_p)$  فإننا نقول إن  $f$  دالة كثيرة الحدود .

٢٦ - ٣ نظرية تقريب كثيرة حدود . إذا كانت  $f$  دالة متصلة نطاقها  $K$  هو فئة مدمجة للفراغ  $\mathbb{R}^p$  ومداها ينتمي إلى الفراغ  $\mathbb{R}^q$  وبفرض  $\varepsilon > 0$  . فتوجد دالة كثيرة الحدود  $p$  في  $\mathbb{R}^q$  إلى  $\mathbb{R}^q$  بحيث أن  $\|f(x) - p(x)\| < \varepsilon$  عند  $x \in K$

البرهان . نمثل  $f$  بدوال الاحداثي  $q$  كما في (٢٦ - ٤) . وبما أن  $f$  متصلة في  $K$  ، فإن كلا من دوال الاحداثي  $f_i$  تكون متصلة في  $K$  إلى  $\mathbb{R}$  . من الواضح أن الدوال كثيرة

الحدود المعرفة في  $R^p$  إلى  $R$  تحقق خواص نظرية ستون - فيرستراس ومن ثم دالة الاحداثى  $f$  يمكن تقريبها بانتظام في  $K$  داخل  $\varepsilon/\sqrt{q}$  بدالة كثيرة الحدود  $p$  ويفرض  $p$  معرفة بأنها

$$p(x) = (p_1(x), \dots, p_q(x))$$

فنحصل على دالة كثيرة حدود من  $R^p$  إلى  $R^q$  بحيث تعطى التقريب المطلوب في  $K$  إلى الدالة المطلوبة  $f$ . وهو المطلوب إثباته .

### امتداد دوال متصلة :

يكون أحياناً من المرغوب إجراء امتداد النطاق لدالة متصلة إلى فئة أكبر بدون تغيير قيم النطاق الأصل . يمكن إجراء هذا دائماً بطريق سهل جداً وذلك بتعريف الدالة فإن قيمها صفر خارج النطاق الأصل ، لكن هذه الطريقة المدة في الحالة العامة لا تعطى دالة متصلة . بعد بعض التأمل ، سبرى القارىء أنه ليس دائماً ممكناً الحصول على مد متصل . مثال ذلك ، إذا كانت  $D = \{x \in R : x \neq 0\}$  وإذا كانت  $f$  معرفة عند  $x \in D$  بالتعريف  $f(x) = 1/x$  فإن  $f$  حينئذ ليس ممكناً إيجاد طريقة لامتداد  $f$  بحيث نحصل على دالة متصلة في جميع الفراغ  $R$  . لكن ، من المهم أن نعرف أن الامتداد يكون دائماً ممكناً عندما يكون النطاق فئة مغلقة . وبالإضافة إلى ذلك نجد أنه ، ليس من الضروري زيادة الحد للدالة ( إذا كانت محدودة ) .

قبل أن نبرهن نظرية الامتداد هذه نلاحظ أنه إذا كانت  $A$  و  $B$  فئتين جزئيتين غير متصلتين للفراغ  $R^p$  ، فتوجد دالة متصلة  $\varphi$  معرفة في  $R^p$  بقيم في  $R$  بحيث أن

$$\varphi(x) = 0, \quad x \in A; \quad \varphi(x) = 1, \quad x \in B; \quad 0 \leq \varphi(x) \leq 1, \quad x \in R^p$$

في الحقيقة ، إذا كانت  $d(x, A) = \inf \{ \|x - y\| : y \in A \}$  ، فإن  $d(x, B) = \inf \{ \|x - y\| : y \in B \}$  فإنه يمكننا تعريف  $\varphi$  عند  $x \in R^p$  بالمعادلة

$$\varphi(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

٢٦ - ٤ نظرية امتداد فيتز (\*). بفرض أن  $f$  دالة متصلة محدودة ومعرفة في فئة جزئية مغلقة

$D$  للفراغ  $R^p$  وبقيم في  $R$  . حينئذ . توجد دالة متصلة  $g$  في الفراغ  $R^p$  إلى  $R$  بحيث أن  $g(x) = f(x)$  عند  $x \in D$  وبحيث أن  $\sup \{ \|g(x)\| : x \in R^p \} = \sup \{ \|f(x)\| : x \in D \}$

البرهان . نفرض أن  $M = \sup \{ |f(x)| : x \in D \}$  ونعتبر

$$B_1 = \{ x \in D : f(x) \geq M/3 \} \text{ و } A_1 = \{ x \in D : f(x) \leq -M/3 \}$$

من اتصال  $f$  وحقيقة

(\*) هينريس فيتز ( ١٨٨٠ - ١٩٦٤ ) كان أستاذاً في ميونيخ وساهم في التوبولوجى والهندسة والجبر . ونظرية الامتداد هذه ترجع إلى عام ١٩١٤

كون أن  $D$  مغلقة ، ينتج من نظرية ٢٢ - ١ (ج) أن  $A_1$  و  $B_1$  فئتان جزئيتان مغلقتان في الفراغ  $R^p$  . حسب الملاحظة السابقة لنص النظرية ، توجد دالة متصلة  $\varphi_1$  في  $R^p$  إلى  $R$  بحيث أن

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= -\frac{1}{3}M, \quad x \in A_1; \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{3}M, \quad x \in B_1; \\ -\frac{1}{3}M &\leq \varphi_1(x) \leq \frac{1}{3}M, \quad x \in R^p\end{aligned}$$

الآن نضع  $f_2 = f - \varphi_1$  ونلاحظ أن  $f_2$  متصلة في  $D$  وأن  $\sup \{|f_2(x)| : x \in D\} \leq \frac{2}{3}M$

بالاستمرار ، تعرف  $A_2 = \{x \in D : f_2(x) \leq -\frac{1}{3}\frac{2}{3}M\}$  ،  $B_2 = \{x \in D : f_2(x) \geq \frac{1}{3}\frac{2}{3}M\}$  ونحصل على دالة متصلة  $\varphi_2$  في  $R^p$  إلى  $R$  بحيث أن

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) &= -\frac{1}{3}\frac{2}{3}M, \quad x \in A_2; \quad \varphi_2(x) = \frac{1}{3}\frac{2}{3}M, \quad x \in B_2; \\ -\frac{1}{3}\frac{2}{3}M &\leq \varphi_2(x) \leq \frac{1}{3}\frac{2}{3}M, \quad x \in R^p\end{aligned}$$

بعد إجراء هذا ، نضع  $f_3 = f_2 - \varphi_2$  ونلاحظ أن  $f_3 = f - \varphi_1 - \varphi_2$  متصلة في  $D$  وأن

$$\sup \{|f_3(x)| : x \in D\} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 M$$

بالاستمرار بنفس هذه الطريقة ، نحصل على متتابعة  $(\varphi_n)$  لدوال معرفة في  $R^p$  إلى  $R$  بحيث أنه ، لكل  $n$

$$(26.5) \quad |f(x) - [\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_n(x)]| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n M$$

لكل  $x$  في  $D$  وبحيث أن

$$(26.6) \quad x \in R^p \quad \text{عند} \quad |\varphi_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} M$$

نفرض أن  $g_n$  معرفة في  $R^p$  إلى  $R$  بأنها  $g_n = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n$  ومن ثم ينتج أن  $g_n$  متصلة . نستنتج من المتباينة (٢٦ - ١) أنه إذا كانت  $m \geq n$  ، فإن  $x \in R^p$

$$|g_m(x) - g_n(x)| = |\varphi_{n+1}(x) + \dots + \varphi_m(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n M [1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots] \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} M$$

التي تثبت أن المتتابعة  $(g_n)$  تتقارب بانتظام في  $R^p$  لدالة سوف نرمز لها بالرمز  $g$  . بما أن كلا من  $g_n$  متصلة في  $R^p$  ، فينتج من نظرية ٢٤ - ١ أن  $g$  متصلة عند كل نقطة في الفراغ  $R^p$  . يلاحظ أيضاً من المتباينة (٢٥ - ١) أن  $|f(x) - g_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n M$  عند  $x \in D$  . لذلك نستنتج ، أن  $f(x) = g(x)$  عند  $x$  في  $D$  أخيراً تدل متباينة (٢٦ - ١) على أنه لأي  $x$  في الفراغ  $R^p$  يكون

$$|g_n(x)| \leq \frac{1}{3}M [1 + \frac{2}{3} + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}] \leq M$$



التي تفرض النص الأخير للنظرية وهو المطلوب إثباته .

٢٦ - ٥ نتيجة . بفرض أن  $f$  دالة متصلة محدودة معرفة في فئة جزئية مغلقة  $D$  من  $R^p$  وقيم في  $R^q$  حيث يوجد دالة متصلة  $g$  في  $R^p$  إلى  $R^q$  حيث  $g(x) = f(x)$  لأجل  $x$  في  $D$  وبحيث أن

$$\sup \{ \|g(x)\| : x \in R^p \} \leq \sqrt{q} \sup \{ \|f(x)\| : x \in D \}$$

نبرهان . هذه النتيجة قد برهنت حالا عند  $q = 1$  . في الحالة العامة ، نلاحظ أن  $f$  تعرف  $q$  من دوال الأحداثي بقيم موجبة متصلة في  $D$  ، ولتكن

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x))$$

حيث أن كلا من الدوال  $f_j$  ،  $1 \leq j \leq q$  امتداد متصل  $g_j$  في  $R^p$  إلى  $R^q$  ، فنعرف  $g$  في  $R^p$  إلى  $R^q$  بأنها  $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_q(x))$  . يلاحظ أن الدالة  $g$  لها الخواص المطلوبة . وهو المطلوب إثباته .

### تساوى الاتصال :

قد استعملنا تكراراً نظرية بولزانو - فيرشتراس ١٠ - ٦ للفئات ( التي تؤكد أن كل فئة جزئية محدودة لا نهائية للفراغ  $R^p$  نقطة تجميع ) والنظرية المناظرة ١٦ - ٤ للمتتابعات ( التي تؤكد أن كل متتابعة محدودة في  $R^p$  لها متتابعة جزئية تقاربية ) . نقدم الآن نظرية ماثلة تماماً لنظرية بولزانو - فيرشتراس باستثناء كونها تتعلق بفئات دوال متصلة وليست فئات فقط . وللاختصار والتبسيط ، سوف نقدم هنا فقط الصورة التابعة لهذه النظرية .

سنفرض فيما يلي أن  $K$  فئة جزئية مدجة ثابتة من الفراغ  $R^p$  ، وسوف نعتبر دوال متصلة في  $K$  ومداهها في  $R^q$  . وحسب نظرية ٢٢ - ٥ تكون كل دالة مثل هذه الدالة محدودة ، ومن ثم  $C_{pq}(K) = BC_{pq}(K)$  . نقول إن فئة  $\mathcal{F}$  في  $C_{pq}(K)$  محدودة ( أو محدودة بانتظام ) في  $K$  إذا كان يوجد مقدار ثابت  $M$  بحيث أن  $\|f\|_K \leq M$  ، لكل  $f$  في  $\mathcal{F}$  . من الواضح أن أي فئة محدودة  $\mathcal{F}$  للمثل هذه الدوال تكون محدودة ، لأنه إذا كان  $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  ، فيمكننا أخذ

$$M = \sup \{ \|f_1\|_K, \|f_2\|_K, \dots, \|f_n\|_K \}$$

وفي الحالة العامة ، فئة لا نهائية للدوال متصلة في  $K$  إلى  $R^q$  سوف لا تكون محدودة . مع أن متتابعة تقاربية منتظمة للدوال متصلة تكون محدودة ( تمرين ٢٦ - م ) .

إذا كانت  $f$  دالة متصلة في الفئة المدجة  $K$  للفراغ  $R^p$  ، فإن نظرية ٢٣ - ٣

تدعى أنها متصلة بانتظام . ومن ثم ، إذا كانت  $\varepsilon > 0$  فيوجد  $\delta(\varepsilon) > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $x$  و  $y$  تنتميان إلى  $K$  ،  $\|x - y\| < \delta(\varepsilon)$  ، فإن  $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$  ، طبعاً ، يمكن أن تعتمد القيمة  $\delta$  على الدالة  $f$  كما تعتمد أيضاً على  $\varepsilon$  ولذلك نكتب غالباً  $\delta(\varepsilon, f)$  عند تعاملنا مع أكثر من دالة واحدة يكون حسناً الإشارة إلى هذا الاعتماد صراحة .

نلاحظ أنه إذا كانت  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$  فئة محدودة في  $C_{pq}(K)$  فإنه بوضع

$$\delta(\varepsilon, \mathcal{F}) = \inf \{ \delta(\varepsilon, f_1), \dots, \delta(\varepsilon, f_n) \}$$

نحصل على  $\delta$  التي « تمل » لكل الدوال في هذه الفئة المحدودة .

٢٦-٦ تعريف . يقال لفئة  $\mathcal{F}$  لدوال في  $K$  إلى  $R^q$  أنها متساوية الاتصال بانتظام في  $K$  إذا كان يوجد لكل عدد حقيق  $\varepsilon > 0$  عدد  $\delta(\varepsilon) > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $x$  و  $y$  تنتميان إلى  $K$  ،  $\|x - y\| < \delta(\varepsilon)$  ،  $f$  دالة في  $\mathcal{F}$  ، فإن  $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$  .

قد اتضح أن فئة محدودة لدوال متصلة في  $K$  متساوية الاتصال . والفرض بأن متتابعة لدوال متصلة والتي تتقارب بانتظام في  $K$  تكون أيضاً متساوية الاتصال صحيح أيضاً (تمرين ٢٦-ن) .

ينتج أنه لكي تكون متتابعة في  $C_{pq}(K)$  تقارباً بانتظام في  $K$  ، يكون من الضروري أن المتتابعة تكون محدودة ومتساوية الاتصال بانتظام في  $K$  . الآن سوف نوضح أن هاتين الخاصيتين ضروريان وكافيتان لفئة  $\mathcal{F}$  في  $C_{pq}(K)$  لها الخاصية التي تقول إن لكل متتابعة لدوال من  $\mathcal{F}$  متتابعة جزئية تتقارب بانتظام في  $K$  . هذه يمكن اعتبارها كحالة عامة لنظرية فيرشتراس - بولزانو لنشأت دوال متصلة وتلعب دوراً هاماً في نظرية المعادلات الفاضلية ومعادلات التكامل .

٢٦-٧ نظرية أرثويلا - أسكولي(\*) . نفرض أن  $K$  فئة جزئية مدمجة للفراغ  $R^p$  ونفرض أن  $\mathcal{F}$  مجموعة من دوال متصلة في  $K$  ولها قيم في الفراغ  $R^q$  . فإن الخواص الآتية تكون متكافئة :

(أ) العائلة  $\mathcal{F}$  محدودة ومتساوية الاتصال بانتظام في  $K$

(\*) سيزار أرثويلا (١٨٤٧ - ١٩١٢) كان أستاذاً في بولندا . أعطى الشروط الضرورية والكافية لكي تكون نهاية متتابعة لدوال متصلة في فترة مغلقة متصلة ، ودرس موضوعات مرتبطة بها .

جيوليو أسكولي (١٨٤٣ - ١٨٩٦) ، كان أستاذاً في ميلانو ، صاغ التعريف لتساوي الاتصال في وضع هندسي . وله إسهام لتسلسلة فوريير .

(ب) لكل متتابعة من  $\mathcal{F}$  متتابعة جزئية تقاربية بانتظام في  $K$  .

البرهان . سوف نوضح أولاً أنه إذا كان شرط (أ) غير صحيح ، أيضاً فإن الشرط (ب) يكون أيضاً غير صحيح . إذا كانت  $\mathcal{F}$  غير محدودة ، فتوجد متتابعة  $(f_n)$  في  $\mathcal{F}$  بحيث أن  $\|f_n\|_K \geq n$  عند  $n \in \mathbb{N}$  . لكن حينئذ لا يمكن للمتتابعة الجزئية للمتتابعة  $(f_n)$  أن تكون تقاربية منتظمة . أيضاً إذا كانت الفئة  $\mathcal{F}$  ليست متساوية الاتصال بانتظام ، فإنه توجد عند بعض  $\varepsilon_0 > 0$  (لماذا ؟) متتابعة  $(f_n)$  في  $\mathcal{F}$  ومتتابعات  $(x_n)$  ،  $(y_n)$  في  $K$  عند  $\|x_n - y_n\| < 1/n$  لكن بحيث أن  $\|f_n(x_n) - f_n(y_n)\| > \varepsilon_0$  . لكن حينئذ لا يمكن للمتتابعة جزئية للمتتابعة  $(f_n)$  أن تتقارب بانتظام في  $K$  .

الآن سنوضح أنه ، إذا كانت الفئة  $\mathcal{F}$  تحقق (أ) ، فإنه بأخذ أى متتابعة  $(f_n)$  في  $\mathcal{F}$  توجد متتابعة جزئية تتقارب بانتظام في  $K$  . لإجراء هذا نلاحظ أنه ينتج من تمرين ١٠ - ح وجود فئة  $C$  معدودة . في  $K$  بحيث أنه إذا كانت  $y \in K$  ،  $\varepsilon > 0$  ، فيوجد عنصر  $x$  في  $C$  بحيث أن  $\|x - y\| < \varepsilon$  إذا كانت  $C = \{x_1, x_2, \dots\}$  فإن المتتابعة  $(f_n(x_1))$  معدودة في  $\mathbb{R}^q$  وينتج من نظرية بولتزانو - فيرشتراس ١٦ - ٤ أنه توجد متتابعة جزئية تقاربية .

$$(f_1^1(x_1), f_2^1(x_1), \dots, f_n^1(x_1), \dots)$$

للمتتابعة  $(f_n(x_1))$  بعد ذلك نلاحظ أن المتتابعة  $(f_k^1(x_2): k \in \mathbb{N})$  معدودة في  $\mathbb{R}^q$  ، ومن ثم يكون لها متتابعة جزئية .

$$(f_1^2(x_2), f_2^2(x_2), \dots, f_n^2(x_2), \dots)$$

والتي تتقارب . مرة أخرى ، المتتابعة  $(f_n^2(x_3): n \in \mathbb{N})$  معدودة في  $\mathbb{R}^q$  ، لذلك تكون متتابعة جزئية ما

$$(f_1^3(x_3), f_2^3(x_3), \dots, f_n^3(x_3), \dots)$$

تقاربية . نستمر في هذا الطريق وبعد ذلك نضع  $g_n = f_n^n$  بحيث أن  $g_n$  هي الدالة النونية في المتتابعة الجزئية النونية . من الواضح أنه من التركيب تكون المتتابعة  $(g_n)$  تقاربية عند كل نقطة للفئة  $C$  .

سنبرهن الآن أن المتتابعة  $(g_n)$  تتقارب عند كل نقطة من  $K$  وأن التقارب يكون منتظماً . لإجراء هذا ، نفرض أن  $\varepsilon > 0$  ، ونفرض أن  $\delta(\varepsilon)$  معرفة كما في ٢٦ - ٦ . نفرض أن  $C_1 = \{y_1, \dots, y_k\}$  فئة جزئية محدودة للفئة  $C$  بحيث أن كل نقطة في  $K$  تكون داخل  $\delta(\varepsilon)$  لنقطة ما في  $C_1$  . بما أن المتتابعات

$$(g_n(y_1)), (g_n(y_2)), \dots, (g_n(y_k))$$

تقارب ، فيوجد عدد طبيعي  $M$  بحيث أنه إذا كانت  $m, n \geq M$  فإن

$$i = 1, 2, \dots, k \quad \text{عند} \quad \|g_m(y_i) - g_n(y_i)\| < \varepsilon$$

بأخذ  $x \in K$  ، يوجد  $y_i \in C_1$  بحيث أن  $\|x - y_i\| < \delta(\varepsilon)$  . ومن ثم نجد من تساوى الاتصال المنتظم أن  $\|g_n(x) - g_n(y_i)\| < \varepsilon$  لكل  $n \in N$  . بوجه خاص ، هذه المتباينة تظل قائمة عند  $n \geq M$  . لذلك ، نجد أن

$$\begin{aligned} \|g_n(x) - g_m(x)\| &\leq \|g_n(x) - g_n(y_i)\| + \|g_n(y_i) - g_m(y_i)\| \\ &\quad + \|g_m(y_i) - g_m(x)\| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \end{aligned}$$

على شرط  $m, n \geq M$  . هذا يوضح أن

$$m, n \geq M \quad \text{عند} \quad \|g_n - g_m\|_K \leq 3\varepsilon$$

وإذن ينتج التقارب المنتظم للمتباينة  $(g_n)$  في  $K$  من معيار كوشي للتقارب المنتظم ، المعطى في ١٧ - ١١ وهو المطلوب إثباته .

ركبنا في البرهان هذه النتيجة ، متباينة لمتباينات جزئية لدوال وبعد ذلك اخترنا متباينة القطر  $(g_n)$  ، حيث  $g_n = f_n$  . يسمى غالباً مثل هذا التركيب « عملية قطرية » أو « طريقة كانتور النظرية » وهي مفيدة باستمرار . يجب على القارئ أن يتذكر أنه قد استعمل نموذج مشابه من المبادلة والبحث في باب ٣ لبرهنة أن الأعداد الحقيقية لا تكون فئة قابلة للسد .

## تموينات :

٢٦ - (أ) وضح أن شرط (أ) من نظرية ٢٦ - ١ يكافئ للشرط : (أ) إذا كانت  $f$  تنتمي إلى  $\mathcal{L}$  فإن  $|f|$  تنتمي إلى  $\mathcal{L}$  .

٢٦ - (ب) أثبت أن كل دالة حقيقية القيمة ومتصلة في الفترة  $[0, \pi]$  تكون النهاية المنتظمة للمتباينة « لكثيرات الحدود في  $\cos x$  » ( أى أنه ، لدوال  $(P_n)$  ، حيث  $P_n(x) = p_n(\cos x)$  عند كثيرة حدود ما  $P_n$  ) .

٢٦ - (ج) وضح أن كل دالة حقيقية القيمة ومتصلة في  $[0, \pi]$  هي النهاية المنتظمة لمتباينة الدوال على الصورة .

$$x \mapsto a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx$$

٢٦ - (د) وضح لماذا تفشل النتيجة في تمرين ٢٦ - ب إذا استبدلنا  $\cos kx$  بالمقدار  $\sin kx$  ،  $k \in N$  .

٢٦ - (هـ) استخدم تمرين ٢٦ - ج لإثبات أن كل دالة حقيقية القيمة متصلة  $f$  في  $[0, \pi]$  ، حيث  $f(0) = f(\pi)$  تكون النهاية المنتظمة لمتباينة دوال على الصورة

$$x \mapsto b_0 + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_n \sin nx$$

٢٦ - (و) استخدم تمرين ٢٦-ج ، ٢٦-هـ لتوضيح أن كل دالة حقيقية القيمة متصلة  $f$  في  $[-\pi, \pi]$  ، حيث  $f(-\pi) = f(\pi)$  من النهاية المنتظمة لمتتابعة دوال على الصورة .

$$x \mapsto a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

[ إرشاد : انقسم  $f$  : إلى حاصل الجمع  $f = f_e + f_o$  لدالة زوجية  $f_e(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$  ودالة فردية  $f_o(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$  .

٢٦ - (ز) أعط برهانا للتمرين السابق متوقفا على استخدام نظرية ٢٦-٣ لدائرة الواحدة  $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  وملاحظة أنه يوجد تناظر أحادي بين دوال متصلة في  $T$  إلى  $\mathbb{R}$  ودوال متصلة في  $[-\pi, \pi]$  إلى  $\mathbb{R}$  بحيث تحقق العلاقة  $f(-\pi) = f(\pi)$  .

٢٦ - (ح) بفرض  $J \subseteq \mathbb{R}$  فترة مدمجة وبفرض أن  $\mathcal{H}$  هي مجموعة من دوال متصلة في  $J \rightarrow \mathbb{R}$  بحيث تحقق خواص نظرية ستون - فيرشراس ٢٦-٢ . أثبت أن أي دالة متصلة في  $J \times J$  (في  $\mathbb{R}^2$ ) إلى  $\mathbb{R}$  يمكن تقريبها بانتظام بدوال على الصورة .

$$f_1(x)g_1(y) + \dots + f_n(x)g_n(y)$$

حيث  $f_i, g_i$  تنتميان إلى  $\mathcal{H}$  .

٢٦ - (ط) اثبت أن نظرية تيتز ٢٦-٤ ربما تفشل إذا كان النطاق ليس مغلقاً .

٢٦ - (ي) استخدم نظرية تيتز ٢٦-٤ لتوضح أنه إذا كانت  $D \subseteq \mathbb{R}^p$  مغلفة وإذا كانت  $f$  دالة متصلة غير محدودة في  $D \rightarrow \mathbb{R}$  ، فإنه يوجد امتداد متصل للدالة  $f$  لكل الفراغ  $\mathbb{R}^p$  (إرشاد : اعتبر التركيب  $\phi \circ f$  ، حيث  $\phi(x) = \text{Arc tan } x$  أو  $\phi(x) = x/(1+x)$  )

٢٦ - (ك) بفرض  $\mathcal{F}$  مجموعة من دوال في  $D \subseteq \mathbb{R}^p$  إلى  $\mathbb{R}^q$  . اعتبر الخاصية عند النقطة  $c \in D$  : التي تقول إنه إذا كانت  $\varepsilon > 0$  فيوجد  $\delta(c, \varepsilon) > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $x \in D$  ،  $\|x - c\| < \delta(c, \varepsilon)$  فإن  $\|f(x) - f(c)\| < \varepsilon$  لكل  $f \in \mathcal{F}$  . وضع أن للمجموعة  $\mathcal{F}$  هذه الخاصية عند  $c \in D$  إذا وإذا فقط كانت كل متتابعة  $(x_n)$  في  $D$  عند  $c = \lim(x_n)$  ، تحقق  $f(c) = \lim(f(x_n))$  بانتظام عند  $f \in \mathcal{F}$  . (أحياناً نقول إن  $\mathcal{F}$  متساوية الاتصال عند  $c \in D$  عندما تتحقق هذه الخاصية) .

٢٦ - (ل) بفرض أن  $\mathcal{F}$  كما في تمرين ٢٦-ك . وإذا كانت  $D$  مدمجة وتحققت الخاصية المذكورة في تمرين ٢٦-ك لكل  $c \in D$  ، اثبت أن  $\mathcal{F}$  متساوية الاتصال بانتظام بمفهوم تعريف ٢٦-٦ .

٢٦ - (م) إذا كانت  $K \subseteq \mathbb{R}^p$  مدمجة ،  $(f_n)$  متتابعة للدوال متصلة في  $K$  إلى  $\mathbb{R}^q$

ومتقاربة بانتظام في  $K$  ، اثبت أن العائلة  $\{f_n\}$  محدودة في  $K$  ( بمعنى أنه يوجد  $M > 0$  بحيث أن  $\|f_n(x)\| \leq M$  لكل  $x \in K, n \in \mathbb{N}$  ) أو  $\|f_n\|_K \leq M$  لكل  $n \in \mathbb{N}$  .

٢٦ - ( ن ) إذا كانت  $K \subseteq \mathbb{R}^p$  مدجة ، وكانت  $(f_n)$  متتابة لدوال متصلة في  $K$  إلى  $\mathbb{R}^q$  ومتقاربة بانتظام في  $K$  ، وضح أن العائلة  $\{f_n\}$  متساوية الاتصال في  $K$  بمعنى تعريف ٢٦ - ٦ .

٢٦ - ( س ) بفرض أن  $\mathcal{F}$  مجموعة محدودة متساوية الاتصال بانتظام لدوال في  $D \subseteq \mathbb{R}^p$  إلى  $\mathbb{R}$  وبفرض  $f^*$  معرفة في  $D \rightarrow \mathbb{R}$  بأنها

$$f^*(x) = \sup \{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$$

وضح أن  $f^*$  متصلة في  $D$  إلى  $\mathbb{R}$  .

٢٦ - ( ع ) وضح أن الاستنتاج للتمرين السابق ربما يفشل إذا لم يفترض أن  $\mathcal{F}$  متساوية الاتصال بانتظام .

٢٦ - ( ف ) اعتبر المتتابعات الآتية لدوال التي توضح أن نظرية أرثزبلا أسكولي ٢٦ - ٧ ربما تفشل إذا أسقطت الفروض المختلفة .

$$(أ) \quad f_n(x) = x + n \quad \text{عند} \quad x \in [0, 1]$$

$$(ب) \quad f_n(x) = x^n \quad \text{عند} \quad x \in [0, 1]$$

$$(ج) \quad f_n(x) = \frac{1}{1 + (x - n)^2} \quad \text{عند} \quad x \in [0, +\infty)$$

٢٦ - ( ص ) بفرض أن  $(f_n)$  متتابة لدوال متصلة في  $\mathbb{R}$  إلى  $\mathbb{R}^q$  بحيث تتقارب عند كل نقطة من الفئة  $\mathcal{Q}$  لأعداد قياسية وإذا كانت  $\{f_n\}$  متساوية الاتصال بانتظام في  $\mathbb{R}$  ، وضح أن المتتابة تتقارب عند كل نقطة للفراغ  $\mathbb{R}$  وأن التقارب يكون منتظماً عند كل فئة مدجة من الفراغ  $\mathbb{R}$  ، لكن ليس ضرورياً أن يكون منتظماً في  $\mathbb{R}$  .

## دوال المتغير واحد

سنبدأ الآن بدراسة تفاضل وتكامل الدوال . ولإجراء هذا سيكون من المناسب دراسة الحالة لدوال متغير واحد أولاً ، سنعود في الفصلين السابع والثامن لدراسة دوال المتغيرات متعددة . وبمقارنة هذين البابين ، سيتضح أن الحالة لدوال المتغيرات المتعددة تشابه تماماً الملخص الذي سنمليه هنا ، لكن تظهر تعقيدات معينة . وبالإضافة إلى ذلك ، سيثبت أن النظرية العامة تعتمد في استنتاجها على نتائج حالة المتغير الواحد ، فيكون من المناسب الحصول على دراسة هذه الحالة قبل دراسة الحالة العامة .

أدخلنا في البابين ٢٧ ، ٢٨ المشتقة لدالة معرفة في فترة حقيقية ونثبت نظرية القيمة المتوسطة الهامة وبعض نتائجها . في باب ٢٩ سنقدم التعريف لتكامل ريمان ( وريمان - اشتيلجز ) لدوال محدودة في فترة  $[a, b]$  . سنعطى الخواص الأساسية للتكامل في هذا الباب وفي بابي ٣٠ ، ٣١ . بينما نناقش في البابين الأخيرين ، التكاملات « غير المحدودة » والتكاملات اللانهائية . بالرغم من أن نتائج هذه الأبواب تستخدم بدرجة قليلة جداً في الأجزاء الآتية من هذا الكتاب ، فإنها هامة لتطبيقات كثيرة .

### الباب السابع والعشرون — نظرية القيمة المتوسطة :

بما أنه من المفروض أن القارئ يكون ملماً من قبل بالعلاقة بين مشتقة دالة في  $R$  إلى  $R$  وميل رسمها البياني ، وبمفهوم معدل التغير اللحظي ، فستركز اهتمامنا كلية على الوجهات الرياضية للمشتقة ولا نذهب إلى تطبيقاتها في الفيزياء ، الاقتصاديات إلى آخره . في هذا الباب والباب الآتي سنعتبر دالة نطاقها  $D$  ومداها محتوى في الفراغ  $R$  . وبالرغم من اهتمامنا في الابتداء بالمشتقة عند نقطة داخلية ، فسوف نعرف المشتقة بتعريف أكثر تعمياً قليلاً بحيث يمكن اعتبار نقطة نهائية لفترة ، مثلاً ، لكن ، نحتاج إلى كون النقطة التي تعرف المشتقة عندها نقطة تجميع للنطاق  $D$  وتنتمي إلى  $D$  .

٢٧-١ تعريف . إذا كانت  $c$  نقطة تجميع للنطاق  $D$  وتنتمي إلى  $D$  ، فنقول أن العدد الحقيقي  $L$  هو المشتقة للدالة  $f$  عند النقطة  $c$  إذا كان يوجد لكل عدد  $\varepsilon > 0$  عدد  $\delta(\varepsilon) > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $x$  تنتمي إلى  $D$  وإذا كانت  $0 < |x-c| < \delta(\varepsilon)$  ، فإن

$$(27.1) \quad \left| \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - L \right| < \varepsilon$$

في هذه الحالة نرمز إلى  $f'(c)$  بالرمز  $L$  .

وتبادلياً ، يمكننا تعريف  $f'(c)$  بأنها النهاية

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \quad (x \in D, x \neq c)$$

من الملاحظ أنه إذا كانت  $c$  نقطة داخلية من النطاق  $D$  ، فتمتص في (٢٧-١) النقط  $x$  الموجودة في كل من يسار ويمين النقطة  $c$  . ومن الناحية المقابلة ، إذا كانت  $D$  فترة ،  $c$  هي النقطة الطرفية اليسرى للفترة  $D$  ، فإنه يمكننا في علاقة (٢٧-١) أخذ  $x$  على يمين النقطة  $c$  فقط .

طالما وجدت المشتقة للدالة  $f$  عند النقطة  $c$  ، ف نرمز لقيمتها بالرمز  $f'(c)$  . نحصل بهذه الطريقة على دالة  $f'$  نطاقها فئة جزئية من النطاق للدالة  $f$  . نوضح الآن أن اتصال الدالة  $f$  عند  $c$  هو شرط ضروري لوجود المشتقة عند  $c$  .

٢٧-٢ مفترض . إذا كانت الدالة  $f$  مشتقة عند  $c$  ، فإن  $f$  تكون متصلة هناك .

البرهان . نفرض  $\varepsilon = 1$  وبأخذ  $\delta = \delta(1)$  بحيث أن

$$\left| \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c) \right| < 1$$

لكل  $x \in D$  وتحقق  $0 < |x-c| < \delta$  . من متباينة المثلث ، نستنتج أنه لهذه القيم للمنصر  $x$  يكون

$$|f(x)-f(c)| \leq |x-c| \{ |f'(c)| + 1 \}$$

الطرف الأيسر لهذا التعبير يمكن جمعه أقل من  $\varepsilon$  إذا أخذنا  $x$  في  $D$  بحيث :

$$|x-c| < \inf \{ \delta, \varepsilon / (|f'(c)| + 1) \}$$

وهو المطلوب إثباته

من السهل ملاحظة أن الاتصال عند النقطة  $c$  ليس شرطاً كافياً لوجود المشتقة عند  $c$  . مثال ذلك ، إذا كانت  $D = \mathbb{R}$  و  $f(x) = |x|$  ، فإن  $f$  تكون متصلة عند



كل نقطة الفراغ  $R$  لكن يكون لها مشتقة عند نقطة  $c$  إذا وإذا فقط كانت  $c \neq 0$  .  
 بأخذ توافق بسيطة جبرية ، يكون من السهل تركيب دوال متصلة ليس لها مشتقة عند  
 عدد محدود من نقط أو حتى عند عدد يمكن حسابه من نقط . في ١٨٧٢ ، هزفريشتراس  
 عالم الرياضيات بإعطائه مثالا لدالة متصلة عند أي نقطة لكن لا توجد مشتقة لها في أي مكان .  
 (في الحقيقة ، الدالة المعرفة بالتسلسلة

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(3^n x)$$

يمكن البرهنة على أن لها هذه الخاصية . سوف لا نتعمق في التفاصيل ، لكن نحيل القارئ  
 إلى كتب تشهارش وبوز لتفاصيل ومراجع أكثر) .

٢٧-٣ مفترض . (أ) إذا كانت  $f$  لها مشتقة عند  $c$  ،  $f'(c) > 0$  ، فيوجد  
 عدد  $\delta > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $x \in D$  ،  $c - \delta < x < c + \delta$  ، فإن  $f(c) < f(x)$   
 (ب) إذا كانت  $f'(c) < 0$  ، فيوجد عدد  $\delta > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $x \in D$   
 و  $c - \delta < x < c$  ، فإن  $f(c) < f(x)$  .

البرهان . (أ) نفرض أن  $\varepsilon_0$  مختارة بحيث أن  $0 < \varepsilon_0 < f'(c)$  ونفرض أن  
 $\delta = \delta(\varepsilon_0)$  تناظر  $\varepsilon_0$  كما في تعريف ٢٧-١ . إذا كانت  $x \in D$  ،  $c - \delta < x < c + \delta$  ،  
 فنحصل على

$$-\varepsilon_0 < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c)$$

بما أن  $x - c > 0$  ، فإن هذه العلاقة تدل على أن

$$0 < (f'(c) - \varepsilon_0)(x - c) < f(x) - f(c)$$

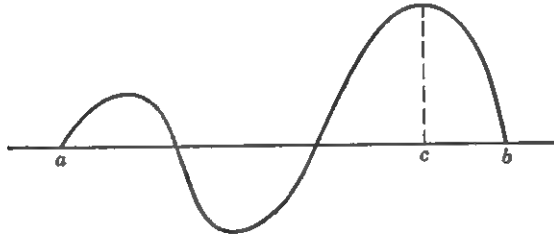
التي تثبت النص الموجود في (أ) . يكون برهان (ب) مشابها . وهو المطلوب إثباته

نتذكر أن الدالة  $f$  يقال إن لها نهاية عظمى نسبية عند نقطة  $c$  في  $D$  إذا كانت توجد  
 $\delta > 0$  بحيث أن  $f(x) \leq f(c)$  عند  $x \in D$  تحقق  $|x - c| < \delta$  . يستخدم  
 تعريف مشابه للمصطلح نهاية صغرى نسبية . تمدنا النتيجة الآتية بتعميل نظري للطريقة  
 المألوفة لإيجاد نقط عندها يكون للدالة  $f$  نهاية عظمى نسبية ونهاية صغرى نسبية وذلك  
 باختيار الأعداد للمشتقة . من الملاحظ أن هذه العملية تستخدم فقط للنقط الداخلية  
 للفترة . وفي الحقيقة ، إذا كانت  $f(x) = x$  في  $D = [0, 1]$  ، فإن النقطة الطرفية  
 $x = 0$  تنتج النهاية الصغرى النسبية الوحيدة والنقطة الطرفية  $x = 1$  تنتج النهاية العظمى  
 النسبية الوحيدة للدالة  $f$  ، لكن أيا منهما ليس جذراً للمشتقة . التبسيط ، سنثبت هذه النتيجة

فقط عند النهاية العظمى النسبية ، تاركين صياغة النتيجة المناظرة عند النهاية الصغرى النسبية للقارى .

٢٧-٤ نظرية النهاية العظمى الداخلية . نفرض أن  $c$  هي نقطة داخلية في  $D$  وإلى عندها  $f$  لها نهاية عظمى نسبية . إذا كانت المشتقة لدالة  $f$  عند  $c$  موجودة ، فيجب أن تكون مساوية للصفر .

البرهان . إذا كانت  $f'(c) > 0$  ، فنمفرض ٢٧-٣ (أ) نجد أنه توجد  $\delta > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $c < x < c + \delta$  ،  $x \in D$  ، فإن  $f(c) < f(x)$  . هذا يخالف الفرض بأن  $f$  نهاية عظمى نسبية عند  $c$  . إذا كانت  $f'(c) < 0$  ، فنستعمل مفترض ٢٧-٣ (ب) . وهو المطلوب إثباته .



(شكل ٢٧-١)

٢٧-٥ نظرية رول(\*) . نفرض أن  $f$  دالة متصلة في فترة مغلقة  $J = [a, b]$  ، أن المشتقة  $f'$  موجودة في الفترة المفتوحة  $(a, b)$  ، وأن  $f(a) = f(b) = 0$  ، إذن توجد نقطة  $c$  في  $(a, b)$  بحيث أن  $f'(c) = 0$  .

البرهان . إذا كانت  $f$  تنعدم تطابقاً في  $J$  ، فيمكننا أخذ  $c = (a+b)/2$  ومن ثم نفرض أن  $f$  لا تنعدم تطابقاً ، فاستبدال  $f$  بالمقدار  $-f$  ، عند الضرورة ، يمكن الفرض بأن  $f$  تأخذ بعض قيم موجبة . حسب نظرية القيمة العظمى ٢٢-٧ ، تبلغ الدالة  $f$  القيمة  $\sup\{f(x): x \in J\}$  عند نقطة ما  $c$  للفترة  $J$  . بما أن  $f(a) = f(b) = 0$  ، فإن النقطة  $c$  تحقق  $a < c < b$  . وحيث أن  $f'(c) = 0$  موجودة من الفرض ولها نقطة نهاية عظمى نسبية عند  $c$  ، فإن نظرية النهاية العظمى الداخلية تدل على أن  $f'(c) = 0$  .

وهو المطلوب إثباته

نحصل على نظرية القيمة المتوسطة الأساسية جداً . كنتيجة لنظرية رول .

(\*) تنسب هذه النظرية غالباً لميشيل رول ( ١٦٥٢ - ١٧١٩ ) عضو الاكاديمية الفرنسية، وله اسهامات في الهندسة التحليلية والبحث المبكر المؤدى الى التفاضل والتكامل .

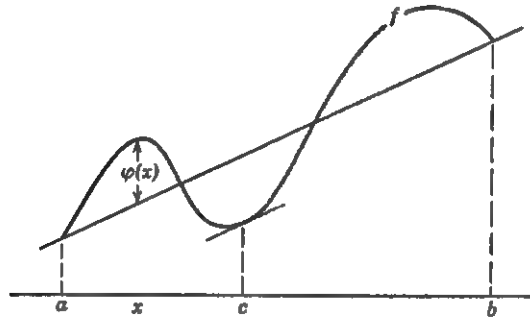
٢٧-٩ نظرية القيمة المتوسطة . نفرض أن  $f$  متصلة في فترة مغلقة  $J = [a, b]$  ولها مشتقة في فترة مفتوحة  $(a, b)$  . إذن توجد نقطة  $c$  في  $(a, b)$  بحيث أن

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

البرهان . نعتبر الدالة  $\varphi$  المعرفة في  $J$  بأنها

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

( من السهل ملاحظة أن  $\varphi$  هي الفرق بين الدالة  $f$  والدالة التي رسمها البياني يتكون من جزء الخط المستقيم المار بالنقطتين  $(a, f(a))$  ،  $(b, f(b))$  ، انظر شكل ٢٧ - ٢ ) .  
ينتج من الفروض أن  $\varphi$  متصلة في  $J = [a, b]$  ويمكن بسهولة تحقيق أن  $\varphi$  لها مشتقة في  $(a, b)$  وبالإضافة إلى ذلك نجد أن  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$  . باستخدام نظرية رول .



( شكل ٢٧ - ٢ نظرية القيمة المتوسطة )

توجد نقطة  $c$  داخل  $J$  بحيث أن

$$0 = \varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

وهو المطلوب إثباته

نتج النتيجة منها

٢٧-٧ نتيجة . إذا كانت الدالة  $f$  مشتقة في  $J = [a, b]$  ، فتوجد نقطة  $c$  في  $(a, b)$  بحيث أن

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

يكون من المناسب أحياناً وجود ترجمة أكثر تعميماً لنظرية القيمة المتوسطة التي تشمل دالتين .

٢٧-٨ نظرية كوشي للقيمة المتوسطة . نفرض أن  $f$  و  $g$  دالتان متصلتان في  $J = [a, b]$  ولهما مشتقتان في داخل  $(a, b)$  . إذن توجد نقطة  $c$  في  $(a, b)$  بحيث أن

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)]$$

البرهان . عند  $g(b) = g(a)$  تنتج النتيجة في الحال إذا أخذنا  $c$  بحيث أن  $g'(c) = 0$  . إذا كانت  $g(b) \neq g(a)$  اعتبر الدالة  $\varphi$  المعرفة في  $J$  بأنها

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(x) - g(a)]$$

وتنطبق نظرية رول على  $\varphi$  ، نحصل على النتيجة المطلوبة . وهو المطلوب إثباته

بالرغم أن المشتقة لدالة لا تحتاج إلى كونها متصلة ، فتوجد نظرية أولية لكن مدهشة ترجع إلى داربوكس(\*) وتنص على أن المشتقة  $f'$  تصل إلى كل قيمة بين  $f'(a)$  ،  $f'(b)$  في الفترة  $[a, b]$  . (انظر تمرين ٢٧-ح)

من السهل تذكر النص لنظرية القيمة المتوسطة برسم أشكال توضيحية مناسبة . في الوقت الذي يجب أن يكون هذا مشجعاً فإنه يميل للإيماء بأن أهميتها هندسية بطبيعتها الأمر الذي يجعلها مضللة تماماً . نظرية القيمة المتوسطة في الحقيقة ذئب في ثوب حمل وهي النظرية الأساسية لحساب التفاضل . نختم هذا الباب بنتائج أولية قليلة لهذه النتيجة . وستعطي نتائج أكثر في الباب القادم ، وستظهر نتائج أخرى فيما بعد .

٢٧-٩ نظرية . نفرض أن  $f$  متصلة في  $J = [a, b]$  وأن مشتقتها موجودة في  $(a, b)$  :

- (i) إذا كانت  $f'(x) = 0$  عند  $a < x < b$  ، لتكون  $f$  ثابتة في  $J$  .
- (ii) إذا كانت  $f'(x) = g'(x)$  عند  $a < x < b$  فإن  $f$  ،  $g$  يختلفان في  $J$  بمقدار ثابت .
- (iii) إذا كانت  $f'(x) \geq 0$  عند  $a < x < b$  وإذا كانت  $x_1 \leq x_2$  تنتمي إلى  $J$  ، حيث  $f(x_1) \leq f(x_2)$  .
- (iv) إذا كانت  $f'(x) > 0$  عند  $a < x < b$  وإذا كانت  $x_1 < x_2$  تنتمي إلى  $J$  ، فإن  $f(x_1) < f(x_2)$  .
- (v) إذا كانت  $f'(x) \geq 0$  عند  $a < x < a + \delta$  ، فإن  $a$  هي نقطة النهاية الصغرى النسبية للدالة  $f$  .

(\*) جاستن داربوكس ( ١٨٤٢ - ١٩١٧ ) كان تلميذاً هرميت ، واستاذاً بكلية غرنا . مع أنه معروف في الابتداء كعالم في الهندسة ، فقد أعطى مساهمات هامة في التحليل أيضا .

(vi) إذا كانت  $f'(x) \geq 0$  عند  $b - \delta < x < b$  ، فإن  $b$  هي نقطة النهاية المظني النسبية للدالة  $f$  .

(vii) إذا كانت  $|f'(x)| \leq M$  عند  $a < x < b$  ، فإن  $f$  تحقق شرط ليبشز :  
 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M |x_1 - x_2|$  عند  $x_1, x_2$  في  $J$  .  
 نترك البرهان للقارئ .

## تمارين :

٢٧ - (أ) باستخدام التعريف ، واحسب المشتقة (إن وجدت) للدوال المعطاة بالتعبيرات :

$x \in \mathbb{R}$	عند	$f(x) = x^4$	(أ)
$x \in \mathbb{R}$	عند	$g(x) = x^n$	(ب)
$x \geq 0$	عند	$h(x) = \sqrt{x}$	(ج)
$x \neq 0$	عند	$F(x) = 1/x$	(د)
$x \in \mathbb{R}$	عند	$G(x) =  x $	(هـ)
$x \neq 0$	عند	$H(x) = 1/x^2$	(و)

٢٧ - (ب) إذا كانت  $f$  ،  $g$  دالتين قيمتهما حقيقية ومعرفتين في فترة  $J$  ، وإذا كانتا قابلتين للتفاضل عند نقطة  $c$  ، أثبت حاصل ضربهما  $h$  ، المعروف بأنه  $h(x) = f(x)g(x)$  ، عند  $x \in J$  ، يكون قابلاً للتفاضل عند  $c$  وأن

$$h'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$$

٢٧ - (ج) وضع أن الدالة المعرفة عند  $x \neq 0$  بأنها

$$f(x) = \sin(1/x)$$

تكون قابلة للتفاضل عند كل عدد حقيقي غير الصفر . وضع أن مشتقتها ليست محدودة في جوار  $x = 0$  . ( يمكن استخدام مطابقات مثلثية ، والاتصال للدوال الجيب ودوال جيب التمام ، والملاقة الأولية للنهاية  $(\sin u)/u \rightarrow 1$  عندما  $u \rightarrow 0$  ) .

٢٧ - (د) وضع أن الدالة المعرفة بأنها

$$g(x) = x^2 \sin(1/x), \quad x \neq 0$$

$$= 0, \quad x = 0$$

تكون قابلة للتفاضل لجميع الأعداد الحقيقية ، لكن  $g'$  ليست متصلة عند  $x = 0$  .

٢٧ - (هـ) أثبت أن الدالة  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  المعرفة بأنها  $h(x) = x^2$  عند  $x \in \mathbb{Q}$  ،

$h(x) = 0$  عند  $x \notin Q$  متصلة عند نقطة واحدة تماماً . هل هي قابلة للتفاضل هناك .

٢٧- (و) بفرض أن  $c \in D$  نقطة تجمع من  $D$  وبفرض أن  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  .  
وضح أن  $f'(c)$  موجودة إذا وإذا فقط كانت ككل متتابعة  $(x_n)$  في  $D$  حيث  $x_n \neq c$  عند  $n \in \mathbb{N}$  بحيث أن  $\lim(x_n) = c$  ، النهاية للمتتابعة

$$\left( \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} \right)$$

موجودة في هذه الحالة النهاية لكل مثل هذه المتتابعات تكون مساوية إلى  $f'(c)$  .

٢٧- (ز) إذا كانت  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  قابلة للتفاضل عند  $c \in D$  وإذا كانت  $c + 1/n \in D$  لكل  $n \in \mathbb{N}$  ، وضح أن

$$f'(c) = \lim (n\{f(c + 1/n) - f(c)\})$$

لكن وضح أن وجود النهاية لهذه المتتابعة لا يضمن وجود المشتقة .

٢٧- (ح) (داربوكس) إذا كانت  $f$  قابلة للتفاضل في  $[a, b]$  ، وإذا كانت  $f'(a) = A$  ،  $f'(b) = B$  ، وإذا كانت  $C$  تقع بين  $A$  و  $B$  ، فإنه توجد نقطة  $C$  في  $(a, b)$  عندها  $f'(c) = C$  (إرشاد : اعتبر الحد الأدنى للدالة

$$g(x) = f(x) - C(x - a)$$

٢٧- (ط) إذا كانت  $g(x) = 0$  عند  $x < 0$  ،  $g(x) = 1$  عند  $x \geq 0$  ،  
أثبت أنه لا توجد دالة  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  بحيث أن  $f'(x) = g(x)$  لكل  $x \in \mathbb{R}$  .

٢٧- (ي) اعط مثالا لدالة متصلة ذات نهاية عظمى نسبية وحيدة لكن لا توجد المشتقة عند هذه النقطة .

٢٧- (ك) اعط مثالا لدالة متصلة بانتظام وقابلة للتفاضل في  $(0, 1)$  لكن بحيث أن مشتقتها غير محدودة في  $(0, 1)$  .

٢٧- (ل) بفرض أن  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  قابلة للتفاضل عند  $c \in [a, b]$  . وضح أنه إذا كان يوجد لكل  $\varepsilon > 0$  ،  $\delta(\varepsilon) > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $0 < |x - y| < \delta(\varepsilon)$  ،  
 $a \leq x \leq c \leq y \leq b$

فإن

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(c) \right| < \varepsilon$$

٢٧- (م) بفرض  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  قابلة للتفاضل في  $[a, b]$  . وضح أن  $f'$

تكون متصلة في  $[a, b]$  إذا وإذا فقط كان يوجد لكل  $\varepsilon > 0$  ،  $\delta(\varepsilon) > 0$  بحيث  
أنه إذا كانت  $0 < |x - y| < \delta(\varepsilon)$  ،  $x, y \in [a, b]$  فإن

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(x) \right| < \varepsilon$$

٢٧- (ن) بفرض  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  متصلة في  $[a, b]$  وقابلة للتفاضل في  $(a, b)$   
وإذا كانت  $\lim_a f'(x) = A$  ، اثبت أن  $f'(a)$  موجودة ومساوية  $A$  .

٢٧- (س) إذا كانت  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ، وكانت  $f'(a)$  موجودة ، وضح أن

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

مع ذلك ، اعط مثالا لتوضح أن وجود هذه النهاية لا يضمن وجود المشتقة .

٢٧- (ع) يقال لدالة  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  أنها زوجية إذا كانت  $f(-x) = f(x)$  لكل  $x \in \mathbb{R}$  ، وأنها فردية إذا كانت  $f(-x) = -f(x)$  لكل  $x \in \mathbb{R}$  . إذا كانت  $f$  قابلة للتفاضل في  $\mathbb{R}$  وزوجية (أو فردية على الترتيب) ، اثبت أن  $f'$  تكون فردية (أو زوجية على الترتيب) .

٢٧- (ف) بفرض أن  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  ،  $c \in (a, b)$  ، نضع  $f(c+) = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$  (النهاية للطرف الأيمن للدالة  $f$  عند  $c$ ) . إذا كانت نهاية الطرف الأيمن

$$A = \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} \frac{f(x) - f(c+)}{x - c}$$

موجودة في  $\mathbb{R}$  ، فإننا نقول أن  $f$  لها مشتقة طرف أيمن عند  $c$  ونرمز إلى  $A$  بالرمز  $f'_+(c)$  بالمثل لمشتقة الطرف الأيسر .

وضح أنه إذا كانت  $f$  متصلة عند  $c$  ، فإن  $f'(c)$  تكون موجودة إذا وإذا فقط كانت  $f'_+(c)$  ،  $f'_-(c)$  موجودتين ومتساويتين . اثبت أنه يمكننا الحصول على  $g'_-(c) = g'_+(c) = g'(c)$  بدون وجود  $g'(c)$  .

٢٧- (ص) بفرض أن  $I$  ،  $J$  فترتان في  $\mathbb{R}$  وبفرض أن  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  ،  $g: J \rightarrow \mathbb{R}$  بحيث أن تكون  $g$  قابلة للتفاضل عند نقطة  $b \in J$  ،  $f$  تكون قابلة للتفاضل عند نقطة داخلية  $a = g(b)$  في الفترة  $I$  . اثبت أن التركيب  $h = f \circ g$  المعرفة عند  $\{x \in J : g(x) \in I\}$  يكون قابلا للتفاضل عند  $b$  وأن  $h'(b) = f'(a)g'(b)$  [ إرشاد : بفرض  $H$  معرفة في  $D(h)$  بأنها

$$H(x) = \frac{f(g(x)) - f(g(b))}{g(x) - g(b)} \quad \text{إذا} \quad g(x) \neq g(b)$$

$$= f'(a) \quad \text{إذا} \quad g(x) = g(b)$$

اثبت أن  $\lim_b H(x) = f'(a)$  . حينئذ استخدم الحقيقة التي تقول أن .

$$(g(x) - g(b))H(x) = f(g(x)) - f(g(b)) \quad \text{لكل } x \text{ في } D(h) \quad [D(h)]$$

٢٧ - (ق) بفرض أن  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  معرفة في  $(0, +\infty)$

(١) إذا كانت  $f'(x) \rightarrow b \in \mathbb{R}$  عند  $x \rightarrow +\infty$  ، وضح أنه لأي  $h > 0$  نحصل على

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = b$$

(ب) إذا كانت  $f(x) \rightarrow a \in \mathbb{R}$  ،  $f'(x) \rightarrow b \in \mathbb{R}$  عند  $x \rightarrow +\infty$  فإن  $b = 0$

(ج) إذا كانت  $f'(x) \rightarrow b \in \mathbb{R}$  عند  $x \rightarrow +\infty$  ، حينئذ  $f(x)/x \rightarrow b$  عندما  $x \rightarrow +\infty$

٢٧ - (د) بفرض أن  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  قابلة للتفاضل عند  $0 < m \leq f'(x) \leq M$

حيث  $x \in [a, b]$  وبفرض أن  $f(a) < 0 < f(b)$  . بأخذ  $x_1 \in [a, b]$  ، عرف المتتابعة  $(x_n)$  بأنها

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{M} f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

اثبت أن هذه المتتابعة معرفة جيداً ومتقاربة إلى جذر وحيد  $\bar{x}$  للمعادلة  $f(x) = 0$  في  $[a, b]$  وأن

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq \frac{|f(x_n)|}{m} \left(1 - \frac{m}{M}\right)^n$$

عند  $n \in \mathbb{N}$  . [إرشاد : نفرض أن  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  معرفة بأنها  $\varphi(x) = x - f(x)/M$  . وضح أن  $\varphi$  هي تقلص (انظر ٢٣ - ٤) بثابت  $1 - m/M$  .

٢٧ - (هـ) بفرض أن  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  لها مشتقة متصلة وبحيث أن  $f(a) = b$  ،  $f'(a) \neq 0$  . وبفرض  $\delta > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $|x - a| \leq \delta$  فإن  $|f'(x) - f'(a)| \leq \frac{1}{2} |f'(a)|$  ، وبفرض  $\delta = \frac{1}{2} |f'(a)|$  ، اثبت أنه إذا كانت  $|x_1 - a| \leq \eta$  فإن المتتابعة  $(x_n)$  المعرفة بأنها  $x_1 = a$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) - \bar{y}}{f'(a)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

تتقارب إلى نقطة وحيدة  $\bar{x}$  في  $[a - \delta, a + \delta]$  بحيث أن  $f(\bar{x}) = \bar{y}$  . [إرشاد : وضح أن الدالة المعرفة بأنها  $\varphi(x) = x - (f(x) - \bar{y})/f'(a)$  تكون تقلصاً بمقدار ثابت  $\frac{1}{2}$  في الفترة  $[a - \delta, a + \delta]$ ]



## الباب الثامن والعشرون — تطبيقات أبعد لنظرية القيمة المتوسطة :

من الممكن بصعوبة أن نؤكد بشدة أهمية نظرية القيمة المتوسطة ، لأنها تلعب دوراً حاسماً في اعتبارات نظرية كثيرة . وهى فى نفس الوقت مفيدة جداً فى مواد عملية كثيرة .  
أشرنا فى ٢٧ - ٩ إلى بعض نتائج مباشرة لنظرية القيمة المتوسطة المفيدة غالباً . الآن سنقترح بعض القطاعات الأخرى التى فيها يمكن استخدامها ، ولإجراء هذا سنحصر بأكثر حرية عما قبل الخبرة السابقة للقارئ ومعلوماته المتصلة بالمشتقات للدوال معينة معروفة .

٢٨ - ١ تطبيق . يمكن استخدام نظرية رول لتحديد مواقع جذور دالة . لأنه ، إذا كانت دالة مثل  $g$  بحيث يمكن اعتبارها كشتقة الدالة  $f$  . فإنه بين أى جذرين للدالة  $f$  يوجد على الأقل جذراً واحداً للدالة  $g$  . مثال ذلك ، إذا فرضنا  $g(x) = \cos x$  ، فإننا نعرف أن  $g$  هى المشتقة للدالة  $f(x) = \sin x$  . ومن ثم ، يوجد على الأقل ، بين أى جذرين للدالة  $\sin x$  جذر واحد للدالة  $\cos x$  . ومن الناحية المقابلة أى جذرين للدالة  $\sin x$  نجد  $g'(x) = -\sin x = -f(x)$  لذلك نجربنا تطبيق آخر لنظرية رول بأنه بين أى جذرين للدالة  $\cos x$  يوجد على الأقل جذر واحد للدالة  $\sin x$  . إذن نستنتج أن الجذور للدالة  $\sin x$  ، والدالة  $\cos x$  تتشابه مع بعضها . هذا الاستنتاج ليس محتملاً أن يكون جديداً للقارئ ، لكن ، نفس النمط من الاستدلال يمكن استخدامه للدوال بـ  $J_n$  ذات الرتبة  $n = 0, 1, 2, \dots$  باستخدام العلاقات

$$[x^n J_n(x)]' = x^n J_{n-1}(x), [x^n J_n(x)]' = -x^{n-1} J_{n+1}(x) \text{ عند } x > 0$$

التفاصيل لهذه المناقشة يجب أن تزود بالقارئ .

٢٨ - ٢ تطبيق . يمكن استخدام نظرية القيمة المتوسطة للحسابات التقريبية للحصول على تقييمات الخطأ . مثال ذلك . نفرض أن المطلوب هو إيجاد قيمة  $\sqrt{105}$  . نستخدم نظرية القيمة المتوسطة حيث  $a = 100, b = 105, f(x) = \sqrt{x}$  فنحصل على

$$\sqrt{105} - \sqrt{100} = \frac{5}{2\sqrt{c}}$$

لعدد ما  $c$  حيث  $100 < c < 105$  . بما أن  $11 = \sqrt{121} < \sqrt{105} < \sqrt{c} < 10 < 10$  ، فيمكننا إثبات أن

$$\frac{5}{2(11)} < \sqrt{105} - 10 < \frac{5}{2(10)}$$

ومنها ينتج أن  $10.22 < \sqrt{105} < 10.25$  . هذا التقييم ربما لا يكون دقيقاً كالمطلوب .

(\*) نريد رشح ولهم بـ ( ١٧٨٤ - ١٨٤٦ ) كان فلكياً ورياضياً . وكان صديقاً ملازماً لجاوس ، وهو يعرف جيداً بالمعادلة التفاضلية التى تحمل اسمه .

من الواضح أن التقييم  $\sqrt{c} < \sqrt{105} < \sqrt{121}$  ضياع الوقت ويمكن تحسينه بالاستفادة من إستنتاجنا أن  $\sqrt{105} < 10.25$  . وإذن  $\sqrt{c} < 10.25$  ومن السهل تحديد أن

$$0.243 < \frac{5}{2(10.25)} < \sqrt{105} - 10$$

تقييمنا الأحسن هو  $10.243 < \sqrt{105} < 10.250$  ويمكن الحصول على تقديرات أكثر دقة باستخدام هذه الطريقة .

٢٨ - ٢ تطبيق . يمكن استخدام نظرية القيمة المتوسطة ونتائجها لتكوين المتباينات ومد المتباينات المعروفة للقيم الصحيحة أو القيم القياسية إلى القيم الحقيقية .

مثال ذلك ، نذكر أن متباينة برنولي • - ج تنص على أنه إذا كانت  $1+x > 0$  ،  $n \in \mathbb{N}$  ، فإن  $(1+x)^n \geq 1+nx$  . سنوضح أن هذه المتباينة تظل قائمة لأي أس  $r \geq 1$  . لإجراء هذا ، نفرض أن  $f(x) = (1+x)^r$  ، وإذن  $f'(x) = r(1+x)^{r-1}$  . إذا كانت  $-1 < x < 0$  ، حيث  $f'(x) < r$  ، بينما إذا كانت  $x > 0$  ، فإن  $f'(x) > r$  فبتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على كلتي هاتين الحالتين ، نحصل على النتيجة

$$(1+x)^r \geq 1+rx$$

عند  $1+x > 0$  ،  $r \geq 1$  . وبالإضافة إلى ذلك نجد أنه ، إذا كانت  $r > 1$  ، فإن التساوى يكون صحيحاً إذا وإذا فقط كانت  $x = 0$  .

كنتيجة ماثلة ، نفرض أن  $\alpha$  عدد حقيق يحقق  $0 < \alpha < 1$  ، وبفرض  $g(x) = \alpha x - x^\alpha$  عند  $x \geq 0$  . نجد أن  $g'(x) = \alpha(1-x^{\alpha-1})$  ، أى أن  $g'(x) < 0$  عند  $0 < x < 1$  ،  $g'(x) > 0$  عند  $x > 1$  نتيجة لذلك ، نجد أنه إذا كانت  $x \geq 0$  ، فإن  $g(x) \geq g(1)$  ،  $g(x) = g(1)$  إذا وإذا فقط كانت  $x = 1$  لذلك ، إذا كانت  $x \geq 0$  و  $0 < \alpha < 1$  فنحصل على

$$x^\alpha \leq \alpha x + (1-\alpha)$$

إذا كانت  $a \geq 0$  ،  $b > 0$  وإذا فرضنا أن  $x = a/b$  وبالضرب في  $b$  ، نحصل على المتباينة

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b$$

حيث التساوى يكون صحيحاً إذا وإذا فقط كانت  $a = b$  . هذه المتباينة هي غالباً نقطة الابتداء في إثبات متباينة هولدر الهامة مشروح ٨ ( β ) .

٢٨ - ٤ تطبيق . القواعد المألوفة للوبيتال (\*) لحساب « صيغ غير محددة » يمكن إثباتها بواسطة نظرية القيمة المتوسطة لكوشى . مثال ذلك ، نفرض أن  $f, g$  متصلتان فى  $[a, b]$  ولهما مشتقتان فى  $(a, b)$  ، حيث  $f(a) = g(a) = 0$  ، لكن  $g'(c) \neq 0$  لا تنعدم عند  $a \neq x$  . حينئذ توجد نقطة  $c$  حيث  $a < c < b$  بحيث أن

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

ينتج أنه إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x)$  موجودة ، فإن

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

الحالة التى تصبح فيها الدوال لا نهائية عند  $x = a$  ، أو عندما تكون النقطة التى تؤخذ عندها النهاية لا نهائية ، أو حيث يكون لدينا « غير محددة » لصورة أخرى ما ، يمكن معالجتها غالباً بأخذ اللوغاريتمات ، الأسى أو بعض معالجات مشابهة .

مثال ذلك ، إذا كانت  $a = 0$  ونريد حساب النهاية للدالة  $h(x) = x \log x$  عندما  $x \rightarrow 0$  فلا يمكننا استخدام المناقشة السابقة . نكتب  $h(x)$  فى الصورة  $f(x)/g(x)$  حيث  $f(x) = \log x$  ،  $g(x) = 1/x$  ،  $x > 0$  من الواضح أن

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = -x \rightarrow 0, \quad \text{as } x \rightarrow 0$$

نفرض  $\varepsilon > 0$  وباختيار عدد ثابت  $0 < x_1 < 1$  بحيث أنه إذا كانت  $0 < x < x_1$  ، نحصل على  $|f'(x)/g'(x)| < \varepsilon$  . باستخدام نظرية القيمة المتوسطة لكوشى ، نجد أن

$$\left| \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \right| = \left| \frac{f'(x_2)}{g'(x_2)} \right| < \varepsilon$$

حيث  $x_2$  تحقق  $0 < x < x_2 < x_1$  . بما أن  $f(x) \neq 0$  ،  $g(x) \neq 0$  عند  $0 < x < x_1$  فيمكننا كتابة الكمية الظاهرة فى الطرف الأيسر على الصورة الأكثر ملائمة

$$\frac{f(x)}{g(x)} \left\{ \frac{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}} \right\}$$

(\*) جويلوم فرانسوا لوبيتال ( ١٦٦١ - ١٧٠٤ ) كان تلميذا ليوهان برنولى ( ١٦٦٧ - ١٧٤٨ ) نشر مركز دى لاهويبال محاضرات مدرسة على التفاضل فى سنة ١٦٦٦ ، مقدما بذلك أول كتاب مدرسى فى التفاضل والتكامل الى العالم .

بجمل  $x_1$  ثابتة ، نفرض أن  $x \rightarrow 0$  . بما أن الكمية داخل القوسين تقترب من الواحد الصحيح ، تزيد  $\frac{1}{2}$  عند  $x$  صغيرة بكفاية . نستنتج مما سبق أن

$$|h(x)| = \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < 2\varepsilon$$

عند  $x$  قريبة بكفاية من الصفر . أى أن النهاية عند  $x = 0$  للدالة  $h$  هي صفر .

### تبادل نهاية ومشتقة :

إذا فرضنا  $(f_n)$  متتابعة لدوال معرفة في فترة  $J$  من الفراغ  $R$  ويقم في الفراغ  $R$  من السهل إعطاء مثالا لمتتابعة دوال لها مشتقات عند كل نقطة من  $J$  والتي تقتارب في  $J$  لدالة  $f$  التي ليس لها مشتقة عند بعض نقط من فترة  $J$  . (إجر هذا!) . وبالإضافة إلى ذلك يمكن استخدام مثال فيرستراس المشاؤ إليه من قبل لإعطاء مثال لمتتابعة دوال لها مشتقات عند كل نقطة في الفراغ  $R$  وتقتارب بانتظام في الفراغ  $R$  إلى دالة متصلة ليس لها مشتقة عند أى نقطة . أى أنه من غير المسوح ، في الحالة العامة ، بتفاضل النهاية لمتتابعة تقاربية لدوال لها مشتقات حتى ولو كان التقارب منتظماً .

سنوضح الآن أنه إذا كانت المتتابعة للمشتقات تقاربية بانتظام فإن الجميع يكون صحيحاً . إذا أضاف أحد الفرض أن المشتقات متصلة ، فإنه من الممكن إعطاء برهان قصير مؤسس على تكامل ريمان . لكن ، إذا لم نفرض أن المشتقات متصلة ، فحتاج إلى مناقشة أكثر دقة نوعاً ما .

٢٨ - ه نظرية . نفرض أن  $(f_n)$  متتابعة لدوال معرفة في فترة محدودة  $J$  للفراغ  $R$  ويقم في  $R$  . نفرض أنه توجد نقطة  $x_0$  في  $J$  بحيث تقتارب المتتابعة  $[f_n(x_0)]$  عندها ونفرض أن تلك المشتقات  $f'_n$  موجودة في  $J$  ، وأن المتتابعة  $(f'_n)$  تقتارب بانتظام في  $J$  إلى دالة  $g$  . حينئذ المتتابعة  $(f_n)$  تقتارب بانتظام في  $J$  إلى دالة  $f$  التي لها مشتقة عند كل نقطة في الفترة  $J$  وأن  $f' = g$  .

البرهان . نفرض أن النقطتين الطرفيتين للفترة  $J$  هما  $a < b$  ونفرض أن  $x$  أى نقطة في الفترة  $J$  . إذا كانت  $n$  و  $m$  عددين طبيعيين ، فتستخدم نظرية القيمة المتوسطة للفرق  $f_m - f_n$  في الفترة بنقطتين طرفيتين  $x, x_0$  ، نستنتج أنه توجد نقطة  $y$  (تشمعل  $m, n$ ) بحيث أن

$$f_m(x) - f_n(x) = f_m(x_0) - f_n(x_0) + (x - x_0)\{f'_m(y) - f'_n(y)\}$$

إذن نستنتج أن

$$\|f_m - f_n\|_J \leq \|f_m(x_0) - f_n(x_0)\| + (b - a) \|f'_m - f'_n\|_J$$

لذلك تتقارب المتتابعة  $(f_n)$  بانتظام في  $J$  لدالة سنرمز لها بالرمز  $f$  . بما أن الدوال  $f_n$  متصلة والتقارب لمتتابعة الدوال  $(f_n)$  إلى  $f$  منتظم ، فينتج أن  $f$  متصلة في  $J$  .

لإثبات وجود المشتقة للدالة  $f$  عند نقطة  $c$  في  $J$  ، نستخدم نظرية القيمة المتوسطة للفرق  $f_m - f_n$  في فترة بنقطتيها الطرفيتين  $x, c$  ، لاستنتاج أنه توجد نقطة  $z$  (نعمد على  $m, n$ ) بحيث أن

$$\{f_m(x) - f_n(x)\} - \{f_m(c) - f_n(c)\} = (x - c)\{f'_m(z) - f'_n(z)\}$$

نستنتج أنه عندما  $x \neq c$  ، حينئذ

$$\left| \frac{f_m(x) - f_m(c)}{x - c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} \right| \leq \|f'_m - f'_n\|_J$$

وبسبب التقارب المنتظم للمتتابعة  $(f'_n)$  يتسلط المقدار  $\varepsilon$  على الطرف الأيمن عندما  $m, n \geq M(\varepsilon)$  بأخذ النهاية بالنسبة إلى  $m$  ، نستنتج من مفروض  $10 - 8$  أن

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} \right| \leq \varepsilon$$

عند  $n \geq M(\varepsilon)$  بما أن  $g(c) = \lim (f'_n(c))$  ، فإنه يوجد  $N(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $n \geq N(\varepsilon)$  ، فإن  $|f'(c) - g(c)| < \varepsilon$  . الآن نفرض أن  $K = \sup \{M(\varepsilon), N(\varepsilon)\}$  . نحدد أنه إذا كانت  $0 < |x - c| < \delta_K(\varepsilon)$  فإن

$$\left| \frac{f_K(x) - f_K(c)}{x - c} - f'_K(c) \right| < \varepsilon$$

لذلك ، ينتج أنه إذا كانت  $0 < |x - c| < \delta_K(\varepsilon)$  فإن

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - g(c) \right| < 3\varepsilon$$

هذا يوضح أن  $f'(c)$  موجودة وتساوى  $g(c)$  . وهو المطلوب إثباته

### نظرية تايلور :

إذا كانت المشتقة  $f'(x)$  للدالة  $f$  موجودة عند كل نقطة  $x$  لفئة  $D$  ، فيمكننا اعتبار وجود المشتقة للدالة  $f'$  عند نقطة  $c \in D$  . في حالة كون  $f'$  لها مشتقة عند النقطة  $c$  ، فنشير للمعد الناتج بأنه المشتقة الثانية للدالة  $f$  عند نقطة  $c$  وسوف نرمز عادة لهذا المعد بالرمز  $f''(c)$  أو بالرمز  $f^{(2)}(c)$  . نعرف بأسلوب مشابه المشتقة الثالثة  $f'''(c) = f^{(3)}(c)$  ، ... ، والمشتقة النونية  $f^{(n)}(c)$  ، .. عند وجود هذه المشتقات .

الآن سنحصل على النظرية المشهورة المنسوبة إلى بروت تايلور (\*) التي تلعب دوراً هاماً في أبحاث كثيرة ويمكن اعتبارها امتداداً لنظرية القيمة المتوسطة .

٢٨-٦ نظرية تايلور . نفرض أن  $n$  عدد طبيعي ، وأن الدالة  $f$  ومشتقاتها  $f', f'', \dots, f^{(n-1)}$  معرفة ومتصلة في  $J = [a, b]$  وأن  $f^{(n)}$  موجودة في  $(a, b)$  إذا كانت  $\alpha$  و  $\beta$  تنتميان إلى  $J$  ، فإنه يوجد عدد  $\gamma$  بين  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث أن

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(\beta - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(\beta - \alpha)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta - \alpha)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\gamma)}{n!}(\beta - \alpha)^n$$

البرهان . نفرض أن  $P$  هو العدد الحقيقي المعروف بالعلاقة

$$(28.1) \quad \frac{(\beta - \alpha)^n}{n!} P = f(\beta) - \left\{ f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(\beta - \alpha) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta - \alpha)^{n-1} \right\}$$

وتعتبر الدالة  $\varphi$  المعرفة في  $J$  بأنها

$$\varphi(x) = f(\beta) - \left\{ f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(\beta - x) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(\beta - x)^{n-1} + \frac{P}{n!}(\beta - x)^n \right\}$$

واضح أن  $\varphi$  متصلة في  $J$  ولها مشتقة في  $(a, b)$  . ومن الواضح أيضاً أن  $\varphi(\beta) = 0$  وينتج من التعريف للعدد  $P$  أن  $\varphi(\alpha) = 0$  . حسب نظرية رول ، توجد نقطة  $\gamma$  بين  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث أن  $\varphi'(\gamma) = 0$  . عند حساب المشتقة  $\varphi'$  ( باستخدام القانون المادى لمشتقة حاصل جمع وحاصل ضرب دالتين ) ، نحصل على حاصل الجمع التلوكوبي

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= - \left\{ f'(x) - f'(x) + \frac{f''(x)}{1!}(\beta - x) + \dots + (-1) \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-2)!}(\beta - x)^{n-2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(\beta - x)^{n-1} - \frac{P}{(n-1)!}(\beta - x)^{n-1} \right\} \\ &= \frac{P - f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(\beta - x)^{n-1} \end{aligned}$$

بما أن  $\varphi'(\gamma) = 0$  إذن  $P = f^{(n)}(\gamma)$  ، مما يثبت الفرض وهو المطلوب إثباته .

ملاحظة : الحد الباقي

(\*) بروت تايلور ( ١٦٨٥ - ١٧٢١ ) كان رياضياً انجليزياً في مستقبل العمر . أعطى في عام ١٧١٥ مفكوك المتسلسلات اللانهائية ، لكنه - حقيقة لروح العصر - لم يناقش التقارب . وقام لاجرانج بأثبت الباقي .

$$(28.2) \quad R_n = \frac{f^{(n)}(\gamma)}{n!} (\beta - \alpha)^n$$

المعطى سابقاً يسمى غالباً بصيغة لاجرانج للباقي . توجد تعبيرات كثيرة أخرى للباقي ، لكن نشير حالياً فقط إلى صيغة كوشي التي تثبت أنه لعدد ما  $\theta$  حيث  $0 < \theta < 1$  ، نجد أن

$$(28.3) \quad R_n = (1 - \theta)^{n-1} \frac{f^{(n)}((1 - \theta)\alpha + \theta\beta)}{(n-1)!} (\beta - \alpha)^n$$

يمكن إثبات هذه الصيغة كما سبق ، باستثناء وضع  $(\beta - \alpha)Q/(n-1)$  في الطرف الأيسر للمعادلة ( ٢٨ - ١ ) ونعرف  $\varphi$  كما سبق ما عدا الحد الأخير فإنه يكون  $(\beta - x)Q/(n-1)!$  نترك التفاصيل لكثيرين . ( في باب ٣١ سنحصل على صيغة أخرى تتضمن استخدام التكامل لحساب الحد الباقي ) .

## تمارين :

٢٨ - ( أ ) باستخدام القانون في ٢٨ - ١ ، اثبت أنه إذا كانت

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

فإن الجذور لدوال بسل  $J_n$  ،  $J_{n+1}$  في  $(0, +\infty)$  تتشابه بعضها بعضاً .

٢٨ - ( ب ) اثبت أنه إذا كانت  $x > 0$  ، فإن

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$$

٢٨ - ( ج ) احسب  $\sqrt{2}$  ،  $\sqrt{1.2}$  . ما هي أحسن دقة يمكن أن تكون متأكداً منها ؟

٢٨ - ( د ) احصل على تقديرات مماثلة لتلك الموجودة في تمرين ٢٨ - ب للمقدار

$$(1+x)^{1/3} \text{ في الفترة } [0, 7] . \text{ استعمل هذه لحساب } \sqrt[3]{2} , \sqrt[3]{1.5}$$

٢٨ - ( هـ ) يفرض أن  $0 < r < 1$  ،  $-1 < x$  . اثبت أن  $(1+x)^r \geq 1+rx$  وأن

التساوي يكون صحيحاً إذا وإذا فقط كانت  $x = 0$  .

٢٨ - ( و ) يقال لجذر  $x_0$  لكثيرة الحدود  $p$  يقال إنه بسيط ( أو لها جذر مكرر )

إذا كانت  $p'(x_0) \neq 0$  ولما تكرر  $n$  إذا كانت  $p^{(n)}(x_0) = 0$  ،  $p^{(n-1)}(x_0) \neq 0$  ،  $p'(x_0) \neq 0$  لكي

$$p^{(n)}(x_0) \neq 0$$

إذا كانت  $a < b$  جذرين متتاليين لكثيرة الحدود ، فإنه يوجد عدد فردى من الجذور

( مع حساب التكرار ) لمشتقتها في  $(a, b)$  .

٢٨ - ( ز ) وضع أنه إذا كانت الجذور لكثيرة الحدود  $p$  جميعها حقيقية ، فإن

الجنور الكثيرة الحدود  $p'$  تكون جميعها حقيقية . وبالإضافة إلى ذلك ، إذا كانت جميع جنور  $p$  بسيطة فإن جنور  $p'$  تكون كلها بسيطة .

٢٨- (ح) إذا كانت  $f(x) = (x^2 - 1)^n$  وإذا كانت  $p$  هي التفاضل النوني للدالة  $f$  ، فإن  $p$  تكون كثيرة حدود من درجة  $n$  وجنورها بسيطة وواقعة في الفترة المفتوحة  $(-1, 1)$  .

٢٨- (ظ) اثبت صيغة كوشي الباقي  $R_n$  في نظرية تايلور المعطاة بصيغة (٢٨-٢) .

٢٨- (ى) يمكن إعطاء برهان نظرية تايلور ٢٨-٦ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة لكوشي بوضع

$$R(x) = f(x) - \left[ f(\alpha) + \frac{x-\alpha}{1!} f'(\alpha) + \dots + \frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(\alpha) \right]$$

اثبت أن  $R^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$  ،  $R(\alpha) = R'(\alpha) = \dots = R^{(n-1)}(\alpha) = 0$  . لاحظ أنه توجد  $\gamma_1$  بين  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث أن

$$\frac{R(\beta)}{(\beta-\alpha)^n} = \frac{R(\beta) - R(\alpha)}{(\beta-\alpha)^n - 0^n} = \frac{R'(\gamma_1)}{n(\gamma_1 - \alpha)^{n-1}}$$

استمر في هذا لتجد أن  $R(\beta) = (\beta - \alpha)^n f^{(n)}(\gamma_n) / n!$  عند قيمة ما  $\gamma_n$  واقعة بين  $\alpha$  و  $\beta$  .

٢٨- (ك) إذا كانت  $f(x) = e^x$  ، وضح أن الحد الباقي في نظرية تايلور يقترب من صفر عندما  $n \rightarrow \infty$  لكن الثابتين  $\alpha$  و  $\beta$  .

٢٨- (ل) إذا كانت  $f(x) = \sin x$  ، وضح أن الحد الباقي في نظرية تايلور يقترب من صفر عند  $n \rightarrow \infty$  لكل الثابتين  $\alpha$  و  $\beta$  .

٢٨- (م) إذا كانت  $f(x) = (1+x)^m$  حيث  $m \in \mathbb{Q}$  ،  $|x| < 1$  فإن القوانين العادية للتفاضل من حساب التفاضل والتكامل ونظرية تايلور تؤدي إلى التعبير

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \dots + \binom{m}{n-1}x^{n-1} + R_n$$

حيث  $R_n$  يمكن إعطاؤه في صيغة لاجرانج بأنه  $R_n = x^n f^{(n)}(\theta_n x) / n!$  حيث  $0 < \theta_n < 1$  . اثبت أنه إذا كانت  $0 \leq x < 1$  ، فإن  $\lim (R_n) = 0$  . اثبت أنه إذا كانت  $-1 < x < 0$  فإنه لا يمكننا استخدام نفس المناقشة لنوضح أن  $\lim (R_n) = 0$  .

٢٨- (ن) في التمرين السابق ، استخدم صيغة كوشي للباقي للحصول على

$$R_n = \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \frac{(1-\theta_n)^{n-1} x^n}{(1+\theta_n x)^{n-m}}$$



حيث  $0 < \theta_n < 1$  . عندما  $|x| < 1$  اثبت أن  $|(1-\theta_n)/(1+\theta_n x)| < 1$  ويرهن عل أن  $\lim (R_n) = 0$  .

٢٨- (س) إذا كانت  $f: R \rightarrow R$  ، وإذا كانت  $f'(x)$  موجودة عند  $x \in R$  ، وإذا كانت  $f''(a)$  موجودة ، فوضح أن

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

اعط مثالا تكون فيه هذه النهاية موجودة ، لكن ليس للدالة مشتقة ثانية عند  $a$  .

٢٨- (ع) بفرض أن  $f_n(x) = |x|^{1+1/n}$  عند  $x$  في  $[-1, 1]$  اثبت أنه كل  $f_n$  تكون قابلة للتفاضل في  $[-1, 1]$  وأن  $(f_n)$  تتقارب بانتظام في  $[-1, 1]$  إلى  $f(x) = |x|$  .

### مشروعات :

٢٨- (أ) نعتبر في هذا المشروع الدالة الأسية من وجهة نظر علم التفاضل والتكامل .

(أ) بفرض أن دالة  $E$  في  $J = (a, b)$  إلى  $R$  لها مشتقة عند كل نقطة في الفترة  $J$  وأن  $E'(x) = E(x)$  لكل  $x \in J$  . لاحظ أن  $E$  لها مشتقات من كل الرتب في  $J$  وكل مشتقة تساوي  $E$  .

(ب) إذا كانت  $E(a) = 0$  عند بعض  $\alpha \in J$  ، استخدم نظرية تايلور ٢٨-٦ وتمرين ١٤-ل لتوضح أن  $E(x) = 0$  لكل  $x \in J$  .

(ج) وضح أنه توجد على الأكثر دالة واحدة  $E$  في  $R$  إلى  $R$  تحقق

$$x \in R, \quad E(0) = 1 \quad \text{عند} \quad E'(x) = E(x)$$

(د) أثبت أنه إذا كانت  $E$  تحقق الشروط في جزء (ج) ، فإنها أيضاً تحقق المعادلة الدالية

$$x, y \in R \quad \text{عند} \quad E(x+y) = E(x)E(y)$$

(إرشاد : إذا كانت  $f(x) = E(x+y)/E(y)$  فإن  $f'(x) = f(x)$  و  $f(0) = 1$  .)

(هـ) بفرض أن  $(E_n)$  هي المتتابعة لدوال معرفة في  $R$  بالتعريف

$$E_1(x) = 1 + x, \quad E_n(x) = E_{n-1}(x) + x^n/n!$$

بفرض أن  $A$  أي عدد موجب ، وإذا كانت  $|x| \leq A$  وإذا كانت  $m \geq n > 2A$  فإن

$$|E_m(x) - E_n(x)| \leq \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} \left[ 1 + \frac{A}{n} + \dots + \left( \frac{A}{n} \right)^{m-n} \right] < \frac{2A^{n+1}}{(n+1)!}$$

ومن ثم تتقارب المتتابة  $(E_n)$  بانتظام عند  $|x| \leq A$  .

(و) إذا كانت  $(E_n)$  متتابة للنوال معرفة في جزء (د) ، فإن

$$x \in \mathbb{R}, \quad \text{عند} \quad E'_n(x) = E_{n+1}(x)$$

أثبت أن المتتابة  $(E_n)$  تتقارب في  $\mathbb{R}$  لدالة  $E$  بالخواص الظاهرة في جزء (ج) .  
وأن  $E$  ، هي الدالة الوحيدة بهذه الخواص .

(ز) بفرض أن  $E$  الدالة حيث  $E' = E$  ،  $E(0) = 1$  . إذا عرفنا  $e$  بأنه العدد

$$e = E(1)$$

حينئذ  $e$  تقع بين  $2\frac{1}{4}$  و  $2\frac{1}{2}$  . (إرشاد :  $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} < e < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$  ، وأكثر دقة ، يمكننا أن نوضح أن  $2.708 < 2 + \frac{1}{12} < e < 2 + \frac{1}{12} < 2.723$  )

٢٨ -  $\beta$  يمكن في هذا المشروع استخدام النتائج في المثال السابق . بفرض أن  $E$  تشير إلى الدالة الوحيدة في  $\mathbb{R}$  بحيث أن

$$E' = E \quad \text{و} \quad E(0) = 1$$

وبفرض  $e = E(1)$  :

(أ) أثبت أن  $E$  تزايدية بدقة ولها مدى  $P = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

(ب) بفرض  $L$  هي الدالة العكسية لدالة  $E$  ، بحيث أن نطاق  $L$  هو  $P$  ومداها يكون هو كل الفراغ  $\mathbb{R}$  . أثبت أن  $L$  تزايدية مضبوطة في  $P$  ، وإذن  $L(1) = 0$  ، وأن  $L(e) = 1$  .

(ج) وضح أن  $L(xy) = L(x) + L(y)$  لكل  $y, x$  في  $P$  .

(د) إذا كانت  $0 < x < y$  ، فإن

$$\frac{1}{y}(y-x) < L(y) - L(x) < \frac{1}{x}(y-x)$$

(إرشاد : استخدم نظرية القيمة المتوسطة إلى  $E$  ) .

(هـ) الدالة  $L$  لها مشتقة عند  $x > 0$  ، وأن  $L'(x) = 1/x$  .

(و) العدد  $e$  يحقق

$$e = \lim \left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)$$

(إرشاد : احسب  $L'(1)$  باستخدام المتتابة  $((1 + 1/n))$  والاتصال لدالة  $E$  ) .

٢٨ -  $\gamma$  في هذا المشروع ستقدم الجيب وجيب التمام

(أ) بفرض  $h$  معرفة في الفترة  $J = (a, b)$  إلى  $R$  وتحقق

$$h''(x) + h(x) = 0$$

لكل  $x$  في  $J$ . وضع أن  $h$  لها مشتقات من كل الرتب وأنه إذا كانت توجد نقطة  $\alpha$  في  $J$  بحيث أن  $h(\alpha) = 0, h'(\alpha) = 0$ ، فإن  $h(x) = 0$  لجميع  $x \in J$ .  
(إرشاد : استخدم نظرية تايلور ٢٨ - ٦).

(ب) وضع أنه توجد على الأكثر دالة واحدة  $C$  في  $R$  تحقق الشروط

$$C'' + C = 0, \quad C(0) = 1, \quad C'(0) = 0$$

وتوجد أيضاً على الأكثر دالة واحدة  $S$  في  $R$  تحقق

$$S'' + S = 0, \quad S(0) = 0, \quad S'(0) = 1$$

(ج) نعرف متتابعة  $(C_n)$  بأنها

$$C_1(x) = 1 - x^2/2, \quad C_n(x) = C_{n-1}(x) + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

بفرض  $A$  أى عدد موجب، إذا كانت  $|x| \leq A$  وإذا كانت  $m \geq n > A$  فيكون

$$|C_m(x) - C_n(x)| \leq \frac{A^{2n+2}}{(2n+2)!} \left[ 1 + \left(\frac{A}{2n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{A}{2n}\right)^{2m-2n} \right] \\ < \left(\frac{4}{3}\right) \frac{A^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

ومن ثم أثبت أن المتتابعة  $(C_n)$  تتقارب بانتظام عند  $|x| \leq A$ . وضع أيضاً أن  $C_n'' = -C_{n-1}$  و  $C_n(0) = 1$  و  $C_n'(0) = 0$ . أثبت أن النهاية  $C$  للمتتابعة  $(C_n)$  هي الدالة الوحيدة التي لها الخواص الموجودة في جزء (ب).

(د) إذا عرفت  $(S_n)$  بأنها

$$S_1(x) = x, \quad S_n(x) = S_{n-1}(x) + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

اثبت أن  $(S_n)$  تتقارب بانتظام عند  $|x| \leq A$  إلى الدالة الوحيدة  $S$  ذات الخواص الموجودة في جزء (ب).

(هـ) اثبت أن  $C' = -S$  و  $S' = C$ .

(و) كون مطابقة فيثاغورس  $S^2 + C^2 = 1$ .

(إرشاد : احسب مشتقة  $(S^2 + C^2)$ ).

٢٨ -  $\delta$  يستمر المشروع في مناقشة دوال الجيب ودوال جيب التمام. ويمكن إجراء استعمال خواص الثبوت في المشروع السابق.

(أ) نفرض أن  $h$  هي دالة في  $R$  وتحقق المعادلة

$$h'' + h = 0$$

وضح أنه يوجد ثابتان  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث أن  $h = \alpha C + \beta S$

(إرشاد :  $\alpha = h(0)$  و  $\beta = h'(0)$ )

(ب) الدالة  $C$  زوجية ،  $S$  فردية بمعنى أن

$$C(-x) = C(x) \quad , \quad S(-x) = -S(x) \quad \text{لكل } x \text{ في } R .$$

(ج) اثبت «قوانين الإضافة»

$$C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y),$$

$$S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y)$$

تظل صحيحة لكل  $x$  و  $y$  في  $R$  . (إرشاد : نفرض أن  $y$  ثابتة ، ونعرف

$$h(x) = C(x+y) , \text{ وأثبت أن } h'' + h = 0, h(0) = C(y), h'(0) = -S(y).$$

(د) اثبت أن «قوانين المضاعفة»

$$C(2x) = 2[C(x)]^2 - 1 = 2[S(x)]^2 + 1,$$

$$S(2x) = 2S(x)C(x)$$

تظل صحيحة لكل  $x$  في  $R$  .

(هـ) أثبت أن  $C$  تحقق المتباينة

$$C_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \leq C(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = C_2(x)$$

وإذن ، يقع أصغر جذر موجب  $\gamma$  للدالة  $C$  بين الجذر الموجب للدالة  $x^2 - 2 = 0$  وأصغر جذر موجب للدالة  $x^4 - 12x^2 + 24 = 0$  . استخدم هذه النتيجة ، أثبت أن  $\sqrt{2} < \gamma < \sqrt{3}$

(و) نعرف  $\pi$  بأنها أصغر جذر موجب دقيق للدالة  $S$  . أثبت أن  $\pi = 2\gamma$

ومن ثم استنتج أن  $2\sqrt{2} < \pi < 2\sqrt{3}$

(ز) أثبت أن كلا من  $C$  ،  $S$  دالتين دوريتين بدورة  $2\pi$  بمعنى أن

$$C(x+2\pi) = C(x) \quad \text{و} \quad S(x+2\pi) = S(x)$$

لكل  $x$  في  $R$  . أيضا وضح أن

$$S(x) = C\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - C\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$C(x) = S\left(\frac{\pi}{2} - x\right) S\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

لكل  $x$  في  $R$  .

٢٨ -  $\varepsilon$  بمتابعة نموذج المشروعين السابقين نقدم جيب تمام الزائدى والجيب الزائدى كدوال تحقق

$$c'' = c, \quad c(0) = 1, \quad c'(0) = 0, \\ s'' = -s, \quad s(0) = 0, \quad s'(0) = 1$$

على الترتيب . اثبت الوجود والوحدانية لهذه الدوال وأثبت أن

$$c^2 + s^2 = 1$$

اثبت نتائج ماثلة إلى (أ) - (د) في المشروع ٢٨ -  $\delta$  ووضع أنه ، إذا رمزنا للدالة الأسية بالرمز  $E$  ، فإن

$$c(x) = \frac{1}{2}(E(x) + E(-x)), \quad s(x) = \frac{1}{2}(E(x) - E(-x))$$

٢٨ -  $\gamma$  يقال لدالة  $\varphi$  في فترة  $J$  للفراغ  $R$  إلى  $R$  إنها ( نقطة منتصف ) محدبة في حالة

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(\varphi(x) + \varphi(y))$$

لكل  $y, x$  في  $J$  . (في نصوص هندسية : تقع نقطة المنتصف لأى وتر لمنحنى  $y = \varphi(x)$  فوق أو على المنحنى) . سنعرض في هذا المشروع أن  $\varphi$  دالة محدبة متصلة .

(أ) إذا كانت  $n = 2^m$  وإذا كانت  $x_1, \dots, x_n$  تنتمي إلى  $J$  ، فإن

$$\varphi\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}(\varphi(x_1) + \dots + \varphi(x_n))$$

(ب) إذا كانت  $n < 2^m$  وإذا كانت  $x_1, \dots, x_n$  تنتمي إلى  $J$  ، فنفرض أن  $x_j$  عند  $j = n+1, \dots, 2^m$  تساوى

$$\bar{x} = \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$$

اثبت أن نفس المتباينة تظل صحيحة كما في جزء (أ) .

(ج) بما أن  $\varphi$  متصلة ، اثبت أنه إذا كانت  $x, y$  تنتمي إلى  $J$  وأن  $t \in I$  ، فإن

$$\varphi((1-t)x + ty) \leq (1-t)\varphi(x) + t\varphi(y)$$

(بنصوص هندسية : الوتر الشامل يقع فوق أو على المنحنى) .

(د) نفرض أن  $\varphi$  لها مشتقة ثانية في  $J$  . فشرط ضرورى وكاف لكون  $\varphi$  محدبة

في  $J$  هو  $\varphi''(x) \geq 0$  عند  $x \in J$  . ( إرشاد : لإثبات خاصية الضرورة ، استخدم تمرين ٢٠ - و . لإثبات الكفاية ، استخدم نظرية تايلور وأخذ المفكوك عند  $x = (x+y)/2$  .

(هـ) إذا كانت  $\varphi$  دالة محدبة متصلة في  $J$  ونفرض أن  $x < y < z$  تنتمي إلى  $J$  وضع أن

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} \leq \frac{\varphi(z) - \varphi(x)}{z - x}$$

لذلك إذا كانت  $w \leq x \leq y \leq z$  تنتمي إلى  $J$  ، فيكون

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(w)}{x - w} \leq \frac{\varphi(z) - \varphi(y)}{z - y}$$

(ف) اثبت أن دالة محدبة متصلة  $\varphi$  في  $J$  لها مشتقة طرف أيمن ومشتقة طرف أيسر عند كل نقطة داخل  $J$  . وبالإضافة إلى ذلك ، تكون الفتحة الجزئية التي فيها  $\varphi'$  غير موجودة قابلة للمد .

## الباب التاسع والعشرون - تكامل ريمان - اشتيلتجز :

سنعرف في هذا الباب التكامل لريمان - اشتيلتجز (\*) للنوال محدودة في فترة مدمجة للفراغ  $R$  . وبما أننا نفرض أن القارئ يعرف على الأقل بطريقة غير رسمية « علم التكامل » من منبج التكامل والتفاضل فإننا سوف لا نضيف دافعاً شاملاً لها .

سيرغب القارئ الذي يواصل دراسته للتحليل الرياضي في أن يصبح ملماً بتكامل ليبيج الأكثر تعميقاً في وقت مبكر . لكن بما أن تكاملات ريمان وتكاملات ريمان - اشتيلتجز مناسبة لأغراض كثيرة وأكثر ألفة للقارئ . فإننا نفضل معالجتها هنا ويترك نظرية لبسيج الأكثر تقدماً لمنهج لاحق .

سنعتبر دوال قيمتها حقيقية محدودة في فترات مغلقة لنظام العدد الحقيقي ، نعرف التكامل لأي من مثل هذه النوال بالنسبة لأخرى ، نشق الخواص الرئيسية لهذا التكامل .

(\*) ( جورج فريدرش ) برن هاردريمان ( ١٨٢٦ - ١٨٦٦ ) كان الابن لراع ديني فروي فتر ولد قريباً من هانوفر . تعلم في جيتنجن بالمانيا الغربية وبرلين ودرس في جيتنجن . كان أحد المؤسسين لنظرية الدوال التحليلية ، لكن قام أيضاً بمساهمة أساسية للهندسة ، نظرية العدد ، الرياضة الفيزيائية .

توماس جونز اشتيلتجز ( ١٨٥٦ - ١٨٩٤ ) كان فلكياً ورياضياً هولندياً . تعلم في باريس مع هرميت وحصل على الاستاذية في تولوز . وأعماله الأكثر شهرة هي مذكرته على الكسور المتصلة ، المسألة الخاصة ، بالعزوم ، تكامل اشتيلتجز الذي نشر في آخر سنة من حياته القصيرة .

لفرع التكامل الذى نعتبره هنا أكثر تعميماً بعض الشيء عما اعتبر في المناهج السابقة والإضافات التعميمية تجعله أكثر فائدة في بعض التطبيقات ، وخاصة الإحصاء ، وفي نفس الوقت ، توجد تعقيدات إضافية قليلة للمدة النظرية التى تحتاجها نقاش صارم لتكامل ريمان العادى الجدير أن ننسى هذا الخط لنظرية التكامل بالقدر الذى تتطلبه تطبيقاته الأكثر انتشاراً .

نفرض أن  $f$  و  $g$  دالتين قيمهما حقيقية ومعرفتين في فترة مغلقة  $J = [a, b]$  للخط الحقيقى . سنفرض أن كلا من  $f$  ،  $g$  محدودتين في  $J$  ، سوف لا يتكرر هذا الفرض الدائم . انقسام من الفترة  $J$  هى مجموعة محدودة لفترات غير متراكبة اتحادها هو  $J$  . نصف عادة جزء  $P$  بتحديد فئة محدودة لأعداد حقيقية  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  بحيث أن

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$$

وبحيث أن الفترات الجزئية الحادثة في جزء  $P$  هى الفترات  $[x_{k-1}, x_k]$  ،  $k = 1, 2, \dots, n$  وأكثر صواباً ، نشير للنقط الطرفية  $x_k$  ،  $k = 0, 1, \dots, n$  كنقط التقسيم المناظرة إلى  $P$  . لكن ، عملياً من المناسب دائماً ، وبدون تسبب في الإيهام ، استعمال الكلمة « انقسام » لنشير إما لمجموعة الفترات الجزئية أو لمجموعة النقط الطرفية لهذه الفترات الجزئية . ومن ثم نكتب  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$

إذا كانت  $P$  و  $Q$  تقسيمين للفترة  $J$  ، نقول أن  $Q$  تكرير للتقسيم  $P$  أو أن  $Q \subseteq P$  تكون أدق من  $Q$  فى حالة كون كل فئة جزئية في  $Q$  محتوية في فترة جزئية ما في  $P$  . هذا يكون مكافئاً للزوم أن كل نقطة تقسيم في  $P$  هى أيضاً نقطة تقسيم في  $Q$  . لهذا السبب ، نكتب  $P \subseteq Q$  عندما يكون  $Q$  تكرير للتقسيم  $P$  .

٢٩-١ تعريف . إذا كانت  $P$  هى تقسيم للفترة  $J$  ، فإن حاصل جمع ريمان - اشيلتجز للدالة  $f$  بالنسبة إلى  $g$  والمناظرة إلى  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  هى عدد حقيقى  $S(P; f, g)$  فى الصورة

$$(29.1) \quad S(P; f, g) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \{g(x_k) - g(x_{k-1})\}$$

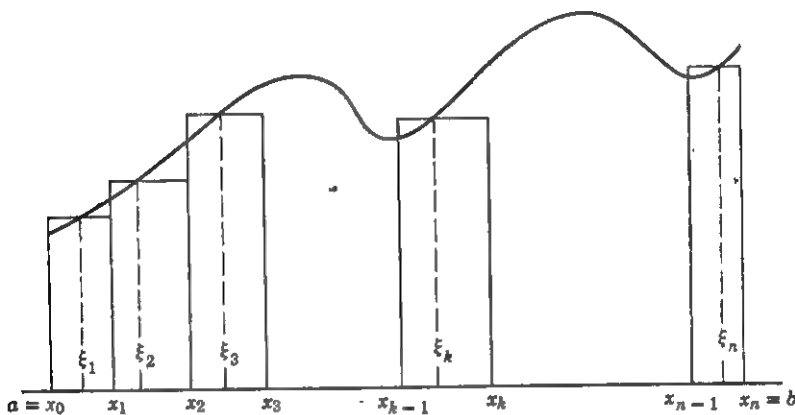
قد اخترنا هنا أعداد  $\xi_k$  تحقق

$$k = 1, 2, \dots, n \quad x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$$

لاحظ أنه إذا كانت الدالة  $g$  المعرفة بالتعريف  $g(x) = x$  ، فإن التعبير فى معادلة (٢٩-١) يتحول إلى

$$(29.2) \quad \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

حاصل الجمع (٢-٢٩) يسمى عادة بحاصل جمع ريمان للدالة  $f$  المناظر للتقسيم  $P$  ويمكن تفسيره بأنه المساحة لاتحاد مستطيلات قواعدها  $[x_{k-1}, x_k]$  وارتفاعاتها  $f(\xi_k)$  .  
 ( انظر شكل ١-٢٩ ) . أى أنه إذا كان التقسيم  $P$  دقيقاً جداً ، فتوقع أن حاصل جمع ريمان ( ٢ - ٢٩ ) ينتج تقريباً إلى « المساحة تحت الشكل التخطيطي للدالة  $f$  » .  
 وفى حالة دالة عامة  $g$  ، ينبغي للقارئ أن يترجم حاصل جمع ريمان - اشتيلتجز ( ١ - ٢٩ ) بأنه مشابه لحاصل جمع ريمان ( ٢ - ٢٩ ) - باستثناء أنه بدلاً من اعتبار الطول  $x_k - x_{k-1}$  للفترة الجزئية  $[x_{k-1}, x_k]$  فإننا نعتبر بعضاً من مقياس آخر لمقدار هذه الفترة الجزئية أى الفرق  $g(x_k) - g(x_{k-1})$  . أى أنه إذا كانت  $g(x)$  هي « الكتلة » الكلية أو « الشحنة » الكلية في الفترة  $[a, x]$  ، فإن  $g(x_k) - g(x_{k-1})$  تدل على « الكتلة » أو « الشحنة » في الفترة الجزئية  $[x_{k-1}, x_k]$  . الفكرة هي أننا نريد أن نكون ماهرين في اعتبار مقاييس أخرى لمقدار فترة خلاف طولها ، لذلك نسحب بحواصل الجمع ( ١-٢٩ ) إلاكثر عموماً نوعاً ما .



( شكل ١-٢٩ حاصل جمع ريمان كمساحة )

سيلاحظ أن كلا من حاصل الجمع ( ١-٢٩ ) ، ( ٢-٢٩ ) يعتمد على الاختيار « للنقط الوسطى » ، أى ، على الأعداد  $\xi_k, 1 \leq k \leq n$  . أى أنه يمكن أن يكون من المناسب إدخال مدلولاً يلعب دوراً في إظهار هذه الأعداد . لكن ، بتقديم تقسيم أدق يكون من الممكن دائماً افتراض أن النقط الوسطى هي نقط تقسيم . في الحقيقة ، إذا أدخلنا التقسيم  $Q = (x_0, \xi_1, x_1, \xi_2, \dots, \xi_n, x_n)$  وحاصل الجمع  $S(Q; f, g)$  حيث أخذنا النقط الوسطى بحيث تكون هي النقط الطرفية اليمنى واليسرى على التعاقب للفترة الجزئية . ، حينئذ يعطى حاصل الجمع  $S(Q; f, g)$  نفس القيمة مثل حاصل الجمع ( ١ - ٢٩ ) . يمكننا دائماً افتراض أن التقسيم يقسم الفترة إلى عدد زوجي من الفترات الجزئية وتكون النقط الوسطى هي النقط الطرفية اليمنى واليسرى على التعاقب لهذه الفترات الجزئية . لكن ، سوف لا يكون ضرورياً أن نحتاج إلى العملية التقسيمية « المثالية » ، وسوف لانجد ضرورة لإظهار هذه النقط الوسطى .



٢٩-٢ تعريف . نقول إن  $f$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  في  $J$  إذا كان يوجد عدد حقيقى  $I$  بحيث أنه لكل عدد  $\varepsilon > 0$  يوجد تقسيم  $P_\varepsilon$  للفترة  $J$  بحيث أنه إذا كانت  $P$  أى تكرير أو أى تنقية لتقسيم  $P_\varepsilon$  ،  $S(P; f, g)$  هو أى حاصل جمع لريمان - اشتيلتجز ، المناظر إلى  $P$  ، حينئذ

$$(29.3) \quad |S(P; f, g) - I| < \varepsilon$$

في هذه الحالة العدد يكون  $I$  محدداً وحيداً ويرمز له بالرمز

$$I = \int_a^b f dg = \int_a^b f(t) dg(t)$$

يسمى تكامل ريمان - اشتيلتجز للدالة  $f$  بالنسبة إلى  $g$  في الفترة  $J = [a, b]$  . نسمى الدالة  $f$  بالدالة المطلوبة تكاملها ( تكاملية ) ، وتسمى  $g$  بالمكاملة . أحياناً نقول أن  $f$  هي  $g$  القابلة للتكامل إذا كانت  $f$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  . في الحالة الخاصة عندما  $g(x) = x$  نجد أنه إذا كانت  $f$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  ، فنقول إن  $f$  قابلة لتكامل ريمان .

قبل إظهار أى من خواص تكامل ريمان - اشتيلتجز ، سنعتبر بعض أمثلة . لكي نجعل الحسابات بسيطة ، اخترت بعض من هذه الأمثلة بحيث تكون حالات شديدة توجد أمثلة أكثر باتحاد الأمثلة المعطاة أسفل .

٢٩-٣ أمثلة . ( أ ) قد لاحظنا من قبل أنه إذا كانت  $g(x) = x$  فإن التكامل يؤول إلى تكامل ريمان العادى لحساب التفاضل والتكامل الأساسى .

( ب ) إذا كانت  $g$  مقداراً ثابتاً في الفترة  $[a, b]$  ، فإن أى دالة  $f$  تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  ومقدار التكامل يكون صفراً .

( ج ) بفرض أن  $g$  معرفة في الفترة  $J = [a, b]$  بأنها

$$\begin{aligned} g(x) &= 0, & x &= a, \\ &= 1, & a < x \leq b \end{aligned}$$

فتترك كثرين لنوضح أن دالة  $f$  تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  إذا وإذا فقط  $f$  كانت متصلة عند  $a$  وأنه في هذه الحالة تكون قيمة التكامل هي  $f(a)$  .

( د ) بفرض أن  $c$  نقطة داخلية للفترة  $J = [a, b]$  وبفرض أن  $g$  معرفة بأنها

$$\begin{aligned} g(x) &= 0, & a &\leq x \leq c, \\ &= 1, & c < x \leq b \end{aligned}$$

فكثيرين نوضح أن دالة  $f$  تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  إذا وإذا فقط كانت متصلة عند  $c$  من اليمين ( بمعنى أنه لكل  $\varepsilon > 0$  توجد  $\delta(\varepsilon) > 0$  بحيث أنه إذا كانت

إذا كانت الدالة  $f$  تحقق  $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$  ، فنجد  $x \in J$  و  $c \leq x < c + \delta(\varepsilon)$  .  
 هذا الشرط ، فإن قيمة التكامل هو  $f(c)$  . ( لاحظ أن الدالة المكاملة  $g$  متصلة عند  $c$  من اليسار ) .

( هـ ) بتعديل المثال السابق ، نفرض أن  $h$  معرفة بأنها

$$\begin{aligned} h(x) &= 0, & a \leq x < c, \\ &= 1, & c \leq x \leq b \end{aligned}$$

إن  $h$  متصلة عند  $c$  من اليمين وتكون دالة  $f$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $h$  إذا وإذا فقط  $f$  كانت متصلة عند  $c$  من اليسار . وفي هذه الحالة تكون القيمة للتكامل هي  $f(c)$  .

( و ) بفرض أن  $c_1 < c_2$  نقطتين داخليتين للفترة  $J = [a, b]$  وبفرض أن  $g$

معرفة بأنها

$$\begin{aligned} g(x) &= \alpha_1, & a \leq x \leq c_1, \\ &= \alpha_2, & c_1 < x \leq c_2, \\ &= \alpha_3, & c_2 < x \leq b \end{aligned}$$

إذا كانت  $f$  متصلة عند النقط  $c_1, c_2$  ، فينتج أن  $f$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  وأن

$$\int_a^b f dg = (\alpha_2 - \alpha_1)f(c_1) + (\alpha_3 - \alpha_2)f(c_2)$$

بأخذ نقط أكثر يمكننا الحصول على حاصل جمع يتضمن القيم للدالة  $f$  عند نقط في الفترة  $J$  ،  
 موزونة بقيم القفزات للدالة  $g$  عند هذه النقط .

( ز ) نفرض أن الدالة  $f$  هي دالة درشلت غير المتصلة ( مثال ٢٥ - ٥ ( ز ) )

المعرفة بأنها

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \quad \text{إذا كانت } x \text{ قياسية} \\ &= 0 \quad \text{إذا كانت } x \text{ غير قياسية} \end{aligned}$$

وبفرض أن  $g(x) = x$  اعتبر هذه الدوال على  $I = [0, 1]$  . إذا كان تقسيم  $P$  يتكون من  $n$  فترات جزئية متساوية ، حينئذ باختيار  $k$  من النقط الوسطى في حاصل جمع  $S(P; f, g)$  بحيث تكون قياسية وتكون النقط الباقية غير قياسية  $S(P; f, g) = k/n$  فينتج أن  $f$  ليست قابلة لتكامل ريمان .

( ح ) نفرض أن  $f$  دالة معرفة في  $I$  بأنها  $f(0) = 1, f(x) = 0$  عند  $x$  غير قياسية ،  $f(m/n) = 1/n$  حيث  $n$  و  $m$  عدنان طبيعيان ليس بينهما عامل مشترك خلاف الواحد الصحيح . بينا في مثال ٢٥ - ٥ ( ح ) أن  $f$  متصلة عند كل عدد غير قياسي وغير متصلة عند كل عدد قياسي . إذا كانت  $g(x) = x$  ، فإنه كثرين يمكن أن نوضح أن  $f$  تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  وأن قيمة التكامل تساوى صفراً .

٢٩-٤ معيار كوشى للقابلية للتكامل . تكون الدالة  $f$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  في  $J = [a, b]$  إذا وإذا فقط كان لكل عدد  $\varepsilon > 0$  تقسيم  $Q_\varepsilon$  للفترة  $J$  بحيث أنه إذا كانت  $P$  و  $Q$  تكريرين للتقسيم  $Q_\varepsilon$  وإذا كانت  $S(P; f, g)$  و  $S(Q; f, g)$  هما أى حاصل جمع لريمان - اشتلتجز المناظرين ، فيكون

$$(29.4) \quad |S(P; f, g) - S(Q; f, g)| < \varepsilon$$

البرهان . إذا كانت  $f$  قابلة للتكامل ، فإنه يوجد تقسيم  $P_\varepsilon$  بحيث أنه إذا كانت  $P$  و  $Q$  تقسمتين للتقسيم  $P_\varepsilon$  ، فإن أى حاصل جمع لريمان - اشتلتجز أى حواصل جمع مناظرة لريمان المناظرين يحققان  $|S(Q; f, g) - I| < \varepsilon/2$  و  $|S(P; f, g) - I| < \varepsilon/2$  باستخدام متباينة المثلث ، نحصل على (٢٩-٤) .

وبالعكس ، نفرض أن المعيار يتحقق . لتوضح أنه إذا كانت  $f$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  ، فنحتاج لإيجاد القيمة لتكامله واستخدام تعريف ٢٩-٢ . نفرض أن  $Q_1$  تقسيم الفترة  $J$  بحيث أنه إذا كانت  $P$  و  $Q$  تكريرين للتقسيم  $Q_1$  ، فإن

$$|S(P; f, g) - S(Q; f, g)| < 1$$

إستنتاجياً ، نختار  $Q_n$  لتكون تكريراً للتقسيم  $Q_{n-1}$  بحيث أنه إذا كانت  $P$  و  $Q$  تكريرين للتقسيم  $Q_n$  ، فإن .

$$(29.5) \quad |S(P; f, g) - S(Q; f, g)| < 1/n$$

اعتبر متتابعة  $(S(Q_n; f, g))$  لأعداد حقيقية حصلنا عليها بهذه الطريقة . بما أن  $Q_n$  تكرير للتقسيم  $Q_m$  حيث  $n \geq m$  ، فإن هذه المتتابعة لحواصل جمع هى متتابعة كوشى لأعداد حقيقية ، بغض النظر عن كيفية اختيار النقط الوسطى حسب نظرية ١٦-١٠ ، تتقارب المتتابعة إلى عدد حقيقى ما  $L$  .

ومن ثم ، إذا كانت  $\varepsilon > 0$  ، فيوجد عدد صحيح  $N$  بحيث أن  $2/N < \varepsilon$  وأن

$$|S(Q_N; f, g) - L| < \varepsilon/2$$

إذا كانت  $P$  تكريراً للتقسيم  $Q_N$  ، فإنه ينتج من تكوين التقسيم  $Q_N$  أن

$$|S(P; f, g) - S(Q_N; f, g)| < 1/N < \varepsilon/2$$

ومن ثم لاي تنقية  $P$  للتقسيم  $Q_N$  وأى حاصل جمع لريمان واشتلتجز المناظر نحصل على

$$(29.6) \quad |S(P; f, g) - L| < \varepsilon$$

هذا يثبت أن  $f$  تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  في الفترة  $J$  وأن القيمة لهذا التكامل هو  $L$  . وهو المطلوب إثباته

## بعض خواص التكامل :

تنسب الخاصية الآتية أحياناً إلى الخطية الثنائية لتكامل ريمان اشتلتجز .

٢٩ - ه نظرية . (١) إذا كانت  $f_1$  و  $f_2$  قابليين للتكامل بالنسبة إلى  $g$  في  $J$  ، وكان  $\alpha, \beta$  عددين حقيقيين ، فإن  $\alpha f_1 + \beta f_2$  تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  في  $J$  وأن

$$(29.7) \quad \int_a^b (\alpha f_1 + \beta f_2) dg = \alpha \int_a^b f_1 dg + \beta \int_a^b f_2 dg$$

(ب) إذا كانت  $f$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g_1$  ،  $g_2$  في  $J$  ، وكان  $\alpha, \beta$  عددين حقيقيين ، فإن  $f$  تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g = \alpha g_1 + \beta g_2$  في  $J$  وأن

$$(29.8) \quad \int_a^b f dg = \alpha \int_a^b f dg_1 + \beta \int_a^b f dg_2$$

البرهان . (١) نفرض أن  $\varepsilon > 0$  ونفرض أن  $P_1 = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  ،  $P_2 = (y_0, y_1, \dots, y_m)$  تقسيمين للفترة  $J = [a, b]$  بحيث أنه إذا كانت  $Q$  تكريراً لكلتا  $P_1$  و  $P_2$  ، فإنه لأي حواصل جمع ريمان واشتلتجز المناظرة ، يكون

$$|I_1 - S(Q; f_1, g)| < \varepsilon, \quad |I_2 - S(Q; f_2, g)| < \varepsilon$$

بنفرض أن  $P_\varepsilon$  أي تقسيم للفترة  $J$  التي هي تكرير لكلتا  $P_1$  و  $P_2$  ( مثال ذلك ، ضم كل نقط التقسيم في  $P_1$  و  $P_2$  لتكوين  $P_\varepsilon$  ) . إذا كانت  $Q$  تقسيماً للفترة  $J$  بحيث أن  $P_\varepsilon \leq Q$  ، فإن كلتا العلاقتين في أعلى لا تزال صحيحة عند استخدام نفس النقط الوسطى نحصل بوضوح

$$S(Q; \alpha f_1 + \beta f_2, g) = \alpha S(Q; f_1, g) + \beta S(Q; f_2, g)$$

ينتج من هذا ومن المتباينات السابقة ان

$$\begin{aligned} |\alpha I_1 + \beta I_2 - S(Q; \alpha f_1 + \beta f_2, g)| &= |\alpha \{I_1 - S(Q; f_1, g)\} + \beta \{I_2 - S(Q; f_2, g)\}| \\ &\leq (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon \end{aligned}$$

هذا يبرهن أن  $\alpha I_1 + \beta I_2$  هو تكامل  $\alpha f_1 + \beta f_2$  بالنسبة إلى  $g$  . مما يثبت جزء (أ) ، برهان الجزء (ب) يكون ماثلاً وسيترك للقارئ . وهو المطلوب إثباته

توجد خاصية جممية مفيدة أخرى تمتلكها بواسطة تكامل ريمان -اشتلتجز ، أي ، بالنسبة للفترة التي فيها يكون التكامل ممثلاً ، ولكي نحصل على النتيجة الآتية نستخدم الصورة النهائية التي قدمت في تعريف ٢٩ - ٢ . نوعاً من النهاية أكثر تقييداً يتطلب المتباينة (٢٩ - ٣) لأي حاصل جمع لريمان - اشتلتجز المناظر لتقسيم  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  بحيث أن

$$\|P\| = \sup \{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\} < \delta(\varepsilon)$$

هذه الصورة النهائية تستخدم غالباً لتعريف تكامل ريمان وأحياناً تستخدم لتعريف تكامل ريمان-اشتلتجز . لكن ، يستخدم مؤلفون كثيرون التعريف الذى قدمناه ، والذى يرجع إلى س . بولارد ، لأنه يوسع بدرجة بسيطة فصل التوال القابلة للتكامل . كنتيجة لهذا التوسيع ، تكون النتيجة الآتية صحيحة بدون أى قيود إضافية . انظر تمرينات ٢٩ - ب - ص .

٢٩ - ٦ نظرية . (أ) نفرض أن  $a \leq c \leq b$  وأن  $f$  تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  في كلتا الفترتين الجزئيتين  $[c, b]$  و  $[a, c]$  . إذن  $f$  تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  في الفترة  $[a, b]$  ويكون

$$(29.9) \quad \int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg$$

(ب) نفرض أن  $f$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  في الفترة  $[a, b]$  ونفرض أن  $c$  تحقق  $a \leq c \leq b$  . فينتج أن  $f$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  في الفترتين الجزئيتين  $[a, c]$  و  $[c, b]$  وأن قانون (٩ - ٢٩) يظل صحيحاً .

البرهان . (أ) إذا كانت  $\varepsilon > 0$  ، نفرض  $P'_\varepsilon$  تقسيم الفترة  $[a, c]$  بحيث أنه إذا كانت  $P'$  تكريراً للتقسيم  $P'_\varepsilon$  ، فإن المتباينة (٣ - ٢٩) تظل صحيحة لأى حاصل جمع ريمان - اشتلتجز . نفرض أن  $P''_\varepsilon$  هي التقسيم المناظر للفترة  $[c, b]$  . إذا كانت  $P_\varepsilon$  هي التقسيم للفترة  $[a, b]$  المكون باستخدام نقاط التقسيم في  $P'_\varepsilon$  و  $P''_\varepsilon$  ، وإذا كانت  $P$  هي تكرير للتقسيم  $P_\varepsilon$  ، فنجد أن

$$S(P; f, g) = S(P'; f, g) + S(P''; f, g)$$

حيث  $P'$  و  $P''$  تدلان إلى تقسيمى  $[a, c]$  و  $[c, b]$  المنتج بواسطة  $P$  وحيث تستخدم النقاط الوسطى المناظرة . لذلك ، نحصل على

$$\left| \int_a^c f dg + \int_c^b f dg - S(P; f, g) \right| \leq \left| \int_a^c f dg - S(P'; f, g) \right| + \left| \int_c^b f dg - S(P''; f, g) \right| < 2\varepsilon$$

ينتج أن  $f$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  في  $[a, b]$  وأن القيمة لتكاملها هي

$$\int_a^c f dg + \int_c^b f dg$$

(ب) سنستخدم معيار كوشى ٢٩ - ٤ لنبرهن أن  $f$  تكون قابلة للتكامل في  $[a, c]$  . بما أن  $f$  قابلة للتكامل في  $[a, b]$  ، فبأخذ  $\varepsilon > 0$  يوجد تقسيم  $Q_\varepsilon$  للفترة  $[a, b]$  بحيث أنه إذا كانت  $P$  و  $Q$  تنقيتين للقيم  $Q_\varepsilon$  ، فإن علاقة (٢٩ - ٤) تظل قائمة لأى

حاصل جمع ريمان - اشتلتجز المناظر من الواضح أنه يمكننا افتراض أن النقطة  $c$  تنتمي إلى تقسيم  $Q$  ، ونفرض أن  $Q'$  تقسيم الفترة  $[a, c]$  ويتكون من هذه النقط للتقسيم  $Q$  التي تنتمي إلى  $[a, c]$  . نفرض أن  $P', Q'$  تقسيمان للفترة  $[a, c]$  اللذان هما تكريران للتقسيم  $Q'$  ونحصل على امتداديهما للتقسيمين  $Q$  و  $P$  للفترة  $[a, b]$  باستخدام النقط في  $O$  التي تنتمي إلى الفترة  $[c, b]$  . بما أن  $Q$  و  $P$  تكريران للتقسيم  $Q$  ، فينتج أن علاقة (٢٩ - ٤) تظل قائمة ، لكن ، من الواضح من حقيقة كون  $Q$  و  $P$  متطابقتين في  $[c, b]$  ذلك ، إذا استخدمنا نفس النقط الوسطى ، نجد أن

$$|S(P'; f, g) - S(Q'; f, g)| = |S(P; f, g) - S(Q; f, g)| < \varepsilon$$

إذن ، معيار كوشي يثبت قابلية التكامل للدالة  $f$  بالنسبة إلى  $g$  في الفترة الجزئية  $[a, c]$  ونفس المناقشة تستخدم أيضاً للفترة  $[c, b]$  . وبإثبات هذه القابلية للتكامل فإن جزء (أ) يثبت صحة القانون (٢٩ - ٩) .

حيث أننا لم نستبدل الدورين للتكاملية  $f$  والمكاملة  $g$  ، فربما لا يخطر على بال القارئ أنه ربما يكون من الممكن عمل ذلك . وبالرغم من أن النتيجة الآتية ليست بالضبط مثل « قانون التكامل بالتجزئ » لحساب التفاضل والتكامل ، فإن النتيجة مقاربة ونشير إليها عادة بذلك الاسم .

٢٩ - ٧ تكامل بالتجزئ . تكون دالة  $f$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  في  $[a, b]$  إذا وإذا فقط  $g$  كانت قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $f$  في  $[a, b]$  . في هذه الحالة يكون

$$(29.10) \quad \int_a^b f dg + \int_a^b g df = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

البرهان . سنفرض أن  $f$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  . نفرض أن  $\varepsilon > 0$  ونفرض أن  $P$  تقسيم الفترة  $[a, b]$  بحيث أنه إذا كانت  $Q$  تكريرا للتقسيم  $P$  ،  $S(Q; f, g)$  ، هي أى حاصل جمع ريمان - اشتلتجز المناظر ، فينتج

$$(29.11) \quad \left| S(Q; f, g) - \int_a^b f dg \right| < \varepsilon$$

الآن نفرض أن  $P$  تكرير للتقسيم  $P$  ونعتبر حاصل جمع ريمان - اشتلتجز  $S(P; g, f)$  المعطى بأنه

$$S(P; g, f) = \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}$$

حيث  $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$  . نفرض أن  $Q = (y_0, y_1, \dots, y_{2n})$  تقسيم الفترة  $[a, b]$  التي حصل عليها باستخدام كلتا  $\xi_k$  ،  $x_k$  كنقط تقسيم ، ومن ثم  $y_{2k} = x_k$  ،

$y_{2k-1} = \xi_k$  . اجمع واطرح الحدود  $f(y_{2k})g(y_{2k})$  عند  $k = 0, 1, \dots, n$  إلى  $S(P; g, f)$  واعد الترتيب للحصول على

$$S(P; g, f) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \sum_{k=1}^{2n} f(\eta_k)\{g(y_k) - g(y_{k-1})\}$$

حيث نختار النقط الوسطى  $\eta_k$  بحيث تكون النقط  $x_i$  إذن نحصل على

$$S(P; g, f) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - S(Q; f, g)$$

حيث التقسيم  $Q = (y_0, y_1, \dots, y_{2n})$

تكرير للتقسيم  $P$  حسب قانون (٢٩ - ١١) ، يكون

$$\left| S(P; g, f) - \left\{ f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f dg \right\} \right| < \varepsilon$$

بشرط أن  $P$  تكرير للتقسيم  $P$  . هذا يبرهن أن  $g$  تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $f$  في الفترة  $[a, b]$  مما يثبت قانون (٢٩ - ١٠) وهو المطلوب إثباته .

### تعديل التكامل :

عندما يكون للدالة المكاملة  $g$  مشتقة متصلة ، فن الممكن ومن المناسب غالباً أن نستبدل تكامل ريمان - اشتلتجز بتكامل ريمان . نقرر الآن صحة هذا الاختزال .

٢٩ - ٨ نظرية . إذا كانت المشتقة  $g'$  موجودة ومتصلة في  $J$  وإذا كانت  $f$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  ، فإن حاصل الضرب  $fg'$  قابل لتكامل ريمان

$$\int_a^b f dg = \int_a^b fg' \quad (29.12)$$

البرهان . الفرض يدل أن  $g'$  متصلة بانتظام في  $J$  . إذا كانت  $\varepsilon > 0$  ، فنفرض أن  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  تقسيم  $J$  بحيث أنه إذا كانت  $\xi_k$  و  $\zeta_k$  تنتمي إلى  $[x_{k-1}, x_k]$  فيكون  $|g'(\xi_k) - g'(\zeta_k)| < \varepsilon$  . نعتبر الفرق بين حاصل جمع ريمان - اشتلتجز  $S(P; f, g)$  وحاصل جمع ريمان  $S(P; fg')$  ، باستخدام نفس النقط الوسطى  $\xi_k$  لإجراء هذا نحصل على حاصل جمع الحدود في الصورة

$$f(\xi_k)\{g(x_k) - g(x_{k-1})\} - f(\xi_k)g'(\xi_k)\{x_k - x_{k-1}\}$$

إذا طبقنا نظرية القيمة المتوسطة ٢٧-٦ على  $g$  ، فيمكننا كتابة هذا الفرق في الصورة

$$f(\xi_k)\{g'(\zeta_k) - g'(\xi_k)\}(x_k - x_{k-1})$$

حيث  $\zeta_k$  نقطة ما في الفترة  $[x_{k-1}, x_k]$  . بما أن هذا الحد يكون مسودا (ومسيطرا) بالكية  $\|f\| (x_k - x_{k-1})$  فنستنتج أن

$$|S(P; f, g) - S(P; fg')| \leq \varepsilon \|f\| (b-a)$$

حيث التقسيم  $P$  يكون دقيقاً بدرجة كافية . بما أن التكامل في الطرف الأيسر من (٢٩-١٢) موجود وهو النهاية لحاصل جمع ريمان - اشتلتجز  $S(P; f, g)$  ، فنستنتج أن التكامل في الطرف الأيمن (٢٩ - ١٢) موجود أيضاً وأن التساوى يظل صحيحاً .

وهو المطلوب إثباته

لامتداد هذه النتيجة ، أنظر نظرية ٣٠ - ١٣ .

٢٩ - ٩ أمثلة . (أ) ينتج من النتائج التي سبهرن في باب ٣٠ أن الدالة  $f(x) = x$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g(x) = x^2$  في  $J = [0, 1]$  . وبفرض هذا ، فإن نظرية ٢٩-٨ توضح أن

$$\int_0^1 x d(x^2) = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \left. \frac{2}{3} x^3 \right|_0^1 = \frac{2}{3}$$

( قد استخدمنا هنا نتائج من حساب التفاضل والتكامل التي سبهرن في باب ٣٠ ) .

(ب) إذا استخدمنا نظرية ٢٩ - ٧ للتكامل بالتجزء للدالة الموجودة في (أ) ، نحصل على

$$\int_0^1 x d(x^2) = x^3 \Big|_0^1 - \int_0^1 x^2 dx = 1 - \left. \frac{1}{3} x^3 \right|_0^1 = \frac{2}{3}$$

(ج) ينتج من نتائج سبهرن في باب ٣٠ أن  $f(x) = \sin x$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g(x) = \cos x$  في الفترة  $J = [0, \pi/2]$  . وبفرض هذا ، نحصل على

$$\int_0^{\pi/2} \sin x d(\cos x) = \int_0^{\pi/2} \sin x (-\sin x) dx = -\left. \frac{1}{2} (\sin x)^2 \right|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

(د) إذا استخدمنا نظرية ٢٩ - ٧ للتكامل بالتجزء إلى جزء (ج) نحصل على

$$\int_0^{\pi/2} \sin x d(\cos x) = (\cos x)^2 \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos x d(\sin x)$$

ومن ثم ينتج أن

$$\int_0^{\pi/2} \sin x d(\cos x) = \frac{1}{2} (\cos x)^2 \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

(هـ) نورد أكبر دالة صحيحة في  $R$  إلى  $\bar{R}$  ، التي نرمز إليها بالرمز الخاص [ . ] والمعرفة بأنه إذا كانت  $x \in R$  ، فإن  $[x]$  هي أكبر عدد صحيح أقل أو يساوي  $x$  . ومن ثم  $[-3] = -3$  ،  $[e] = 2$  ،  $[\pi] = 3$  . يجب على القارئ عمل رسم تخطيطي لهذه الدالة وملاحظة أنها متصلة من اليمين ، بقفزات مساوية للواحد الصحيح عند الأعداد الصحيحة .



ينتج أنه إذا كانت  $f$  دالة متصلة في  $[0, 5]$  ، فإن  $f$  تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $x \in [0, 5]$  و  $g(x) = [x]$  ، وأن

$$\int_0^5 f(x) d([x]) = \sum_{j=1}^5 f(j)$$

(ف) ينتج من باب ٢٠ أن  $f(x) = x^2$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى كلتا  $g_1(x) = x$  و  $g_2(x) = [x]$  على  $[0, 5]$  . لذلك فهي قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g(x) = x + [x]$  ويكون

$$\begin{aligned} \int_0^5 x^2 d(x + [x]) &= \int_0^5 x^2 dx + \int_0^5 x^2 d([x]) \\ &= \frac{1}{3}5^3 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 \end{aligned}$$

### تمرينات :

٢٩ - (أ) إذا كانت  $f$  ثابتة في الفترة  $[a, b]$  ، فإنها قابلة للتكامل بالنسبة إلى أي دالة وأن

$$\int_a^b f dg = f(a)\{g(b) - g(a)\}$$

٢٩ - (ب) إذا كانت  $g$  كما في مثال ٢٩ - (ج) ، أثبت أن  $f$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  إذا وإذا فقط كانت  $f$  متصلة عند  $a$  .

٢٩ - (ج) بفرض أن  $g$  معرفة في  $I = [0, 1]$  بأنها  $g(x) = 0$  عند  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  ،  $g(x) = 1$  عند  $\frac{1}{2} < x \leq 1$  . أثبت أن  $f$  تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  في  $I$  إذا وإذا فقط  $f$  كانت متصلة عند  $\frac{1}{2}$  من اليمين . في هذه الحالة تكون قيمة التكامل هي  $f(\frac{1}{2})$  .

٢٩ - (د) وضح أن الدالة  $f$  ، المعطاة في مثال ٢٩ - (ح) قابلة للتكامل ريمان في  $I$  وأن القيمة لتكاملها هي صفر .

٢٩ - (هـ) إذا كانت  $f$  قابلة للتكامل في  $[a, b]$  بالنسبة إلى  $f$  ، فإن

$$\int_a^b f df = \frac{1}{2}((f(b))^2 - (f(a))^2)$$

(أ) أثبت هذا باختبار حاصل جمع ريمان - اشتلنجر لتقسيم  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  الذى نحصل عليه بأخذ  $\xi_k = x_k$  و  $\xi_k = x_{k-1}$

(ب) أثبت هذا باستخدام نظرية التكامل بالتجزئ ٢٩ - ٧ .

٢٩ - (و) أثبت مباشرة أنه إذا كانت  $f$  أكبر دالة أعداد صحيحة  $f(x) = [x]$  المعرفة في مثال ٢٩ - (ج) ، فإن  $f$  ليست قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $f$  في الفترة  $[0, 2]$

٢٩ - (ز) إذا كانت  $f$  هي دالة قابلة لتكامل ريمان في  $[0, 1]$  ، فإن

$$\int_0^1 f = \lim \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right)$$

٢٩ - (ح) وضع أنه إذا كانت  $g$  ليست قابلة لتكامل في  $[0, 1]$  ، فإن المتابعة للمتوسطات

$$\left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n}\right) \right)$$

ريمان تكون أولا تكون تقاربية .

٢٩ - (ط) وضع أن الدالة  $h$  ، المعرفة في  $I$  بأنها  $h(x) = x$  عند  $x$  قياسية ،  $h(x) = 0$  عند  $x$  غير قياسية ، ليست قابلة لتكامل ريمان في  $I$  .

٢٩ - (ي) بفرض أن  $f$  قابلة لتقابل ريمان في  $[a, b]$  . إذا كانت  $f_1$  دالة في  $[a, b]$  إلى  $\mathbb{R}$  بحيث أن  $f_1(x) = f(x)$  ما عدا عددا محدودا من نقط في  $[a, b]$  ، أثبت أن  $f_1$  قابلة لتكامل ريمان وأن

$$\int_a^b f_1 = \int_a^b f$$

أي أنه يمكننا تغيير القيمة لدالة قابلة لتكامل ريمان - أو تركها غير معرفة - عند عدد محدود من نقط .

٢٩ - (ك) أعط مثالا لتوضيح أن الاستنتاج للتمرين السابق ربما يفشل إذا كان العدد للنقط المستثناة لا نهائيا .

٢٩ - (ل) بفرض أن  $c \in (a, b)$  وبفرض  $k$  معرفة على  $[a, b]$  بأنها  $k(x) = 0$  و  $k(c) = 1$  عند  $x \in [a, b]$  ،  $x \neq c$  . إذا كانت  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  متصلة عند  $c$  أثبت مباشرة أن  $f$  تكون قابلة لتكامل بالنسبة إلى  $k$  ، وأن  $k$  تكون قابلة لتكامل بالنسبة إلى  $f$  وأن

$$\int_a^b f dk = \int_a^b k df = 0$$

٢٩ - (م) نفرض أن  $f$  قابلة لتكامل بالنسبة إلى  $g$  في  $[a, b]$  . إذا كانت  $g_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  بحيث أن  $g_1(x) = g(x)$  باستثناء عدد محدود من نقط في  $(a, b)$  التي عندها  $f$  تكون متصلة ، فإذن  $f$  تكون قابلة لتكامل بالنسبة إلى  $g_1$  وأن

$$\int_a^b f dg_1 = \int_a^b f dg$$

٢٩ - (ن) نفرض أن  $g$  متصلة في  $[a, b]$  ، وأن  $x \rightarrow g'(x)$  موجودة ومتصلة في  $\{c\} \setminus [a, b]$  ، وأن النهايات بطرف واحد

$$g'(c-) = \lim_{x \rightarrow c-} g'(x), \quad g'(c+) = \lim_{x \rightarrow c+} g'(x)$$

موجودة . إذا كانت  $f$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  في  $[a, b]$  ، فإن  $fg'$  يمكن تعريفها عند  $c$  بأنها قابلة للتكامل ريمان في الفترة  $[a, b]$  وبحيث أن

$$\int_a^b f dg = \int_a^b fg'$$

( ارشاد : اعتبر تمرين ٢٧ - ن ) .

٢٩ - (س) إذا كانت  $f$  قابلة للتكامل ريمان في  $[-5, 5]$  ، أثبت أن  $f$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g(x) = |x|$  وأن

$$\int_{-5}^5 f dg = \int_0^5 f - \int_{-5}^0 f$$

٢٩ - (ع) إذا كانت  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  تقسيم للفترة  $J = [a, b]$  ، وبفرض أن  $\|P\|$  معرفة بالتعريف

$$\|P\| = \sup \{x_j - x_{j-1} : j = 1, 2, \dots, n\}$$

فإننا نسمى  $\|P\|$  العمود للتقسيم  $P$  . نعرف  $f$  بأنها قابلة للتكامل - (\*) بالنسبة إلى  $g$  في  $J$  في حالة وجود عدد  $A$  بالخاصية التي تقول أنه إذا كانت  $\varepsilon > 0$  فإنه يوجد  $\delta(\varepsilon) > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $\|P\| < \delta(\varepsilon)$  وإذا كانت  $S(P; f, g)$  أى حاصل جمع ريمان - اشتلتجز المناظر ، فإن  $|S(P; f, g) - A| < \varepsilon$  . إذا كان هذا يتحقق فإن العدد  $A$  يسمى تكامل - (\*) للدالة  $f$  بالنسبة إلى  $g$  في  $J$  . وضح أنه إذا كانت  $f$  قابلة للتكامل - (\*) بالنسبة إلى  $g$  في  $J$  ، فإن  $f$  تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  ( بمعنى تعريف ٢٩ - ٢ ) وأن القيم لهذه التكاملات تكون متساوية .

٢٩ - (ف) بفرض أن  $g$  معرفة في  $I$  كما في تمرين ٢٩ - ج وضح أن دالة محدودة  $f$  تكون قابلة للتكامل - (\*) بالنسبة إلى  $g$  بمعنى التمرين السابق إذا وإذا فقط كانت  $f$  متصلة عند  $\frac{1}{2}$  حيث القيمة للتكامل - (\*) هي  $f(\frac{1}{2})$  . إذا كانت  $h$  معرفة بأنها

$$h(x) = 0, \quad 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ = 1, \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

فإن  $h$  تكون قابلة للتكامل - (\*) بالنسبة إلى  $g$  في  $[0, \frac{1}{2}]$  وفي  $[\frac{1}{2}, 1]$  لكن ليست قابلة للتكامل - (\*) بالنسبة إلى  $g$  في  $[0, 1]$  . ومن ثم ربما تفشل نظرية ٢٩ - ٦ (أ) للتكامل - (\*) .

٢٠ - (ص) نفرض أن  $g(x) = x$  عند  $x \in J$  . وضح أنه يوجد لهذه المكاملة دالة  $f$  تكون قابلة للتكامل بمعنى تعريف ٢٩ - ٢ إذا وإذا فقط كانت قابلة لتكامل - (ع) بمعنى مفهوم تمرين ٢٩ - ب .

٢٩ - (ق) يفرض أن  $f$  قابلة لتكامل ريمان في  $J$  وبفرض أن  $f(x) \geq 0$  عند  $x \in J$  إذا كانت  $f$  متصلة عند نقطة  $c \in J$  وإذا كانت  $f(c) > 0$  ، فيكون

$$\int_a^b f > 0$$

٢٩ - (ر) يفرض أن  $f$  قابلة لتكامل ريمان في  $J$  وبفرض أن  $f(x) < 0$  عند  $x \in J$  . وضح أن

$$\int_a^b f < 0$$

(إرشاد : لكل  $n \in \mathbb{N}$  ، نفرض  $H_n$  هي الأفعال لفئة النقط  $x \in J$  بحيث أن  $f(x) > 1/n$  ) استخدم تمرين (١١ - ن) .

### مشروعات :

٢٠ -  $\alpha$  يستخدم التوضيح الآتي أحيانا كتقريب لتكامل ريمان - اشتلتجز . عندما تكون الدالة المكاملة  $g$  تزايدية باطراد في الفترة  $J$  . (هذا التطوير له الميزة التي تقول أنه يسمح لتعريف التكاملات العليا والسفلى التي تكون دائما موجودة لدالة محدودة  $f$  . لكن ، له عيب وهو أنه يضع قيوداً إضافية على  $g$  ويميل لخدش القائل بدرجة ما لتكامل ريمان - شلتلتجز المعطى بالتكامل بالتجزئ نظرية (٢٩ - ٧) . إذا كانت  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  تقسما للفترة  $J = [a, b]$  وأن  $f$  دالة محدودة في  $J$  فنفرض أن  $m_f$  و  $M_f$  معرفتين بأنهما الأدنى والأعلى للدالة  $\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$  على الترتيب بالنسبة للتقسيم  $P$  ، عرف حاصل الجمع الأصغر وحاصل الجمع الأعلى للدالة  $f$  بالنسبة إلى  $g$  كما يلي :

$$L(P; f, g) = \sum_{i=1}^n m_i \{g(x_i) - g(x_{i-1})\},$$

$$U(P; f, g) = \sum_{i=1}^n M_i \{g(x_i) - g(x_{i-1})\}$$

(أ) إذا كانت  $S(P; f, g)$  أى حاصل جمع ريمان - اشتلتجز المناظر إلى  $P$  ، فإن

$$L(P; f, g) \leq S(P; f, g) \leq U(P; f, g)$$

(ب) إذا كانت  $\varepsilon > 0$  فإنه يوجد حاصل جمع ريمان - اشتلتجز  $S_1(P; f, g)$  لناظر إلى  $P$  حيث أن

$$S_1(P; f, g) \leq L(P; f, g) + \varepsilon$$

، أنه يوجد حاصل جمع ريمان - اشتلتجز  $S_2(P; f, g)$  المناظر إلى  $P$  بحيث أن

$$U(P; f, g) - \varepsilon \leq S_2(P; f, g)$$

(ج) إذا كانت  $Q$  و  $P$  تقسيمين للفترة  $J$  وكانت  $Q$  تكريرا لتقسيم  $P$  ( أى أن  $P \subseteq Q$  ) ، فإن

$$L(P; f, g) \leq L(Q; f, g) \leq U(Q; f, g) \leq U(P; f, g)$$

(د) إذا كانت  $P_1$  و  $P_2$  أى تقسيمين للفترة  $J$  ، فإن  $L(P_1; f, g) \leq U(P_2; f, g)$  [ ارشاد : افرض أن  $Q$  هو التقسيم الذى يكون تكريرا لكلتا  $P_1$  و  $P_2$  واستخدام (ج) ] .

(هـ) عرف التكامل الأدنى والتكامل الأعلى للدالة  $f$  بالنسبة إلى  $g$  ليكونا على الترتيب

$$L(f, g) = \sup \{L(P; f, g)\},$$

$$U(f, g) = \inf \{U(P; f, g)\}$$

هنا يؤخذ الأعلى والأدنى على جميع كل تقسيمات  $P$  للفترة  $J$  . أثبت أن  $L(f, g) \leq U(f, g)$  (و) وضع أن  $f$  تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى الدالة التزايدية  $g$  إذا وإذا فقط كان التكامل الأدنى والتكامل الأعلى المذكور في (هـ) متساويين في هذه الحالة تكون القيمة المشتركة لهذين التكاملين مساوية إلى

$$\int_a^b f dg$$

وضع أن  $f$  تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  إذا وإذا فقط تحقق شرط ريمان الآتى وهو : لكل  $\varepsilon > 0$  يوجد تقسيم  $P$  بحيث أن  $U(P; f, g) - L(P; f, g) < \varepsilon$

(ز) إذا كانت  $f_1$  و  $f_2$  محدودتين في  $J$  ، فإن التكامل الأدنى والتكامل الأعلى للدالة  $f_1 + f_2$  يحققان

$$L(f_1 + f_2, g) \geq L(f_1, g) + L(f_2, g),$$

$$U(f_1 + f_2, g) \leq U(f_1, g) + U(f_2, g)$$

أثبت أن تلك المتباينة الدقيقة يمكن أن تظل صحيحة في هذه العلاقات .

٢٩ -  $\beta$  هذا المشروع والمشروعان الآتيان تقدم وتدرس عائلة هامة من الدوال التى لها

« تغير محدود » في فترة مدمجة . نفرض أن  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  معطاة ، إذا كانت

$$P = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

تقسيم الفترة  $[a, b]$  ، نفرض أن  $v_f(P)$  معرفة بأنها

$$v_f(P) = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

إذا كانت الفئة  $\{v_f(P) : P\}$  تقسيميا للفترة  $[a, b]$  محدودة ، فنقول أن  $f$  لها تغير محدود في  $[a, b]$  . المجموعة لكل الدوال التي لها تغير محدود في الفترة  $[a, b]$  يرمز لها بالرمز  $BV[a, b]$  أو بالرمز  $BV([a, b])$  . إذا كانت  $f \in BV[a, b]$  ، فنجد أن

$$V_f[a, b] = \sup_P v_f(P) \text{ تقسيم } [a, b]$$

نسمى العدد  $V_f[a, b]$  التغير الكلي للدالة  $f$  في  $[a, b]$  . أثبت أن  $V_f[a, b] = 0$  إذا وإذا فقط كانت  $f$  دالة ثابتة في  $[a, b]$  .

(أ) إذا كانت  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  وإذا كانت  $P$  و  $Q$  تقسيمين للفترة  $[a, b]$  ، وإذا كانت  $P \geq Q$  ، أثبت أن  $v_f(P) \geq v_f(Q)$  . إذا كانت  $f \in BV[a, b]$  ، وضع أنه توجد متتابة  $(P_n)$  لتقسيمات الفترة  $[a, b]$  بحيث أن  $V_f[a, b] = \lim (v_f(P_n))$

(ب) إذا كانت  $f$  دالة تزايدية مطردة في  $[a, b]$  ، أثبت أن  $f \in BV[a, b]$  وأن  $V_f[a, b] = f(b) - f(a)$  . ماذا إذا كانت  $f$  دالة تناقصية باطراد في  $[a, b]$  ؟

(ج) إذا كانت  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  تحقق شرط لبشر  $|g(x) - g(y)| \leq M|x - y|$  لكل  $x, y$  في  $[a, b]$  ، أثبت أنه  $g \in BV[a, b]$  وأن  $V_g[a, b] \leq M(b - a)$  . إذا كانت  $h'(x) \leq M$  لكل  $x \in [a, b]$  ، فإن  $h \in BV[a, b]$  ،

$$V_h[a, b] \leq M(b - a)$$

لكن ، اعتبر  $k(x) = \sqrt{x}$  في  $[0, 1]$

(د) إذا كانت  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  معرفة على  $f(x) = 0$  عند  $x = 0$  ،  $f(x) = \sin(1/x)$  عند  $0 < x \leq 1$  . أثبت أن  $f$  ليس لها تغير محدود في  $[0, 1]$  . إذا كانت  $g$  معرفة بأنها  $g(x) = xf(x)$  عند  $x \in [0, 1]$  ، أثبت أن  $g$  متصلة وليس لها تغير محدود في  $[0, 1]$  . لكن ، إذا كانت  $h$  معرفة بأنها  $h(x) = x^2 f(x)$  عند  $x \in [0, 1]$  ، أثبت أن  $h$  ليس لها تغير محدود في الفترة  $[0, 1]$  .

(هـ) إذا كانت  $f \in BV[a, b]$  وضح أن  $|f(x)| \leq |f(a)| + V_f[a, b]$  لكل

$$x \in [a, b] ، \|f\|_1 \leq |f(a)| + V_f[a, b]$$

(و) إذا كانت  $\alpha \in \mathbb{R}$  و  $f, g \in BV[a, b]$  وضح أن  $f + g$  و  $\alpha f$  تنتميان إلى  $BV[a, b]$  وأن

$$V_{\alpha f}[a, b] = |\alpha| V_f[a, b],$$

$$V_{f+g}[a, b] \leq V_f[a, b] + V_g[a, b]$$

وإذن يكون  $BV[a, b]$  قيمة فراغ الدوال .

(ز) إذا كانت  $f, g \in BV[a, b]$  أثبت أن حاصل ضرب  $fg$  ينتمي إلى  $BV[a, b]$  وأن

$$V_{fg}[a, b] \leq \|f\|_1 V_g[a, b] + \|g\|_1 V_f[a, b]$$

وضح أن خارج قسمة الدالتين في  $BV[a, b]$  ربما لا ينتمي إلى  $BV[a, b]$  .

(ح) أثبت أن الراسم  $f \mapsto V_f[a, b]$  ليس عموديا على متجه الفراغ  $BV[a, b]$  ، لكن الراسم

$$f \mapsto \|f\|_{BV} = |f(a)| + V_f[a, b]$$

عمودى على هذا الفراغ .

٢٩ - γ نستمر في دراستنا لدوال لها تغير محدود في فترة  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  .

(أ) إذا كانت  $f \in BV[a, b]$  وإذا كانت  $c \in (a, b)$  ، أثبت أن القيود على  $f$  إلى  $[a, c]$  ،  $[c, b]$  لها تغير محدود في هذه الفترات وأن

$$V_f[a, b] = V_f[a, c] + V_f[c, b]$$

وبالعكس ، إذا كانت  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  بحيث أنه لبعض  $c \in (a, b)$  نجد أن  $g \in BV[a, c]$  ،  $g \in BV[c, b]$  ، فإن  $g \in BV[a, b]$  .

(ب) إذا كانت  $f \in BV[a, b]$  ، فنعرف  $p_f(x) = V_f[a, x]$  عند  $x \in [a, b]$  ،  $p_f(a) = 0$  ، أثبت أن  $p_f$  دالة تزايدية في  $[a, b]$  .

(ج) لاحظ أنه إذا كانت  $a \leq x \leq y \leq b$  ، فإن

$$f(y) - f(x) \leq V_f[x, y]$$

أثبت أنه إذا عرفنا  $n_f(x) = p_f(x) - f(x)$  عند  $x \in [a, b]$  ، فإن  $n_f$  تكون دالة تزايدية .

(د) أثبت أن دالة  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  تنتمي إلى  $BV[a, b]$  إذا وإذا فقط كانت عبارة عن الفرق بين دالتين متزايدتين .

(هـ) إذا كانت  $f \in BV[a, b]$  متصلة من اليمين عند النقطة  $c \in (a, b)$  ، وإذا كانت  $\varepsilon > 0$  ، أثبت أنه يوجد  $\delta > 0$  ونقسم بحيث أنه إذا كانت

$$Q = (c < x_1 < \dots < x_n = b)$$

تقسما دقيقا كافيا في الفترة  $[c, b]$  حيث  $x_1 - c < \delta$  ، فإن

$$V_f[a, b] - \frac{1}{2}\varepsilon \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \sum_{k=2}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + V_f[x_1, b]$$

ومن ثم ينتج أن

$$V_f[c, x_1] = V_f[c, b] - V_f[x_1, b] < \varepsilon$$

وضح أن  $f$  متصلة عند  $c \in [a, b]$  ، وإذا فقط كانت  $p_f$  متصلة عند  $c$  .

(و) استنتج أن دالة متصلة  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  تنتمي إلى  $BV[a, b]$  إذا وإذا فقط كانت الفرق بين متزايدتين متصلتين .

٢٩ -  $\delta$  برهن ليبيج على أن دالة لها تغير محدود يكون لها مشتقة عند كل نقطة ربما ماعدا نقاط الفئة « مقياس صفر » البرهان لهذه النتيجة صعب نوعا ما وسوف لا يلخص هنا ، لكن سوف نحصل على بعض خواص أكثر لثقل هذه الدوال .

(أ) إذا كانت  $f \in BV[a, b]$  وإذا كانت  $c \in (a, b)$  ، فإن نهاية الطرف الأيمن ونهاية الطرف الأيسر للدالة  $f$  عند  $c$  موجودتان . هاتان النهايتان متساويتان ربما ما عدا النقاط لمجموعة عديدة من نقاط الفترة  $[a, b]$  .

(ب) إذا كانت  $(f_n)$  متتابعة للدوال متصلة في  $BV[a, b]$  وكانت تتقارب في  $[a, b]$  إلى دالة  $f$  ، وضح أنه لا ينتج أن  $f$  تنتمي إلى  $BV[a, b]$  .

(ج) نفرض أن  $(f_n)$  متتابعة في  $BV[a, b]$  ومتقاربة عند كل نقطة للفترة  $[a, b]$  إلى الدالة  $f$  ، ونفرض أنه عند بعض  $M > 0$  يكون  $V_n[a, b] \leq M$  لكل  $n \in \mathbb{N}$  أثبت أن  $f$  تنتمي إلى  $BV[a, b]$  وأن  $V_f[a, b] \leq M$  .

(د) نفرض أن  $(f_n)$  متتابعة في  $BV[a, b]$  بحيث أن

$$m, n \rightarrow \infty \quad \text{عند} \quad \|f_n - f_m\|_{BV} \rightarrow 0$$

أثبت أنه توجد دالة  $f \in BV[a, b]$  بحيث أن

$$n \rightarrow \infty \quad \text{عند} \quad \|f_n - f\|_{BV} \rightarrow 0$$

(هـ) نفرض أن  $(f_n)$  متتابعة للدوال متزايدة باطراد ، معرفة في  $I = [a, b]$  بحيث أن  $\|f_n\|_1 \leq M$  لكل  $n \in \mathbb{N}$  . استخدم العملية القطرية للحصول على متتابعة جزئية  $(g_k)$  للدالة  $(f_n)$  بحيث تتقارب لكل عدد قياسي  $r$  في  $[a, b]$  . عرف

$$r \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \quad \text{عند} \quad g(r) = \lim (g_k(r))$$

أثبت أن  $g$  متزايدة في  $\mathbb{Q} \cap [a, b]$  . تعرف  $g$  عند  $x \in [a, b)$  كنهاية الطرف الأيمن  $g(x) = \lim_{r \rightarrow x} g(r)$  أثبت أنه إذا كانت  $c \in [a, b)$  هي نقطة اتصال الدالة  $g$  فإن  $g(c) = \lim_k g_k(c)$  وبما أن  $g$  لها على الأكثر مجموعة معدودة من نقاط عدم الاتصال فإنه



يمكن استخدام تطبيق العملية القطرية أيضاً للحصول على متتابعة جزئية  $(h_m)$  المتتابة  $(g_k)$  التي تتقارب في كل مكان من  $[a, b]$  .

(و) باستخدام جزء (أ) ، أثبت النتيجة الآتية ، المساعدة بنظرية اختيار هيللي . نفرض أن  $(f_n)$  متتابعة لدوال في  $BV[a, b]$  بحيث أن  $\|f\|_{BV} \leq M$  لكل  $n \in \mathbb{N}$  فإذاً توجد متتابعة جزئية للمتتابة  $(f_n)$  وتتقارب عند كل نقطة في الفترة  $[a, b]$  لدالة  $f \in BV[a, b]$  حيث عندها يكون  $\|f_n\|_{BV} \leq M$

## الباب الثالثون — وجود التكامل :

كونا في الباب السابق بعض خواص مفيدة لتكامل ريمان — اشتلتجز . لكن ، لم نوضح لأن إثبات وجود التكامل لدوال كثيرة جداً .

سنركز في هذا الباب اهتمامنا على دوال متكاملة متزايدة باطراد ، مع أن معظم ما نعمله يمكن امتداده إلى دوال  $g$  التي لها تغير محدود في فترة  $J = [a, b]$  بمعنى أنه يوجد ثابت  $M > 0$  بحيث أنه إذا كانت

$$P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$$

أي تقسيم للفترة  $J$  ، فإن

$$(30.1) \quad \sum_{j=1}^n |g(x_j) - g(x_{j-1})| \leq M$$

من الواضح أنه ، إذا كانت  $g$  متزايدة باطراد ، فإن حاصل الجمع في  $(30.1)$  يعتبر تلسكوبياً ويمكن أخذ  $M = g(b) - g(a)$  . ومن ثم دالة متزايدة باطراد يكون لها تغير محدود وبالعكس ، يمكن توضيح أن كل دالة لها تغير محدود هي عبارة عن الفرق بين دالتين متزايدتين . (أنظر مشروع ٢٩ - ٧) .

سنثبت أولاً نتيجة قوية جداً .

٣٠ - ١ معيار ريمان لقابلية التكامل . نفرض أن  $J = [a, b]$  وأن  $g$  متزايدة باطراد في  $J$  . دالة  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  في الفترة  $J$  إذا وإذا فقط فإن كان يوجد لكل  $\varepsilon > 0$  تقسيم  $P_\varepsilon$  لفترة  $J$  بحيث أنه إذا كانت  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  تكريرا للتقسيم  $P_\varepsilon$  ، فإن

$$(30.2) \quad \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) \{g(x_j) - g(x_{j-1})\} < \varepsilon$$

حيث  $M_j = \sup \{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}$  and  $m_j = \inf \{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}$  عند  $j = 1, \dots, n$

البرهان . إذا كانت  $f$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  وأن  $\varepsilon > 0$  مطاة ، فنفرض أن  $P_\varepsilon$  تقسيم لفترة  $J$  بحيث أنه إذا كانت  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  تكريرا للتقسيم  $P_\varepsilon$  ، فإن

$$\left| S(P; f, g) - \int_a^b f dg \right| < \varepsilon$$

لاى حاصل جمع ريمان - اشتلتجز المناظر إلى  $P$  . نختار الآن  $z_j$  و  $y_j$  في  $[x_{j-1}, x_j]$  بحيث أن

$$M_j - \varepsilon < f(y_j), \quad f(z_j) < m_j + \varepsilon$$

هذا يدل على أن  $M_j - m_j < f(y_j) - f(z_j) + 2\varepsilon$  ومن ثم

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) \{g(x_j) - g(x_{j-1})\} &\leq \sum_{j=1}^n f(y_j) \{g(x_j) - g(x_{j-1})\} \\ &\quad - \sum_{j=1}^n f(z_j) \{g(x_j) - g(x_{j-1})\} + 2\varepsilon \{g(b) - g(a)\} \end{aligned}$$

الآن محتوى الطرف الأيمن لهذه المتباينة على إثنين من حواصل جمع ريمان - اشتلتجز المناظرة إلى  $P$  ، واللذين لا يمكن أن يكون الفرق بينهما أكثر من  $2\varepsilon$  . ومن ثم يتحقق الشرط (٣٠ - ٢) عندما  $\varepsilon$  تستبدل بالمقدار  $\{g(b) - g(a)\}$

وبالعكس نفرض أن  $\varepsilon > 0$  مطاة وأن  $P_\varepsilon$  تقسيم بحيث أن (٣٠ - ٢) تظل قائمة لاى تقسيم  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  ينطبق التقسيم  $P_\varepsilon$  . نفرض أن  $Q = (y_0, y_1, \dots, y_m)$  تنقية أو تكرير التقسيم  $P$  ، سوف نحسب الفرق  $S(P; f, g) - S(Q; f, g)$  لحاصل الجمع المناظرين . بما أن كل نقطة في  $P$  تنتمي إلى  $Q$  يمكننا كتابة كلا من حاصل الجمع في الصورة

$$S(P; f, g) = \sum_{k=1}^m f(u_k) \{g(y_k) - g(y_{k-1})\},$$

$$S(Q; f, g) = \sum_{k=1}^m f(v_k) \{g(y_k) - g(y_{k-1})\}$$

لكن ، لكي نكتب  $S(P; f, g)$  بدلالة النقط في  $Q$  ، يجب السماح بتكرار النقط  $u_k$  ولانحتاج إلى إنشاء  $u_k$  إلى  $[y_{k-1}, y_k]$  . لكن ، كلا من  $u_k$  ،  $v_k$  تنتمي تأكيدا إلى فترة ما  $[x_{j-1}, x_j]$  وفي هذه الحالة  $|f(u_k) - f(v_k)| \leq M_j - m_j$  . بالضرب في  $g(y_k) - g(y_{k-1}) \geq 0$  ثم الجمع ، نحصل على

$$|S(P; f, g) - S(Q; f, g)| \leq \sum (M_j - m_j) \{g(x_j) - g(x_{j-1})\} < \varepsilon$$

أخيراً ، نفرض أن  $P'$  و  $P$  تكريران اختياراتان للتقسيم  $P_\varepsilon$  ونفرض أن  $Q$  تكرير مشترك لكل من  $P$  و  $P'$  . بما أن النقاش السابق يطبق على كل من  $P$  و  $P'$  ، فنستنتج أن

الفرق بين حاصل الجمع  $S(P; f, g)$  ،  $S(P'; f, g)$  يكون مساويا على الأكثر  $2\varepsilon$  . ومن ثم يستخدم معيار كوشي ٢٩ -  $\varepsilon$  لإثبات قابلية التكامل للدالة  $f$  . وهو المطلوب إثباته

٣٠ - ٢ نظرية القابلية للتكامل . إذا كانت  $f$  متصلة ،  $g$  متزايدة باطراد في  $J$  ، فإن  $f$  تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  في  $J$  .

البرهان . حيث أن  $f$  متصلة بانتظام في  $J$  ، فبأخذ  $\varepsilon > 0$  نجد أنه يوجد  $\delta(\varepsilon) > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $x, y \in J$  ،  $|x - y| < \delta(\varepsilon)$  فإن  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  .  
نفرض أن  $P_\varepsilon = (z_0, z_1, \dots, z_r)$  تقسيم بحيث أن  $\sup \{z_k - z_{k-1}\} < \delta(\varepsilon)$   
إذا كانت  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  تكريرا للتقسيم  $P_\varepsilon$  ، فيكون أيضاً  $\sup \{x_i - x_{i-1}\} < \delta(\varepsilon)$  وكذلك  $M_i - m_i < \varepsilon$  ، ومنها ينتج أن

$$\sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \{g(x_i) - g(x_{i-1})\} \leq \varepsilon (g(b) - g(a))$$

بما أن  $\varepsilon > 0$  اختيارية ، فإن معيار ريمان يستخدم وهو المطلوب إثباته

٣٠ - ٣ نتيجة . إذا كانت  $f$  مطردة وكانت  $g$  متصلة في  $J$  ، فإن  $f$  تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  في  $J$  .

البرهان . استخدم النظرية السابقة ونظرية ٢٩ - ٧ للدالة  $f \pm$  .

وهو المطلوب إثباته

يمكننا معيار ريمان من توضيح أن القيمة المطلقة وحاصل ضرب دوال قابلة للتكامل تكون قابلة للتكامل .

٣٠ - ٤ نظرية . نفرض أن  $g$  متزايدة باطراد في الفترة  $J = [a, b]$  .

(أ) إذا كانت  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  قابلة للتكامل ، حينئذ  $|f|$  تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  في  $J$  .

(ب) إذا كانت  $f_1$  و  $f_2$  قابلتين للتكامل ، فإن حاصل الضرب  $f_1 f_2$  يكون قابلا للتكامل بالنسبة إلى  $g$  في  $J$  .

البرهان . نفرض أن  $M_i$  و  $m_i$  هما نفس المعنى المذكور في معيار ريمان ولاحظ أن

$$M_i - m_i = \sup \{f(x) - f(y) : x, y \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

لبرهنة (أ) ، لاحظ أن  $|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)|$  ، لذلك يدل معيار ريمان على أن  $|f|$  قابلة للتكامل إذا كانت الدالة  $f$  قابلة للتكامل .

تلاحظ أيضاً أنه إذا كانت  $|f(x)| \leq K$  عند  $x \in J$  ، فإن :

$$|(f(x))^2 - (f(y))^2| \leq 2K |f(x) - f(y)|$$

أى أن معيار ريمان يدل على أن  $f^2$  قابلة للتكامل إذا كانت  $f$  قابلة للتكامل .

لبرهنة أن  $f_1 f_2$  قابلة للتكامل إذا كانت كل من  $f_1$  و  $f_2$  قابلة للتكامل ، لاحظ أن

$$2f_1 f_2 = (f_1 + f_2)^2 - f_1^2 - f_2^2$$

وهو المطلوب إثباته

٣٠-٥ مفترض . نفرض أن  $g$  متزايدة باطراد في الفترة  $J = [a, b]$  ونفرض

أن  $f$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  في  $J$  . حينئذ .

$$(30.3) \quad \left| \int_a^b f dg \right| \leq \int_a^b |f| dg \leq \|f\|_r (g(b) - g(a))$$

إذا كانت  $m \leq f(x) \leq M$  لجميع  $x \in J$  ، حينئذ

$$(30.4) \quad m(g(b) - g(a)) \leq \int_a^b f dg \leq M(g(b) - g(a))$$

البرهان . ينتج من نظرية ٣٠-٤ أن  $|f|$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  .

إذا كانت  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  تقسيماً للفترة  $J$  وأن  $(z_j)$  هي فئة نقط وسطى ،

فمنجذ عند  $j = 1, 2, \dots, n$  أن

$$- \|f\|_r \leq -|f(z_j)| \leq f(z_j) \leq |f(z_j)| \leq \|f\|_r$$

بالضرب في  $g(x_j) - g(x_{j-1}) \geq 0$  ثم الجمع لنحصل على التقدير

$$- \|f\|_r (g(b) - g(a)) \leq -S(P; |f|, g) \leq S(P; f, g) \leq S(P; |f|, g) \leq \|f\|_r (g(b) - g(a))$$

وإذن ينتج أن  $|S(P; f, g)| \leq S(P; |f|, g) \leq \|f\|_r (g(b) - g(a))$  مما يثبت صحة

(٣٠-٣) . البرهان المتباينة (٣٠-٤) مماثل وسيحذف

وهو المطلوب إثباته

### حساب التكامل :

النتيجتان الآتيتان مقيدتان بطبيعتهما ، لكن نقودنا أيضاً إلى النظرية الأساسية التي هي الوسيلة الأولية لحساب تكاملات ريمان .

٣٠-٦ النظرية الأولى للقيمة المتوسطة . إذا كانت  $g$  تزايدية في الفترة  $J = [a, b]$

و كانت  $f$  متصلة في  $J$  إلى  $R$  ، حينئذ يوجد عدد  $c$  في الفترة  $J$  بحيث أن

$$(30.5) \quad \int_a^b f dg = f(c) \int_a^b dg = f(c) \{g(b) - g(a)\}$$

البرهان . إذا كانت  $m = \inf \{f(x) : x \in J\}$  و  $M = \sup \{f(x) : x \in J\}$  فقد كان واضحاً في المفترض السابق أن

$$m\{g(b) - g(a)\} \leq \int_a^b f dg \leq M\{g(b) - g(a)\}$$

إذا كانت  $g(b) = g(a)$  ، فإن العلاقة (٣٠ - ٥) تافهة ، إذا كانت  $g(b) > g(a)$  ، فإنه ينتج من نظرية القيمة المتوسطة لـ بولتزانو ٢٢ - ٤ أنه يوجد عدد  $c$  في الفترة  $J$  بحيث أن

$$f(c) = \left\{ \int_a^b f dg \right\} / \{g(b) - g(a)\}$$

وهو المطلوب إثباته

٣٠ - ٧ نظرية تفاضل . نفرض أن  $f$  متصلة  $J$  وإن  $g$  متزايدة في  $J$  ولها مشتقة عند نقطة  $c$  في  $J$  . حينئذ الدالة  $F$  ، المعرفة للعنصر  $x$  في الفترة  $J$  بأنها

$$F(x) = \int_a^x f dg$$

لها مشتقة عند  $c$  وأن  $F'(c) = f(c) g'(c)$  .

البرهان . إذا كانت  $h > 0$  بحيث أن  $c + h$  تنتمي إلى الفترة  $J$  ، فينتج من نظرية ٢٩ - ٦ وبن النتيجة السابقة أن

$$\begin{aligned} F(c+h) - F(c) &= \int_a^{c+h} f dg - \int_a^c f dg = \int_c^{c+h} f dg \\ &= f(c_1) \{g(c+h) - g(c)\} \end{aligned}$$

عند  $c_1$  ما حيث  $c \leq c_1 \leq c+h$  . تظل علاقة مشابهة صحيحة إذا كان  $h < 0$  . بما أن  $f$  متصلة والدالة  $g$  لها مشتقة عند  $c$  ، إذن  $F'(c)$  تكون موجودة ومساوية إلى  $f(c) g'(c)$  . وهو المطلوب إثباته

بتخصيص هذه النظرية لحالة ريمان ، نحصل على النتيجة التي نعتمدنا بالأساسيات للطريقة المألوفة لحساب التكاملات في حساب التفاضل والتكامل .

٣٠ - ٨ نظرية أساسية لحساب التفاضل والتكامل . نفرض أن  $f$  متصلة في الفترة  $J = [a, b]$  . دالة  $F$  في الفترة  $J$  تحقق

$$(30.6) \quad F(x) - F(a) = \int_a^x f \quad \text{for } x \in J$$

إذا وإذا فقط كانت  $F' = f$  في  $J$ .

البرهان . إذا ظلت العلاقة ( ٣٠ - ١ ) صحيحة وكانت  $c \in J$  ، فإنه يتضح من النظرية السابقة أن  $F'(c) = f(c)$  .

وبالعكس ، نفرض أن  $F_a$  معرفة عند  $x$  في الفترة  $J$  بأنها

$$F_a(x) = \int_a^x f$$

النظرية السابقة تؤكد أن  $F'_a = f$  في  $J$  . إذا كانت  $F$  بحيث أن  $F' = f$  ، حينئذ ينتج من نظرية ٢٧ - ٩ (ii) أنه يوجد مقدار ثابت  $C$  بحيث أن  $F(x) = F_a(x) + C$  عند  $x \in J$  بما أن  $F_a(a) = 0$  ، فإن  $C = F(a)$  ومنها ينتج أنه إذا كانت  $F' = f$  في  $J$  ، فإن

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f$$

وهو المطلوب إثباته

ملاحظة . إذا كانت  $F$  دالة معرفة في  $J$  بحيث أن  $F' = f$  في الفترة  $J$  ، فنقول أحياناً أن  $F$  تكامل غير محدود ، مشتقة عكسية ، أو أولية الدالة  $f$  . في هذا الاصطلاح اللغوي ، تؤكد نظرية التفاضل ٣٠ - ٧ أن كل دالة متصلة لها أولية . أحياناً تصاغ النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل في طرق تختلف عن تلك المعطاة في ٣٠ - ٨ ولكن تضمن دائماً التأكيد على أنه تحت فروض مناسبة فإن تكامل ريمان للدالة  $f$  يمكن حسابه بإيجاد قيمة أي أولية للدالة  $f$  عند النقطتين الطرفيتين لفترة التكامل . قد أعطينا الصيغة السابقة ، التي تنتج الشرط اللازم والكافي لدالة لتصبح أولية لدالة متصلة . نتيجة أكثر عموماً بمض الشيء لا تتطلب اتصال الدالة المراد تكاملها ، ستعطي في تمرين ٣٠ - ٥ .

لا يجب أن يفترض أن النظرية الأساسية تؤكد أنه إذا كانت المشتقة  $f$  لدالة  $F$  موجودة عند كل نقطة من الفترة  $J$  ، فإن  $f$  تكون قابلة للتكامل وأن ( ٣٠ - ١ ) تظل صحيحة . في الحقيقة ، يمكن أن يحدث أن  $f$  ليست قابلة لتكامل ريمان ( أنظر تمرين ٣٠ - ك ) . بالمثل ربما تكون دالة  $f$  قابلة لتكامل ريمان لكن ليس لها أولية ( أنظر تمرين ٣٠ - ل ) .

٣٠ - ٩ النظرية الأولى للقيمة المتوسطة . إذا كانت  $p$  و  $f$  متصلتين في الفترة  $J = [a, b]$  ،  $p(x) \geq 0$  لكل  $x \in J$  ، فتوجد  $c \in J$  بحيث أن

$$(30.7) \quad \int_a^b f(x)p(x) dx = f(c) \int_a^b p(x) dx$$

البرهان . نفرض أن  $g: J \rightarrow \mathbb{R}$  معرفة عند  $x \in J$  بأنها

$$g(x) = \int_a^x p(t) dt$$

بما أن  $p(x) \geq 0$  ، فن الواضح أن  $g$  متزايدة وينتج من نظرية التفاضل ٣٠ - ٧ أن  $g' = p$  . حسب نظرية ٢٩ - ٨ نستنتج أن

$$\int_a^b f dg = \int_a^b fp$$

ومن النظرية الأولى للقيمة المتوسطة ٣٠ - ٩ ، نستنتج أنه لبعض  $c$  في الفترة  $J$  ، يكون

$$\int_a^b f dg = f(c) \int_a^b p$$

وهو المطلوب إثباته

كتطبيق ثان لنظرية ٢٩ - ٨ سوف تفيد صياغة نظرية ٢٩ - ٧ ، التي تختص بالتكامل بالتجزئ ، في صورة أكثر تقليدياً . سيترك البرهان للقارئ .

٣٠ - ١٠ تكامل بالتجزئ . إذا كانت  $g$  و  $f$  لهما مشتقات متصلة في  $[a, b]$  ، فإن

$$\int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g$$

النتيجة الآتية مفيدة غالباً

٣٠ - ١١ النظرية الثانية للقيمة المتوسطة . (أ) إذا كانت  $f$  متزايدة وكانت  $g$  متصلة

في  $J = [a, b]$  ، فتوجد نقطة  $c$  في  $J$  بحيث أن

$$(30.8) \quad \int_a^b f dg = f(a) \int_a^c dg + f(b) \int_c^b dg$$

(ب) إذا كانت  $f$  متزايدة وكانت  $h$  متصلة في  $J$  ، حينئذ توجد نقطة  $c$  في الفترة  $J$

بحيث أن

$$(30.9) \quad \int_a^b fh = f(a) \int_a^c h + f(b) \int_c^b h$$

(ج) إذا كانت  $\phi$  ليست سالبة ومتزايدة وكانت  $h$  متصلة في  $J$  ، حينئذ توجد نقطة  $c$

في  $J$  بحيث أن

$$\int_a^b \phi h = \phi(b) \int_c^b h$$

البرهان . يدل الفرض ، ونظرية القابلية للتكامل ٣٠ - ٢ مما على أن  $g$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $f$  في  $J$  . فضلا عن ذلك حسب النظرية الأولى للقيمة المتوسطة ٣٠ - ٦ نجد أن

$$\int_a^b g df = g(c)\{f(b) - f(a)\}$$

بعد استخدام نظرية ٢٩ - ٧ المختصة بتكامل بالتجزئ ، نستنتج أن  $f$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  وأن

$$\begin{aligned} \int_a^b f dg &= \{f(b)g(b) - f(a)g(a)\} - g(c)\{f(b) - f(a)\} \\ &= f(a)\{g(c) - g(a)\} + f(b)\{g(b) - g(c)\} \\ &= f(a) \int_a^c dg + f(b) \int_c^b dg \end{aligned}$$

كما يثبت جزء (أ) . لبرهنة (ب) نفرض أن  $g$  معرفة في  $J$  بأنها

$$g(x) = \int_a^x h$$

أي أن  $g' = h$  . تنتج النتيجة إذن من جزء (أ) باستخدام نظرية ٢٩ - ٨ لبرهنة (ج) نعرف  $F$  بأن تكون مساوية  $\phi$  عند  $x$  في  $[a, b]$  ونعرف  $F(a) = 0$  . ونطبق الآن جزء (ب) على  $F$  . وهو المطلوب إثباته

يسمى جزء (ج) للنظرية السابقة غالباً بصورة بونيت (٥) النظرية الثانية للقيمة المتوسطة من الواضح أنه توجد نتيجة مناظرة لدالة متناقصة (تمرين ٣٠ - ن) .

### تغيير متغير :

سنثبت الآن نظرية تبرر القاعدة المألوفة المرتبطة بالتغير « تغيير متغير » في تكامل ريمان .

٣٠ - ١٢ نظرية تغيير متغير . نفرض أن  $\phi$  معرفة في فترة  $[a, \beta]$  إلى  $R$  بمشتقة متصلة ونفرض أن  $a = \phi(a)$  وأن  $b = \phi(\beta)$  . إذا كانت  $f$  متصلة في مدى  $\phi$  ، فإن

$$(30.10) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^\beta f(\phi(t))\phi'(t) dt$$

(٥) أسيان بونيت (١٨١٩ - ١٨٩٢) يعرف أولاً وقبل كل شيء بعمله في الهندسة التفاضلية .



البرهان . نفرض أن  $I = \varphi([a, \beta])$  ونفرض أن  $F$  معرفة بأنها

$$F(\xi) = \int_a^\xi f(x) dx \quad \text{حيث } \xi \in I$$

ونعتبر الدالة  $H$  المعرفة بأنها  $H(t) = F(\varphi(t))$  عند  $\alpha \leq t \leq \beta$  . لاحظ أن  $H(a) = F(a) = 0$  وإذا فاضلنا بالنسبة إلى  $t$  واستخدمنا الحقيقة أن  $F' = f$  ( لماذا ؟ ) ، نحصل على

$$H'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

الآن نستخدم النظرية الأساسية لنستنتج أن

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) = H(\beta) = \int_a^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

وهو المطلوب إثباته

### تعديل التكامل :

النتيجة الآتية غالباً مفيدة لاختزال تكامل ريمان - اشتلتجز إلى تكامل ريمان .

٣٠ - ١٣ نظرية . إذا كانت  $g'$  موجودة وكانت  $g'$  و  $f$  قابليتين لتكامل ريمان في  $[a, b]$  فإن  $f$  هي ريمان - اشتلتجز القابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  وأن

$$\int_a^b f dg = \int_a^b fg' \quad (30.11)$$

البرهان . نفرض أن  $M > 0$  بحيث أن  $|f(x)| \leq M$  عند  $x \in [a, b]$  ونفرض أن  $\varepsilon > 0$  . ينتج من نظرية ٣٠-٤ أن  $fg'$  قابلة لتكامل ريمان . لذلك يوجد تقسيم  $P_\varepsilon$  للفترة  $[a, b]$  بحيث أنه إذا كانت  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  أى تكرير التقسيم  $P_\varepsilon$  وإذا كانت  $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$  عند  $j = 1, \dots, n$  ، فإن

$$\left| \sum_{j=1}^n f(\xi_j)g'(x_j)(x_j - x_{j-1}) - \int_a^b fg' \right| < \varepsilon \quad (30.12)$$

بما أن  $g'$  قابلة لتكامل ريمان فيمكننا أيضاً فرض ( حسب معيار ريمان ٣٠-١ ) أن  $P_\varepsilon$  قد اختيرت بحيث أن

$$\sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) < \varepsilon \quad (30.13)$$

حيث  $m_j = \inf \{g'(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}$  و  $M_j = \sup \{g'(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}$  إذا استخدمنا نظرية القيمة المتوسطة ٢٧ - ٦ ، نحصل على نقط  $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$  بحيث أن

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \{g(x_j) - g(x_{j-1})\} - \int_a^b fg' \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^n f(\xi_j) g'(\xi_j) (x_j - x_{j-1}) - \int_a^b fg' \right| \\ &\leq \left| \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \{g'(\xi_j) - g'(\xi_j)\} (x_j - x_{j-1}) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{j=1}^n f(\xi_j) g'(\xi_j) (x_j - x_{j-1}) - \int_a^b fg' \right| \end{aligned}$$

الآن بما أن  $|g'(\xi_j) - g'(\xi_j)| \leq M_j - m_j$  ، فينتج أنه من  $(\text{٣٠} - \text{١٢})$  و  $(\text{٣٠} - \text{١٢})$  أن التعبير السابق يكون مسيطراً بالمقدار

$$M \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) + \varepsilon \leq (M+1)\varepsilon$$

بما أن  $\varepsilon > 0$  واختيار  $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$  اختياري ، فينتج أن  $f$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  وأن  $(\text{٣٠} - \text{١١})$  تظل صحيحة وهو المطلوب إثباته

**ملاحظة .** يمكن تعديل البرهان لاستخدامه للحالة التي فيها  $f$  محدودة وأن  $g$  متصلة في  $[a, b]$  وحيث  $g$  لها مشتقة ماعداً عند عدد محدود من نقط إلى عندها  $g'$  يمكن تعريفها بحيث أن  $g'$  و  $fg'$  قابلان لتكامل ريمان في  $[a, b]$  .

### تمرينات :

٣٠ - (أ) أثبت أن دالة محدودة ولها على الأكثر عدد محدود من نقط عدم الاتصال تكون قابلة لتكامل ريمان .

٣٠ - (ب) إذا كانت  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  غير متصلة عند نقطة ما للفترة ، فإنه توجد دالة متزايدة بإطراد مثل  $g$  بحيث أن  $f$  ليست قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  .

٣٠ - (ج) وضح أن القابلية للتكامل ٣٠-٢ تظل صحيحة عندما  $g$  تكون دالة تغير محدود في  $J$  .

٣٠ - (د) اعط مثالا لدالة  $f$  ليست قابلة لتكامل ريمان في  $J$  لكن بحيث أن  $f^2$  و  $|f|$  قابلان لتكامل ريمان في  $J$  .

٣٠ - (هـ) نفرض أن  $f$  موجبة ومتصلة في  $J = [a, b]$  ونفرض أن

$$M = \sup \{f(x) : x \in J\}$$

أثبت أن

$$M = \lim_n \left( \int_a^b (f(x))^n dx \right)^{1/n}$$

٣٠ - (و) وضح أن النظرية الأولى للقيمة المتوسطة ٣٠ - ٦ ربما تفشل إذا كانت  $f$  ليست متصلة .

٣٠ - (ز) أثبت أن نظرية التفاضل ٣٠ - ٧ تظل قائمة إذا افترض أن  $f$  قابلة للتكامل في  $J$  بالنسبة إلى دالة متزايدة  $g$  ، وأن  $f$  متصلة عند  $c$  ، وأن  $g$  قابلة للتفاضل عند  $c$  .  
 ٣٠ - (ح) نفرض أن  $f$  قابلة للتكامل بالنسبة لدالة متزايدة  $g$  في  $J = [a, b]$  ونفرض أن  $F$  معرفة عند  $x \in J$  بأنها

$$F(x) = \int_a^x f dg$$

أثبت أن (أ) إذا كانت  $g$  متصلة عند  $c$  ، فإن  $F$  تكون متصلة عند  $c$  ، (ب) إذا كانت  $f$  موجبة ، فإن  $E$  تكون متزايدة .  
 ٣٠ - (ط) أعط مثالا لدالة ريمان  $f$  القابلة للتكامل في  $J$  بحيث أن الدالة  $F$  ، المعرفة عند  $x \in J$  بأنها

$$F(x) = \int_a^x f$$

ليس لها مشتقة عند بعض نقاط الفترة  $J$  . هل يمكنك إيجاد دالة  $f$  قابلة للتكامل بحيث أن  $F$  تكون غير متصلة في  $J$  ؟  
 ٣٠ - (ي) إذا كانت  $f$  قابلة لتكامل ريمان في  $J = [a, b]$  وإذا كانت  $F' = f$  في  $J$  ، فيكون

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f$$

إرشاد : إذا كانت  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  تقسيما للفترة  $J$  ، فنكتب

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n \{F(x_i) - F(x_{i-1})\}$$

٣٠ - (ك) بفرض  $F$  معرفة بأنها

$$F(x) = x^2 \sin(1/x^2), \quad 0 < x \leq 1$$

$$= 0, \quad x = 0$$

فإن  $F$  لها مشتقة عند كل نقطة من  $I$  . لكن  $F'$  ليست قابلة للتكامل في  $I$  وأيضا  $F$  ليست التكامل لمشتقتها .

٣٠ - (ل) نفرض أن  $f$  معرفة بأنها  $f(x) = [x]$  عند  $x \in [0, 2]$  . إذن  $f$  قابلة لتكامل ريمان في  $[0, 2]$  لكن هي ليست المشتقة لأي دالة .  
 ٣٠ - (م) في النظرية الأولى للقيمة المتوسطة ٣٠ - ٩ نفرض أن  $p$  قابلة لتكامل ريمان (بدلا من كونها متصلة) . أثبت أن الاستنتاج لا يزال صحيحا .

٣٠ - (ن) إذا كانت  $\phi$  ليست سابقة ومتناقصة وكانت  $h$  متصلة في  $[a, b]$  ، حينئذ توجد نقطة  $\xi \in [a, b]$  بحيث أن

$$\int_a^b \phi h = \phi(a) \int_a^b h$$

٣٠ - (س) تفرض أن  $f$  متصلة في  $I = [0, 1]$  ، ونفرض أن  $f_0 = f$  ، وأن معرفة بأنها

$$n \in \mathbb{N}, x \in I \quad \text{عند} \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$$

بالاستنتاج . وضع أن  $|f_n(x)| \leq (M/n!)x^n \leq M/n!$  حيث  $M = \sup \{|f(x)| : x \in I\}$  ، ينتج أن المتتالية  $(f_n)$  تتقارب بانتظام في  $I$  إلى دالة الصفر .

٣٠ - (ع) إذا كانت  $f$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  في  $J = [a, b]$  ، وكانت  $\phi$  متصلة ومزايده مضبوطة في الفترة  $[c, d]$  ، وإذا كانت  $\phi(c) = a, \phi(d) = b$  ، حينئذ  $f \circ \phi$  تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g \circ \phi$  . وأن

$$\int_a^b f dg = \int_c^d (f \circ \phi) d(g \circ \phi)$$

٣٠ - (ف) إذا كانت  $f$  متصلة في  $[a, b]$  وإذا كانت

$$\int_a^b fh = 0$$

لجميع الدوال المتصلة  $h$  ، فإن  $f(x) = 0$  لجميع  $x$  .

٣٠ - (ص) إذا كانت  $f$  قابلة للتكامل في  $[a, b]$  وإذا كانت

$$\int_a^b fh = 0$$

لجميع الدوال المتصلة  $h$  ، حينئذ  $f(x) = 0$  لجميع نقاط اتصال الدالة  $f$  .

٣٠ - (ق) نفرض أن  $p$  متصلة وموجبة في  $[a, b]$  ونفرض أن  $c > 0$  . إذا كانت

$$p(x) \leq c \int_a^x p(t) dt$$

لكل  $x \in [a, b]$  ، أثبت أن  $p(x) = 0$  لجميع  $x$  .

٣٠ - (ر) بفرض  $f$  متصلة وبحيث أن  $f(x) \geq 0$  لكل  $x \in [a, b]$  . إذا كانت  $g$  مزايده مضبوطة في  $[a, b]$  وضح أن

$$\int_a^b f dg = 0$$

إذا وإذا فقط كانت  $f(x) = 0$  لكل  $x \in [a, b]$  .

٣٠ - (ث) أثبت أنه إذا كانت  $g$  متزايدة مضبوطة في  $[a, b]$  ، فإنه في النظرية الأولى للقيمة المتوسطة ٣٠ - ٦ يمكن أخذ  $c \in (a, b)$  . أجز تعديلا مشابهاً للجزيئين (أ) ، (ب) للنظرية الثانية للقيمة المتوسطة ٣٠ - ١١ .

٣٠ - (ت) أحسب تكاملات ريمان - اشتلتجز الآتية (تثير  $x \rightarrow [x]$  هنا إلى أكبر دالة

صحيحة)

$$\int_{-2}^2 x d(|x|) \quad (ب) \quad , \quad \int_0^1 x d(x^3) \quad (أ)$$

$$\int_0^4 x^2 d([x^2]) \quad (د) \quad , \quad \int_0^2 x^3 d([x]) \quad (ج)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x d(\sin x) \quad (ف) \quad , \quad \int_0^{\pi} \cos x d(\sin x) \quad (هـ)$$

### مشروعات :

٣٠ - (ا) افرض من هذا المشروع هو تطوير الوجودية باستخدام تعريف كتكامل .

إذا فرضنا أن  $P = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$  .

(أ) إذا كانت  $x \in P$  ، نعرف  $L(x)$  بأن يكون

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

ومن ثم  $L(1) = 0$  أثبت أن  $L$  قابلة للتفاضل وأن  $L'(x) = 1/x$  .

(ب) وضع أن  $L(x) < 0$  عند  $0 < x < 1$  وأن  $L(x) > 0$  عند  $x < 1$  . في الحقيقة

$$x > 0 \quad \text{عند} \quad 1 - 1/x \leq L(x) \leq x - 1$$

(ج) أثبت أن  $L(xy) = L(x) + L(y)$  عند  $x, y \in P$  . ومن ثم  $L(1/x) = -L(x)$

عند  $x \in P$  . (إرشاد : إذا كانت  $y \in P$  ، نفرض  $L_1$  معرفة في  $P$  بأنها  $L_1(x) = L(xy)$

وأثبت أن  $L'_1 = L'$  ) .

(د) أثبت أنه إذا كانت  $n \in \mathbb{N}$  و  $n \geq 3$  ، فإن

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < L(n) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}$$

(هـ) أثبت أن  $L$  دالة راسم تناظر أحادي يرسم  $P$  إلى كل الفراغ  $\mathbb{R}$  . بفرض أن  $e$

تدل على العدد الوحيد الذي يكون بحيث أن  $L(e) = 1$  ، وباستخدام الحقيقة التي تقول أن

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} ((1 + 1/n)^n) \quad \text{أثبت أن} \quad L'(1) = 1$$

(و) نفرض أن  $r$  أى عدد قياسي موجب ، إذن  $\lim_{x \rightarrow \infty} L(x)/x^r = 0$  ( ز ) لاحظ أن

$$L(1+x) = \int_1^{1+x} \frac{dt}{t} = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$$

أكتب  $(1+t)^{-1}$  كتسلسلة هندسية معلومة لتحصل على

$$L(1+x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + R_n(x)$$

وضح أن  $|R_n(x)| \leq x/(n+1)$  عند  $0 \leq x \leq 1$  وأن

$$-1 < x < 0 \quad \text{عند} \quad |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)}$$

٣- (ب) هذا المشروع يطور الدوال المثلثية مبتدئة بتكامل

(أ) نفرض أن  $A$  معرفة عند  $x$  في  $\mathbb{R}$  بأنها

$$A(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

حينئذ  $A$  دالة فردية ( أى أن  $A(-x) = -A(x)$  ) ، ومزايدة مضبوطة ،  
وهي محدودة بالعدد 2 . عرف بواسطة  $\pi/2 = \sup \{A(x) : x \in \mathbb{R}\}$

(ب) نفرض أن  $T$  هي الدالة العكسية للدالة  $A$  ، أى أن  $T = A^{-1}$  دالة متزايدة مضبوطة بنطاق  $(-\pi/2, \pi/2)$  . أثبت أن  $T$  لها مشتقة وأن  $T' = 1 + T^2$

(ج) عرف  $C$  ،  $S$  في  $(-\pi/2, \pi/2)$  بالقانونين

$$C = \frac{1}{(1+T^2)^{1/2}}, \quad S = \frac{T}{(1+T^2)^{1/2}}$$

ومن ثم  $C$  تكون زوجية وتكون  $S$  فردية في  $(-\pi/2, \pi/2)$  . وضع أن  $C(0) = 1$  ،  
 $S(0) = 0$  ،  $C(x) \rightarrow 0$  ،  $S(x) \rightarrow 1$  عند  $x \rightarrow \pi/2$  .

(د) أثبت أن  $C'(x) = -S(x)$  ،  $S'(x) = C(x)$  عند  $x$  في  $(-\pi/2, \pi/2)$  .  
وإذن يحقق كلا من  $C$  ،  $S$  المعادلة التفاضلية

$$h'' + h = 0$$

في الفترة  $(-\pi/2, \pi/2)$  .

(هـ) عرف  $C(\pi/2) = 0$  ،  $S(\pi/2) = 0$  و عرف  $T$  و  $S$  و  $C$  خارج الفترة  
بالمعادلة  $(-\pi/2, \pi/2)$

$$C(x + \pi) = -C(x), \quad S(x + \pi) = -S(x),$$

$$T(x + \pi) = T(x)$$

إذا أجرينا هذا بالتعاقب ، فإن  $S$  و  $C$  تكونان معرفتين لكل  $R$  ولها دورة  $2\pi$  . بالمثل ، تكون  $T$  معرفة ماعداً عند مضاعفات فردية للمقدار  $\pi/2$  ولها دورة  $\pi$  .

(و) أثبت أن الدالتين  $S$  و  $C$  ، المعرفتين في  $R$  في الجزء السابق ، قابلتان للتفاضل عند كل نقطة للفراغ  $R$  وأنهما يستمران في تحقيق العلاقات

$$C' = -S, \quad S' = C$$

في كل مكان في الفراغ  $R$  .

٣٠- (٧) هذا مشروع يطور قانون حاصل ضرب والاس (\*) المشهور . من خلاله

سنفرض أن

$$S_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx$$

(أ) إذا كانت  $n > 2$  ، فإن  $S_n = [(n-1)/n] S_{n-2}$  . (ارشاد : كامل بالتجزئ) .

(ب) أثبت القوانين

$$S_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{\pi}{2}, \quad S_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$$

(ج) أثبت أن المتتابعة  $(S_n)$  متناقصة بإطراد (ارشاد :  $(0 \leq \sin x \leq 1)$  ) .

(د) نفرض أن  $W_n$  معرفة بأنها

$$W_n = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots (2n)(2n)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)(2n+1)}$$

أثبت أن  $\lim (W_n) = \pi/2$  ( هذا هو حاصل ضرب والاس )

(هـ) أثبت أن  $\lim ((n!)^2 2^{2n} / (2n)! \sqrt{n}) = \sqrt{\pi}$

٣٠- (٨) هذا هو المشروع يطور صيغة استرلنج (\*\*) الهامة ، التي تعطي قيمة  $n!$

(أ) بمقارنة المساحة تحت القطع الزائد  $y = 1/x$  ومساحة شبه المنحرف المرسوم

داخليا ، أثبت أن

(\*) جون والاس ( ١٦٦٦ - ١٧٠٣ ) كان استاذاً للهندسة في جامعة اكسفورد لمدة سنتين هاما ، كان بشيرا لنيوتن . ساعد في وضع العمل الاساسي لتطور التفاضل والتكامل .

(\*\*) جيمس استرلنج ( ١٦٦٢ - ١٧٧٠ ) كان رياضيا انجليزيا في مدرسة نيوتن . الصيغة النسوبة لاسترلنج اثبتت في الحقيقة قبل ذلك بواسطة ابراهيم دي موافر ( ١٦٦٧ - ١٧٥٤ ) ، وكان فرنسيا هيجنوتي اى بروتستانتى استقر في لندن وكان صديقا لنيوتن .

$$\frac{2}{2n+1} < \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

ومن هذا ، استنتج أن  $e < (1 + 1/n)^{n+1/2}$

(ب) أثبت أن

$$\int_1^n \log x \, dx = n \log n - n + 1 = \log (n/e)^n + 1$$

اعتبر الشكل  $F$  المكون من مستطيلات قواعدها  $[1, \frac{3}{2}], [n - \frac{1}{2}, n]$  وارتفاعاتها  $2, \log n$  على الترتيب ، وبأشياء منحرفات قواعدها  $[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}], k = 2, 3, \dots, n-1$  وارتفاعات مائلة مارة بالنقط  $(k, \log k)$  . أثبت أن المساحة  $F$  هي

$$1 + \log 2 + \dots + \log (n-1) + \frac{1}{2} \log n = 1 + \log (n!) - \log \sqrt{n}$$

(ج) بمقارنة المساحتين في جزء (ب) ، أثبت أن

$$u_n = \frac{(n/e)^n \sqrt{n}}{n!} < 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

(د) أثبت أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة بإطراد (ارشاد : اعتبر  $u_{n+1}/u_n$ )

(هـ) باعتبار  $u_n^2/u_{2n}$  والاستفادة من نتيجة جزء (د) من المشروع السابق ، أثبت أن

$$\lim (u_n) = (2\pi)^{-1/2}$$

(و) احصل على صيغة استرلنج

$$\lim \left( \frac{(n/e)^n \sqrt{2\pi n}}{n!} \right) = 1$$

## الباب الحادى والثلاثون — خواص أبعد للتكامل :

سوف نقدم في هذا الباب بعض خواص أعمق لتكامل ريمان — اشتلجيز ( وريمان ) التى تكون غالباً مفيدة .

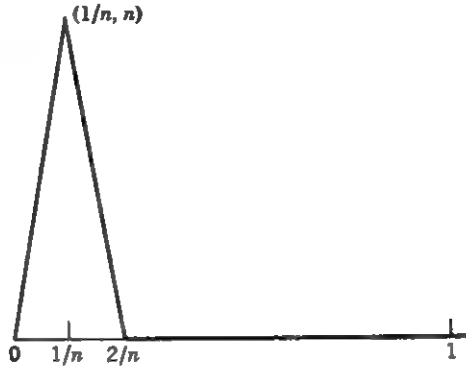
أولا سنعتبر إمكانية « أخذ النهاية تحت علامة التكامل » ، أى ، قابلية للتكامل لنهاية متتابة دوال قابلة للتكامل .

نفرض أن  $g$  متناقصة بإطراد في فترة  $J = [a, b]$  وأن  $(f_n)$  متتابة لدوال التى قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  والتى تتقارب عند كل نقطة للفترة  $J$  إلى دالة  $f$  . من الواضح طبيعياً أن نتوقع أن الدالة النهائية تكون  $f$  قابلة للتكامل وأن

$$(31.1) \quad \int_a^b f \, dg = \lim \int_a^b f_n \, dg$$



لكن ، هذه الحالة ليست بالضرورة قائمة حتى للوال دقيقة جداً .



( شكل ٣١ - ١ ) شكل تخطيطى لدالة  $f_n$  .

مثال : نفرض أن  $J = [0, 1]$  ،  $g(x) = x$  ، الدالة  $f_n$  معرفة عند  $n \geq 2$  بأنها

$$\begin{aligned} f_n(x) &= n^2 x, & 0 \leq x \leq 1/n, \\ &= -n^2(x - 2/n), & 1/n \leq x \leq 2/n, \\ &= 0, & 2/n \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

من الواضح أنه لكل  $n$  تكون الدالة  $f_n$  متصلة في  $J$  ، ومن ثم فهي قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  .  
( أنظر شكل ٣١ - ١ ) . أما بطريقة الحساب المباشر أو الرجوع لمعنى التكامل كساحة ، وإذن نحصل على

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 1, \quad n \geq 2$$

وبالإضافة إلى ذلك ، تتقارب المتتالية  $(f_n)$  عند كل نقطة من الفترة  $J$  إلى صفر ، ومن ثم الدالة النهائية  $f$  تنعدم تطابقياً ، وتكون قابلة للتكامل ، وأن

$$\int_0^1 f(x) dx = 0$$

وإذن معادلة ( ٣١ - ١ ) لا تظل صحيحة في هذه الحالة حتى ولو كان لكل من الطرفين معنى .

بما أن معادلة ( ٣١ - ١ ) ملائمة جداً ، فنستفسر عما إذا كانت توجد أية شروط إضافية بسيطة التي سوف تتضمنها . نوضح الآن أنه ، إذا كان التقارب منتظماً ، فإن هذه العلاقة تظل قائمة .

٣١ - ٢ نظرية . نفرض أن  $g$  دالة متزايدة بإطراد في  $J$  ونفرض أن  $(f_n)$  متتابعة دوال

قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  فوق  $J$  . نفرض أن المتتابة  $(f_n)$  تتقارب بانتظام في  $J$  لنهاية دالية  $f$  .

حينئذ  $f$  تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  وأن

$$(31.1) \quad \int_a^b f dg = \lim \int_a^b f_n dg$$

البرهان . نفرض أن  $\varepsilon > 0$  ونفرض أن  $N$  تكون بحيث أن  $\|f_N - f\|_J < \varepsilon$  الآن نفرض أن  $P_N$  تقسيم الفترة  $J$  بحيث أنه إذا كانت  $Q$  و  $P$  تكريرين للتقسيم  $P_N$  ، فإن  $|S(P; f_N, g) - S(Q; f_N, g)| < \varepsilon$  لأي اختيار للنقط الوسطى . إذا استعملنا نفس النقط الوسطى عند اعتبار  $f_N$  و  $f$  ، فينتج أن

$$\begin{aligned} |S(P; f_N, g) - S(P; f, g)| &\leq \sum_{k=1}^n \|f_N - f\|_J \{g(x_k) - g(x_{k-1})\} \\ &= \|f_N - f\|_J \{g(b) - g(a)\} < \varepsilon \{g(b) - g(a)\} \end{aligned}$$

بما أن تقديراً مماثلاً يظل قائماً للتقسيم  $Q$  ، فنجد أن التكريرين  $P$  و  $Q$  للتقسيم  $P_N$  ولحاصل جمع ريمان - اشتلتجز المناظرين أن

$$\begin{aligned} |S(P; f, g) - S(Q; f, g)| &\leq |S(P; f, g) - S(P; f_N, g)| \\ &\quad + |S(P; f_N, g) - S(Q; f_N, g)| \\ &\quad + |S(Q; f_N, g) - S(Q; f, g)| \\ &\leq \varepsilon(1 + 2\{g(b) - g(a)\}) \end{aligned}$$

طبقاً لمعيار كوشي ( ٢٩ - ٤ ) ، تكون الدالة النهائية  $f$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  . لإثبات ( ٣١ - ١ ) نستخدم مفترض ( ٣٠ - ٥ ) :

$$\left| \int_a^b f dg - \int_a^b f_n dg \right| = \left| \int_a^b (f - f_n) dg \right| \leq \|f - f_n\|_J \{g(b) - g(a)\}$$

بما أن  $\lim \|f - f_n\|_J = 0$  ، فينتج النتيجة المطلوبة وهو المطلوب إثباته

الفرض المعطى في نظرية ( ٣١ - ٢ ) الذي يقول أن التقارب للمتتابة  $(f_n)$  يكون منتظماً هو الحد ما صارم وتعميد فائدة هذه النتيجة . الآن سوف نقرر نتيجة بحيث لا تقيد التقارب بشدة كبيرة ، لكنها تتطلب قابلية التكامل لدالة النهائية . سوف لا نبوهن هذه النتيجة هنا ، حيث البرهان الطبيعي الصحيح يتطلب جولة في « نظرية القياس » لكن ، يمكن للقارئ الاسترشاد بمقال لوكسبرج المدون في المراجع ) .

٣١ - ٣ نظرية تقارب محدودة . نفرض أن  $(f_n)$  متتابة لدوال ونفرض أنها قابلة للتكامل بالنسبة لدالة متزايدة بإطراد  $g$  في الفترة  $J = [a, b]$  للفاغ  $R$  . نفرض أنه يوجد  $B > 0$

بحيث أن  $|f_n(x)| \leq B$  لكل  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in J$ . إذا كانت الدالة  $f(x) = \lim (f_n(x))$ ,  $x \in J$  موجودة وقابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  في  $J$ ، حينئذ

$$(31.1) \quad \int_a^b f dg = \lim \int_a^b f_n dg$$

النتيجة الآتية لنظرية التقارب المحدود مفيدة في أكثر الأحيان، وسوف ننص عليها رسمياً.

٣١ - ٤ نظرية تقارب إطرادية. نفرض أن  $(f_n)$  متتابعة إطرادية لدوال قابلة للتكامل بالنسبة لدالة متزايدة بإطراد  $g$  في  $J = [a, b]$  إلى  $\mathbb{R}$ . إذا كانت الدالة  $f(x) = \lim (f_n(x))$ ,  $x \in J$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  في  $J$ ، فيكون

$$(31.1) \quad \int_a^b f dg = \lim \int_a^b f_n dg$$

البرهان. نفرض أن  $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f(x)$  إذن  $|f_n(x)| \leq B$  حيث  $B = \|f\|_1 + \|f\|_2$ ، لذلك يمكننا استخدام (٣١ - ٤).

وهو المطلوب إثباته

منبع القوة الرئيسي لنظرية ليبج (وليبج - اشتلتجز) للتكامل هي أنها تغطي تكبير الفصل للدوال القابلة للتكامل بحيث أن معادلة (٣١ - ١) تظل صحيحة تحت فروض أضعف من تلك المعطاة في النظريات السابقة. أنظر مرجع المؤلف « أساسيات التكامل » المدون في المراجع.

### صيغة تكامل للباقي :

يذكر القارئ نظرية تايلور (٢٨ - ٦)، التي تمكن الشخص من حساب القيمة  $f(b)$  بدلالة القيم  $f(a), f'(a), \dots, f^{(n-1)}(a)$ ، وحد باق سيتضمن المشتقة النونية  $f^{(n)}$  محسوبة عند نقطة بين  $a$  و  $b$ . لتطبيقات كثيرة يكون من المناسب أكثر أن تكون قادرين للتعبير عن الحد الباقي كتكامل يتضمن  $f^{(n)}$

٣١ - ٥ نظرية تايلور. نفرض أن  $f$  ومشتقاتها  $f', f'', \dots, f^{(n)}$  تكون متصلة في الفترة  $[a, b]$  إلى  $\mathbb{R}$ . إذن

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (b-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (b-a)^{n-1} + R_n$$

حيث يعطى الباقي بالتكامل

$$(31.2) \quad R_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b (b-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt$$

البرهان. كامل  $R_n$  بالتجزئ للمصطلح على

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!} \left\{ (b-t)^{n-1} f^{(n-1)}(t) \Big|_{t=a}^{t=b} + (n-1) \int_a^b (b-t)^{n-2} f^{(n-1)}(t) dt \right\}$$

$$= -\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (b-a)^{n-1} + \frac{1}{(n-2)!} \int_a^b (b-t)^{n-2} f^{(n-1)}(t) dt$$

بالاستمرار في التكامل بالتجزئ بهذه الطريقة ، نحصل على الصيغة المنصوص عليها وهو المطلوب إثباته

بدلاً من الصيغة (٣١-٢) يكون من المناسب غالباً إجراء تغير للمتغير  $t = (1-s)a + sb$  عد  $s$  في  $[0, 1]$  ، والحصول على الصيغة .

$$(31.3) \quad R_n = \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^1 (1-s)^{n-1} f^{(n)}[a + (b-a)s] ds$$

هذه الصورة للباقي يمكن امتدادها لتشمل الحالة التي عندها يكون للدالة  $f$  نطاق في  $R^p$  ومدى في  $R^q$  .

### تكاملات تتوقف على بارامتر ( كمية متغيرة القيمة ) :

من السهم غالباً اعتبار التكاملات التي تعتمد فيها الدوال المراد تكاملها على بارامتر . يرغب الشخص في هذه الحالات أن يحصل على الشروط المؤكدة للاتصال والقابلية للتفاضل والقابلية للتكامل للدالة الناتجة . النتيجتان الآتيتان هامتان في هذا الشأن .

نفرض أن  $D$  مستطيل في  $R \times R$  وعرف بأنه

$$D = \{(x, t) : a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$$

ونفرض أن  $f$  متصلة في  $D$  إلى  $R$  . إذن من السهل ملاحظة ( تمرين ٢٢-د ) أنه ، لكل مقدار ثابت  $t$  في  $[c, d]$  ، تكون الدالة التي ترسل  $x$  إلى  $f(x, t)$  متصلة على  $[a, b]$  ولذلك تكون قابلة لتكامل ريمان نعرف أن  $F$  عند  $t$  في  $[c, d]$  بالقانون

$$(31.4) \quad F(t) = \int_a^b f(x, t) dx$$

نبرهن أولاً أن  $F$  تكون متصلة .

٣١-٦ نظرية . إذا كانت  $f$  متصلة في  $D$  إلى  $R$  وإذا كانت  $F$  معرفة بأنها (٣١-٤) فإن  $F$  تكون متصلة في  $[c, d]$  إلى  $R$  .

البرهان . تتضمن نظرية الاتصال المنتظم ( ٢٣-٣ ) على أنه إذا كانت  $\varepsilon > 0$  ، فإنه

توجد  $\delta(\varepsilon) > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $t_0$  و  $t$  تنتميان إلى  $[c, d]$  وأن  $|t - t_0| < \delta(\varepsilon)$  فإن

$$|f(x, t) - f(x, t_0)| < \varepsilon$$

لجميع  $x$  في  $[a, b]$ . ينتج من مفروض (٣٠ - ٥) أن

$$\begin{aligned} |F(t) - F(t_0)| &= \left| \int_a^b \{f(x, t) - f(x, t_0)\} dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x, t) - f(x, t_0)| dx \leq \varepsilon(b-a) \end{aligned}$$

التي تثبت اتصال  $F$  وهو المطلوب إثباته

سنستفيد في النتيجة السابقتين من مفهوم المشتقة الجزئية لدالة لمتغيرين حقيقيين. هذه الفكرة، المألوفة للقارئ من التفاضل والتكامل، سوف تناقش بمق في الفصل السابع.

٣١ - ٧ نظرية. إذا كانت  $f$  ومشتقتها الجزئية  $f_x$  متصلتين في  $D$  إلى  $R$ ، فإن للدالة  $F$  المعرفة بأنها (٣١ - ٤) مشتقة في  $[c, d]$  وأن

$$F'(t) = \int_a^b f_x(x, t) dx \quad (31.5)$$

البرهان. من الاتصال المنتظم للمشتقة  $f_x$  في  $D$  نستنتج أنه إذا كانت  $\varepsilon > 0$ ، فإنه توجد  $\delta(\varepsilon) > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $|t - t_0| < \delta(\varepsilon)$ ، فإن

$$|f_x(x, t) - f_x(x, t_0)| < \varepsilon$$

لجميع  $x$  في  $[a, b]$ . إذا فرضنا أن  $t_0$  و  $t$  تحققان هذا الشرط ونستخدم نظرية القيامة المتوسطة (٢٧ - ٦) لنحصل على  $t_1$  (التي ربما تتوقف على  $x$  وتقع بين  $t_0$  و  $t$ ) بحيث أن

$$f(x, t) - f(x, t_0) = (t - t_0)f_x(x, t_1)$$

بضم هاتين العلاقتين، نستنتج أنه إذا كانت  $|t - t_0| < \delta(\varepsilon)$  و  $0 < \varepsilon$ ، فإن

$$\left| \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} - f_x(x, t_0) \right| < \varepsilon$$

لجميع  $x$  في  $[a, b]$ . باستخدام (٣٠ - ٥)، نحصل على التقدير

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} - \int_a^b f_x(x, t_0) dx \right| &\leq \int_a^b \left| \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} - f_x(x, t_0) \right| dx \\ &\leq \varepsilon(b-a) \end{aligned}$$

الذي يثبت معادلة (٣١ - ٥) وهو المطلوب إثباته

يدخل أحيانا البارامتر  $t$  في نهايات التكامل كما في الدالة المراد تكاملها . تعتبر النتيجة الآتية هذه الإمكانية . سوف نستفيد في برهانها من حالة خاصة جداً لقاعدة السلسلة ( التي سوف تدرس في الفصل السابع ) والتي سوف تكون مأثوفة للقارىء .

٣١ - ٨ صيغة ليبنز . نفرض أن  $f$  و  $f_1$  متصلتان في  $D$  إلى  $R$  وأن  $\alpha$  و  $\beta$  دالتان قابلتان للتفاضل عند الفترة  $[c, d]$  ولهما قيم في  $[a, b]$  . إذا كانت  $\phi$  معرفة في  $[c, d]$  بأنها

$$(31.6) \quad \phi(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx$$

فإن  $\phi$  لها مشتقة لكل  $t$  في الفترة  $[c, d]$  التي تعطى بالقانون

$$(31.7) \quad \phi'(t) = f(\beta(t), t)\beta'(t) - f(\alpha(t), t)\alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f_t(x, t) dx$$

البرهان . نفرض أن  $H$  معرفة عند  $(u, v, t)$  بأنها

$$H(u, v, t) = \int_u^v f(x, t) dx$$

إذا كانت  $u$  و  $v$  تنتميان إلى  $[a, b]$  ، وكانت  $t$  تنتمي إلى  $[c, d]$  الدالة  $\phi$  المعرفة في ( ٣١ - ٦ ) هي المحصلة المنطاة في الصورة  $\phi(t) = H(\beta(t), \alpha(t), t)$  . بتطبيق قاعدة السلسلة نجد أن

$$\phi'(t) = H_u(\beta(t), \alpha(t), t)\beta'(t) + H_v(\beta(t), \alpha(t), t)\alpha'(t) + H_t(\beta(t), \alpha(t), t)$$

وحسب نظرية التفاضل ( ٣٠ - ٧ ) يكون

$$H_u(u, v, t) = f(u, t), \quad H_v(u, v, t) = -f(v, t)$$

ومن النظرية السابقة ، نجد أن

$$H_t(u, v, t) = \int_u^v f_t(x, t) dx$$

إذا استخدمنا التعويض  $v = \alpha(t)$  و  $u = \beta(t)$  فنحصل على القانون ( ٣١ - ٧ ) وهو المطلوب إثباته .

إذا كانت  $f$  متصلة في  $D$  إلى  $R$  وكانت  $F$  معرفة بالقانون ( ٣١ - ٤ ) ، فقد برهنا في نظرية ٣١ - ٦ أن  $F$  متصلة ومن ثم تكون قابلة لتكامل ريمان في الفترة  $[c, d]$  . نوضح الآن أن هذا النرض للاتصال يكون كافيا لتأكيد أنه يمكننا إبدال تركيب التكامل . هذا يمكن التعبير بلغة القوانين كما يلي

$$(31.8) \quad \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, t) dx \right\} dt = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, t) dt \right\} dx$$

٣١ - ٩ نظرية تبادل . إذا كانت  $f$  متصلة في  $D$  ولها قيم في  $R$  ، القانون (٣١ - ٨) يظل صحيحاً .

البرهان . نظرية ٣١ - ٦ ونظرية القابلية للتكامل ٣٠ - ٢ تدلان على أن كلا من التكاملين المكررين الظاهرين (٣١ - ٨) موجود ، يبق فقط إثبات تساويهما . حيث أن  $f$  متصلة بانتظام في  $D$  ، وإذا كانت  $\varepsilon > 0$  فإنه يوجد  $\delta(\varepsilon) > 0$  ، بحيث أنه إذا كانت  $|x - x'| < \delta(\varepsilon)$  ،  $|t - t'| < \delta(\varepsilon)$  فإن  $|f(x, t) - f(x', t')| < \varepsilon$  . نفرض أننا اخترنا  $n$  كبيرة جداً بحيث أن  $(b - a)/n < \delta(\varepsilon)$  ،  $(d - c)/n < \delta(\varepsilon)$  ونقسم  $D$  إلى  $n^2$  مستطيلات متساوية بتقسيم كل من  $[a, b]$  ،  $[c, d]$  إلى  $n$  من الأجزاء المتساوية . عند  $j = 0, 1, \dots, n$  نفرض

$$x_j = a + (b - a)j/n, \quad t_j = c + (d - c)j/n$$

يمكننا كتابة التكامل الموجود على يسار (٣١ - ٨) على صورة حاصل جمع

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_k} \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x, t) dx \right\} dt$$

بتطبيق النظرية الأولى للقيمة المتوسطة ٣٠ - ٦ مرتين ، نستنتج أنه يوجد عدد  $x'_j$  في  $[x_{j-1}, x_j]$  وعدد  $t'_k$  في  $[t_{k-1}, t_k]$  بحيث أن

$$\int_{t_{j-1}}^{t_k} \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x, t) dx \right\} dt = f(x'_j, t'_k)(x_j - x_{j-1})(t_k - t_{k-1})$$

ومن ثم يكون لدينا

$$\int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, t) dx \right\} dt = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n f(x'_j, t'_k)(x_j - x_{j-1})(t_k - t_{k-1})$$

وباستخدام نفس طريقة الاستدلال للتكامل الموجود في الطرف الأيمن من (٣١ - ٨) ، ينتج الوجود للأعداد  $x''_k$  في  $[x_{j-1}, x_j]$  و  $t''_{jk}$  في  $[t_{k-1}, t_k]$  بحيث أن

$$\int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, t) dt \right\} dx = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n f(x''_{jk}, t''_{jk})(x_j - x_{j-1})(t_k - t_{k-1})$$

بما أن كلا من  $x'_j$  و  $x''_k$  تنتمي إلى  $[x_{j-1}, x_j]$  وأن  $t'_{jk}, t''_{jk}$  تنتمي إلى  $[t_{k-1}, t_k]$  فنستنتج أنه من الاتصال المنتظم للدالة  $f$  أن حاصل الجمع المزدوجين ومن ثم يختلف التكاملان المكرران على الأكثر بالمقدار  $\varepsilon(b - a)(d - c)$  . بما أن  $\varepsilon > 0$  وهى اختيارية ، فإن تساوى هذين التكاملين يكون مؤكداً لإثباته .

وهو المطلوب لإثباته

## نظرية التمثيل لريز (\*) :

سنختتم هذا الباب بنظرية عميقة التي ، مع أنها سوف لا تستخدم فيما يلي ، تلعب دوراً هاماً في تحليل دالي .

سيكون من المناسب أولاً جمع بعض نتائج أثبتها من قبل أو تكون نتائج مباشرة لما قد أثبتناه .

نفرض أن  $J = [a, b]$  خلية مغلقة في  $R$  ، ونفرض أن  $C(J)$  تدل على فراغ متجه لكل دوال متصلة في  $J$  إلى  $R$  ، ونفرض أن  $\|f\|_J$  هو العمود على  $C(J)$  المعروف بأنه

$$\|f\|_J = \sup \{|f(x)| : x \in J\}$$

دالية خطية في  $C(J)$  هي دالة خطية  $G : C(J) \rightarrow R$  معرفة في فراغ متجه  $C(J)$  ؛ وإذن

$$G(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha G(f_1) + \beta G(f_2)$$

لجميع  $\alpha, \beta$  في  $R$  وأن  $f_1, f_2$  في  $C(J)$  . يقال لدالية خطية  $G$  في  $C(J)$  أنها موجبة إذا كان لكل  $f \in C(J)$  حيث  $f(x) \geq 0, x \in J$  ، يكون

$$G(f) \geq 0$$

يقال لدالية خطية  $G$  في  $C(J)$  أنها محدودة إذا كانت توجد  $M \geq 0$  بحيث أنه

$$|G(f)| \leq M \|f\|_J$$

لجميع  $f \in C(J)$ .

٢١ - ١٠ . مفترض إذا كانت  $g$  دالة متزايدة باطراد في  $J$  وإذا كانت  $G$  معرفة عند  $G$  في  $C(J)$  بأنها

$$G(f) = \int_a^b f dg \quad (31.9)$$

فإن  $G$  دالية خطية موجبة محدودة في  $C(J)$  .

البرهان . ينتج من نظرية ٢٩ - ٥ (أ) ونظرية ٣٠ - ٢ أن  $G$  دالة خطية في  $C(J)$  ومن مفترض ٣٠ - ٥ أن  $G$  محدودة بالمقدار  $M = g(b) - g(a)$  . إذا كانت  $f$  تنتمي إلى  $C(J)$  وكانت  $f(x) \geq 0$  عند  $x \in J$  ، فإنه بأخذ  $m = 0$  في قانون (٣٠-٤) نستنتج أن  $G(f) \geq 0$  . وهو المطلوب إثباته .

(\*) يمكن حذف بقية هذا البلب عند القراءة الأولى .



سنوضح الآن العكس أى أن ، كل دالية خطية موجبة محدودة في  $C(J)$  تكون مولدة بتكامل ريمان - اشتلتجز بالنسبة إلى دالة ما متزايدة باطراد  $g$  هذه هي صورة من « نظرية تمثيل ريزز » المشهورة . التي هي إحدى أحجار الزاوية لموضوع (تحليل دالي) ولها حالات عامة وتطبيقات كثيرة بعيدة الأثر . وقد برهنت النظرية بواسطة الرياضى المجرى العظيم فريدرك ريزز (\*).

٣١ - ١١ نظرية تمثيل ريزز . إذا كانت  $G$  دالية خطية موجبة محدودة في  $C(J)$  ، فإنه توجد دالة متزايدة باطراد  $g$  في  $J$  في بحيث أن

$$G(f) = \int_a^b f dg \quad (31.9)$$

لكل  $f$  في  $C(J)$  .

البرهان . سوف نعرف أولاً دالة تزايدية اطرادية  $g$  وبعد ذلك نوضح أن (٣١ - ٩) تظل صحيحة .

يوجد مقدار ثابت  $M$  بحيث أنه إذا كانت  $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$  لكل  $x$  في  $J$  فإن  $0 \leq G(f_1) \leq G(f_2) \leq M \|f_2\|_1$  . إذا كانت  $t$  أى عدد حقيقى بحيث أن  $a < t < b$  ، وإذا كانت  $n$  عدداً طبيعياً كبيراً كبراً كافياً ، فنفرض أن  $\varphi_{t,n}$  هي الدالة (أنظر شكل ٣١-٢) في  $C(J)$  المعرفة بأنها

$$\begin{aligned} \varphi_{t,n}(x) &= 1, & a \leq x \leq t, \\ &= 1 - n(x-t), & t < x \leq t + 1/n, \\ &= 0, & t + 1/n < x \leq b \end{aligned} \quad (31.10)$$

من الواضح سابقاً أنه إذا كانت  $n \leq m$  ، فإنه لكل  $t$  حيث  $a < t < b$  يكون

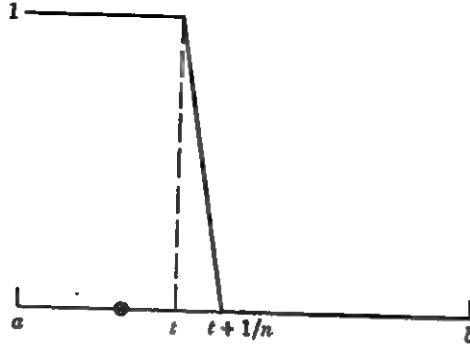
$$0 \leq \varphi_{t,m}(x) \leq \varphi_{t,n}(x) \leq 1$$

أى أن المتتابة  $(G(\varphi_{t,n}) : n \in \mathbb{N})$  متتابة أعداد حقيقية ومتناقصة محدودة بحيث تتقارب لعدد حقيقى . نعرف  $g(t)$  بأن تكون مساوية لهذه النهاية . إذا كانت  $a < t \leq s < b$  ، فإن  $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \varphi_{t,n}(x) \leq \varphi_{s,n}(x) \leq 1$$

ومن ثم ينتج أن  $g(t) \leq g(s)$  . نعرف  $g(a) = 0$  وإذا كانت  $\varphi_{b,n}$  تدل على الدالة

(\*) فريدرك ريزز (١٨٨٠-١٩٥٥) كان رياضياً مجرياً لامعاً ، كان أحد المؤسسين للتوبولوجى والتحليل الدالى . هو أيضاً عمل مساهمات حسنة في الجهد والوجوديك ونظرية التكامل .



(شكل ٢١ - ٢) رسم تخطيطي الدالة  $\varphi_{t,n}$

، فنضع  $g(b) = G(\varphi_{b,n})$  ،  $\varphi_{b,n}(x) = 1, x \in J$  ، إذا كانت  $a < t < b$  وكانت  $n$  كبيرة كبراً كافياً فإنه لكل  $x$  في  $J$  يكون

$$0 \leq \varphi_{t,n}(x) \leq \varphi_{b,n}(x) = 1$$

أي أن  $g(a) \leq g(t) \leq g(b)$  . هذا يوضح أن  $g(a) = 0 \leq G(\varphi_{t,n}) \leq G(\varphi_{b,n}) = g(b)$  ويكل تركيب الدالة المتزايدة باطراد  $g$  .

إذا كانت  $f$  متصلة في  $J$  وكانت  $\varepsilon > 0$  ، فيوجد  $\delta(\varepsilon) > 0$  ، بحيث أنه إذا كانت  $|x - y| < \delta(\varepsilon)$  وأن  $x, y \in J$  ، فإن  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  بما أن  $f$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  ، فيوجد تقسيم  $P_\varepsilon$  للفترة  $J$  بحيث أنه إذا كانت  $Q$  تكريراً للتقسيم  $P_\varepsilon$  ، فإنه لألى حاصل جمع ريمان اشتعجز ، يكون

$$\left| \int_a^b f dg - S(Q; f, g) \right| < \varepsilon$$

الآن نفرض أن  $P = (t_0, t_1, \dots, t_m)$  تقسيم للفترة  $J$  لنقط مميزة تكون تكريراً للتقسيم  $P_\varepsilon$  بحيث أن  $\sup \{t_k - t_{k-1}\} < \frac{1}{2} \delta(\varepsilon)$  ونفرض أن  $n$  عدداً طبيعياً كبيراً للدرجة أن

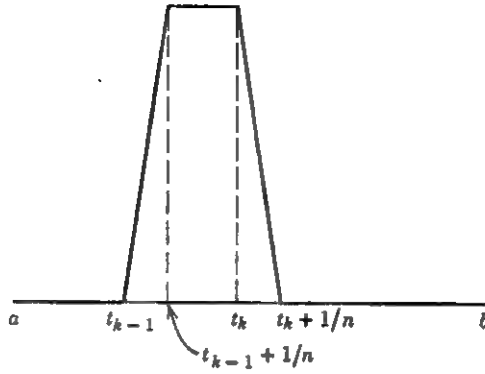
$$2/n < \inf \{t_k - t_{k-1}\}$$

حينئذ تكون الفترات المتعاقبة

$$(31.11) \quad [t_0, t_1 + 1/n], \dots, [t_{k-1}, t_k + 1/n], \dots, [t_{m-1}, t_m]$$

فقط لهم أي نقط مشتركة ، (أنظر شكل ٢١ - ٣) . لكل  $k = 1, \dots, m$  تتقارب المتتالية المتناقصة  $(G(\varphi_{k,n}))$  إلى  $g(t_k)$  ومن ثم نفترض أن  $n$  كبيرة للدرجة أن

$$(31.12) \quad g(t_k) \leq G(\varphi_{k,n}) \leq g(t_k) + (\varepsilon/m \|f\|_J)$$

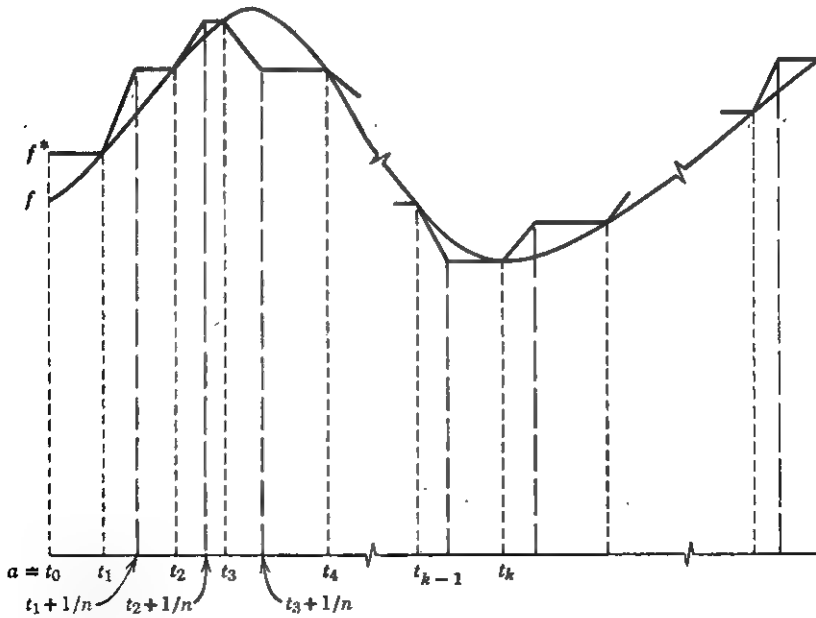


(شكل ٣١-٣) رسم تخطيطي للدالة  $\varphi_{t_k, n} - \varphi_{t_{k-1}, n}$

الآن نعتبر الدالة  $f^*$  معرفة في  $J$  بأنها

$$(31.13) \quad f^*(x) = f(t_1)\varphi_{t_1, n}(x) + \sum_{k=2}^m f(t_k)\{\varphi_{t_k, n}(x) - \varphi_{t_{k-1}, n}(x)\}$$

عنصر  $x$  في  $J$  يقع إما لفترة أو لفترةين في (٣١ - ١١) . إذا كانت  $x$  تنتمي إلى فترة واحدة ، فيجب أن نحصل على  $f^*(x) = f(t_1)$  ،  $t_0 \leq x < t_1$  أو نحصل على



(شكل ٣١-٤) رسم الدالتان  $f^*$  و  $f$

$f^*(x) = f(t_k)$  ، ويكون في هذه الحالة  $k = 1, 2, \dots, m$  لبعض  $t_{k-1} + (1/n) < x \leq t_k$  (انظر شكل ٣١ - ٤) . وإذن

$$|f(x) - f^*(x)| < \varepsilon$$

إذا كان المنصر  $x$  تنتمي إلى فترتين في (٣١ - ١١) ، فإن  $t_k \leq x \leq t_k + 1/n$  لبعض  $k = 1, \dots, m-1$  . ونستنتج أن

$$f^*(x) = f(t_k)\varphi_{t_k,n}(x) + f(t_{k+1})\{1 - \varphi_{t_k,n}(x)\}$$

إذا أشرنا لتعريف الدالة  $\varphi$  في (٣١ - ١٠) ، فنجد أن

$$f^*(x) = f(t_k)(1 - n(x - t_k)) + f(t_{k+1})n(x - t_k)$$

بما أن  $|x - t_k| < \delta(\varepsilon)$  و  $|x - t_{k+1}| < \delta(\varepsilon)$  فنستنتج أن

$$|f(x) - f^*(x)| \leq |f(x) - f(t_k)|(1 - n(x - t_k)) + |f(x) - f(t_{k+1})|n(x - t_k) \\ < \varepsilon\{1 - n(x - t_k) + n(x - t_k)\} = \varepsilon$$

نتيجة لذلك ، نحصل على التقدير .

$$\|f - f^*\|_J = \sup \{|f(x) - f^*(x)| : x \in J\} \leq \varepsilon$$

بما أن  $G$  دالة خطية محدودة في  $C(J)$  فينتج أن

$$(31.14) \quad |G(f) - G(f^*)| \leq M\varepsilon$$

حسب العلاقة (٣١ - ١٢) نجد أن .

$$|G(\varphi_{t_k,n}) - G(\varphi_{t_{k-1},n})| - \{g(t_k) - g(t_{k-1})\} < \varepsilon/2m \|f\|_J$$

عند  $k = 2, 2, \dots, m$  . باستخدام  $G$  للدالة  $f^*$  المعرفة بالدالة (٣١ - ١٢) ونذكر أن  $g(t_0) = 0$  ، نحصل على

$$\left| G(f^*) - \sum_{k=1}^m f(t_k)\{g(t_k) - g(t_{k-1})\} \right| < \varepsilon'$$

لكن الحد الثاني من الطرف الأيسر هو حاصل جمع ريمان - اشتلتجز  $S(P; f, g)$  للدالة  $f$  بالنسبة إلى  $g$  بالتناظر للتقسيم  $P$  الذي هو تكرير لتقسيم  $P_\varepsilon$  . وإذن نحصل على

$$\left| \int_a^b f dg - G(f^*) \right| \leq \left| \int_a^b f dg - S(P; f, g) \right| + |S(P; f, g) - G(f^*)| < 2\varepsilon$$

أخيرا ، باستخدام علاقة (٣١ - ١٤) ، نجد أن

$$(31.15) \quad \left| \int_a^b f dg - G(f) \right| < (M+2)\varepsilon$$

بما أن  $\varepsilon > 0$  اختيارية والطرف الأيسر من (٣١ - ١٥) لا يتوقف عليها فنستنتج أن

$$G(f) = \int_a^b f dg$$

وهو المطلوب إثباته

من المهم ، لبعض أغراض ، معرفة أن هناك تناظرا أحاديا بين داليات خطية موجبة محدودة في  $C(J)$  ودوال متزايدة باطراد عمودية معينة . ويمكن التأكد من أن تركيبنا لتوضيح أنه ينتج دالة متزايدة  $g$  بحيث أن  $g(a) = 0$  وأن  $g$  متصلة من اليمين عند كل نقطة داخلية للفترة  $J$  بهذه الخواص الإضافية ، يوجد تناظر أحادي بين داليات موجبة ودوال متزايدة .

### تمارين :

٣١- (أ) إذا كانت  $a > 0$  ، وضع مباشرة أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-nx} dx = 0$$

أى النتائج لهذا الباب نستخدم ؟

٣١- (ب) إذا كانت  $0 < a < 2$  وضع أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^2 e^{-nx^2} dx = 0$$

ماذا يحدث إذا كانت  $a = 0$  ؟

٣١- (ج) ناقش  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nx(1-x)^n dx$

٣١- (د) إذا كانت  $a > 0$  ، وضع أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{\infty} \frac{\sin nx}{nx} dx = 0$$

ماذا يحدث إذا كانت  $a = 0$  ؟

٣١- (هـ) بفرض أن  $f_n(x) = nx(1+nx)^{-1}$  عند  $x \in [0, 1]$  ، وبفرض أن

$f(x) = 0$  عند  $x = 0$  وأن  $f(x) = 1$  عند  $x \in (0, 1]$  أثبت  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  لجميع  $x \in [0, 1]$  وأن

$$\int_0^1 f_n(x) dx \rightarrow \int_0^1 f(x) dx$$

٣١- (و) بفرض أن  $h_n(x) = nx e^{-nx^2}$  عند  $x \in [0, 1]$  وبفرض أن  $h(x) = 0$

أثبت أن

$$0 = \int_0^1 h(x) dx \neq \lim \int_0^1 h_n(x) dx = \frac{1}{2}$$

٣١- (ز) نفرض أن  $(g_n)$  متتابعة لدوال متزايدة في  $[a, b]$  والتي تتقارب بانتظام إلى دالة  $g$  في  $[a, b]$ . إذا كانت دالة متزايدة  $f$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g_n$  لكل  $n \in \mathbb{N}$  أثبت أن  $f$  تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  وأن

$$\int_a^b f dg = \lim \int_a^b f dg_n.$$

٣١- (ح) أعط مثالا لتوضح أن الاستنتاج في المثال السابق ربما يفشل إذا كان التقارب ليس منتظما .

$$31- (ط) إذا كانت  $\alpha > 0$  وضح أن  $\int_0^1 t^\alpha (\log t)^2 dt = 2/(\alpha + 1)^2$$$

٣١- (ي) بفرض أن  $f$  ومشتقاتها الجزئية  $f_i$  متصلة فإن عند  $(x, t)$  في  $[a, b] \times [c, d]$  استخدم نظرية التبديل ٣١ - ٩ إلى

$$\int_c^d \left\{ \int_a^b f_i(x, t) dx \right\} dt, \quad c \leq t \leq d$$

وفاضل للحصول على برهان آخر لنظرية ٣١ - ٧ .

٣١- (ك) استخدم النظرية الأساسية ٣٠ - ٨ لتوضح أنه إذا كانت متتابعة  $(f_n)$  لدوال تتقارب في  $J$  لدالة  $f$  وإذا كانت المشتقات  $(f'_n)$  متصلة وتتقارب بانتظام في  $J$  لدالة  $g$  فإن  $f'$  موجودة وتساوي  $g$  ( هذه النتيجة تكون أقل عموما من نظرية ٢٨ - ٥ ، لكن من السهل إثباتها ) .

٣١- (ل) نفرض أن  $\{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$  هي سرد لأعداد قياسية في  $I$ . نفرض أن  $f_n$  معرفة بأن تكون مساوية للواحد الصحيح إذا كانت  $x \in \{r_1, \dots, r_n\}$  ومساوية صفرا خلاف ذلك . حينئذ  $f_n$  قابلة لتكامل ريمان في  $I$  والمتتابعة  $(f_n)$  تتقارب باطراد لدالة ديرشلت غير المتصلة التي تكون مساوية واحدا صحيحا في  $I \cap Q$  ومساوية صفرا في  $I \setminus Q$  . ومن ثم النهاية الاطرادية لمتتابعة دوال قابلة لتكامل ريمان لا تحتاج لكونها قابلة لتكامل ريمان .

٣١- (م) بفرض أن  $g$  دالة ثابتة متزايدة باطراد في  $J = [a, b]$  . إذا كانت  $f$  أي دالة قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  في  $J$  ، فإننا نعرف  $\|f\|_1$  بأنها

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f| dg$$

وضح أن « الخواص للمعمود » الآتية تكون صحيحة .

$$\|f\|_1 \geq 0 \quad (أ)$$

(ب) إذا كانت  $f(x) = 0$  لجميع  $x \in J$  ، فإن  $\|f\|_1 = 0$  ؛

(ج) إذا كانت  $c \in \mathbb{R}$  ، فإن  $\|cf\|_1 = |c| \|f\|_1$  ؛

$$|\|f\|_1 - \|h\|_1| \leq \|f \pm h\|_1 \leq \|f\|_1 + \|h\|_1 \quad (د)$$

لكن ، من الممكن أن يكون  $\|f\|_1 = 0$  بدون كون  $f(x) = 0$  لجميع  $x \in J$  (هـ)  
هذا يمكن أن يحدث عند  $g(x) = x$  (؟) .

٣١- (ن) إذا كانت  $g$  متزايدة باطراد في  $J$  ، وإذا كانت  $f_n, n \in \mathbb{N}$  و  $f$  ،  
دالتين قابلتين للتكامل بالنسبة إلى  $g$  ، فإننا نقول أن المتتابعة  $(f_n)$  تتقارب في المتوسط  
(بالنسبة إلى  $g$ ) في حالة كون

$$\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$$

(الدالة هنا هي كما في التمرين السابق) . أثبت أنه إذا كانت  $(f_n)$  تتقارب في المتوسط  
إلى  $f$  ، فإن

$$\int_a^b f_n dg \rightarrow \int_a^b f dg$$

أثبت أنه إذا كانت  $(f_n)$  متتابعة لدوال قابلة للتكامل وتتقارب بانتظام في  $J$  إلى  $f$  ،  
فإنها تتقارب أيضاً في المتوسط إلى  $f$  . في الحقيقة يكون

$$\|f_n - f\|_1 \leq \{g(b) - g(a)\} \|f_n - f\|_\infty$$

لكن ، إذا كانت  $f_n$  تدل على الدالة في مثال ٣١-١ ، وإذا كانت  $g_n = (1/n)f_n$  ،  
فإن المتتابعة  $(g_n)$  تتقارب في المتوسط [بالنسبة إلى  $g(x) = x$ ] إلى الدالة صفر ، لكن  
التقارب ليس منتظماً في  $I$  .

٣١- (س) بفرض أن  $g(x) = x$  في  $J = [0, 2]$  وبفرض أن  $(I_n)$  متتابعة لفترات  
مغلقة في  $J$  بحيث أن (i) طول  $I_n$  هو  $1/n$  ، (ii)  $I_n \cap I_{n+1} = \emptyset$  ، (iii) كل  
نقطة  $x$  في  $J$  تنتمي إلى كثير لانهاى من  $I_n$  . نفرض  $f_n$  معرفة بأنها

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 1, & x \in I_n, \\ &= 0, & x \notin I_n \end{aligned}$$

أثبت أن المتتابعة  $(f_n)$  تتقارب في المتوسط [بالنسبة إلى  $g(x) = x$ ] إلى دالة الصفر  
في  $J$  ، لكن المتتابعة  $(f_n)$  لا تتقارب بانتظام . في الحقيقة ، لا تتقارب المتتابعة  $(f_n)$  عند  
أى نقطة .

٣١- (ع) بفرض أن  $g$  متزايدة باطراد في  $J = [a, b]$  إذا كانت  $h$  و  $f$  قابلتين

للتكامل بالنسبة إلى  $g$  في  $J$  إلى  $R$  تعرف حاصل الضرب الداخلي  $(f, h)$  للدالتين  $f, h$  بالقانون.

$$(f, h) = \int_a^b f(x)h(x) dg(x)$$

أثبت أن كل الخواص لتعريف ٨ - ٣ تكون متحققة ماعدا (ii). إذا كانت  $f = h$  هي دالة الصفر في  $J$ ، فإن  $(f, f) = 0$ ، لكن، ربما يحدث أن  $(f, f) = 0$  لدالة  $f$  لا تتلاشى في أي مكان في  $J$ .

٣١- (ف) عرف  $\|f\|_2$  بأنها .

$$\|f\|_2 = \left\{ \int_a^b |f(x)|^2 dg(x) \right\}^{1/2}$$

بحيث أن  $\|f\|_2 = (f, f)^{1/2}$  . أثبت متباينة اشفارتز

$$|(f, h)| \leq \|f\|_2 \|h\|_2$$

(نظرية ٨ - ٧ ، نظرية ٨ - ٨) : وضح أن الخواص المودية ٨ - ٥ تظل قائمة ، ماعدا أن  $\|f\|_2 = 0$  لا تدل على أن  $f(x) = 0$  لكل  $x$  في  $J$  . أثبت أن  $\|f\|_1 \leq \{g(b) - g(a)\}^{1/2} \|f\|_2$

٣١- (ص) بفرض أن  $n \in \mathbb{N}$  وأن  $f_n$  و  $f$  قابلتان للتكامل في  $J$  بالنسبة إلى دالة متزايدة  $g$  فنقول أن المتتابعة  $(f_n)$  تقترب في متوسط تربيع (بالنسبة إلى  $g$  في  $J$ ) إلى  $f$  إذا كانت  $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$

(١) وضح أنه إذا كانت المتتابعة تقاربية بانتظام في  $J$  ، فإنها أيضا تقترب في متوسط تربيع إلى نفس الدالة .

(ب) وضح أنه إذا كانت المتتابعة تقترب في متوسط تربيع فإنها تقترب في المتوسط إلى نفس الدالة .

(ج) وضح أن تمرين ٣١ - ص يبرهن أن التقارب في متوسط تربيع لا يدل على تقارب عند أي نقطة للفترة  $J$  .

(د) إذا أخذنا ، في تمرين ٣١ - ص ،  $I_n$  طولها  $1/n^2$  وإذا وضعنا  $h_n = nf_n$  ، فإن المتتابعة  $(h_n)$  تتقارب في المتوسط ، لكن لا تتقارب في متوسط تربيع ، إلى دالة الصفر .

٣١- (ق) أثبت أنه ، إذا كانت المشتقة التولية  $f^{(n)}$  متصلة في  $[a, b]$  ، فإن صورة التكامل لنظرية تايلور ٣١ - ٥ والنظرية الأولى للقيمة المتوسطة ٣٠ - ٩ يمكن استخدامها للحصول على صورة لاجرانج للباقي المطاة في ٢٨ - ٦ .

٣١- (ر) إذا كانت  $J_1 = [a, b]$  ،  $J_2 = [c, d]$  وإذا كانت  $f$  متصلة في  $J_1 \times J_2$



إلى  $R$  وكانت  $g$  قابلة للتكامل ريمان في  $J_1$  ، فإن الدالة  $F$  ، المرفقة في  $J_2$  بأنها

$$F(t) = \int_a^b f(x, t)g(x) dx$$

متصلة في  $J_2$  .

٣١- (ش) بفرض أن  $g$  دالة متزايدة في  $J_1 = [a, b]$  إلى  $R$  ونفرض أنه لكل  $t$  ثابتة في  $J_2 = [c, d]$  ، يكون التكامل

$$F(t) = \int_a^b f(x, t) dg(x)$$

موجود . إذا كانت المشتقة الجزئية  $f$  متصلة في  $J_1 \times J_2$  ، فإن المشتقة  $F'$  موجودة في  $J_2$  ومعطاة كما يلي .

$$F'(t) = \int_a^b f_t(x, t) dg(x)$$

٣١- (ت) بفرض أن  $J_1 = [a, b]$  و  $J_2 = [c, d]$  . وبفرض أن القيمة الحقيقية لدالة  $g$  تكون اطرادية في  $J_1$  وأن  $h$  اطرادية في  $J_2$  ، وأن  $f$  متصلة في  $J_1 \times J_2$  . عرف  $G$  في  $J_2$  ؛  $H$  على  $J_1$  بالتعريفين

$$G(t) = \int_a^b f(x, t) dg(x), \quad H(x) = \int_c^d f(x, t) dh(t)$$

أثبت أن  $G$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $h$  في  $J_2$  ، وأن  $H$  قابلة للتكامل بالنسبة إلى  $g$  في  $J_1$  وأن

$$\int_c^d G(t) dh(t) = \int_a^b H(x) dg(x)$$

يمكننا لتأكيد هذه المعادلة الأخيرة في الصورة .

$$\int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, t) dg(x) \right\} dh(t) = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, t) dh(t) \right\} dg(x)$$

٣١- (ث) بفرض أن  $J_1$  و  $J_2$  ، كما في تمرين ٣١ - ت . إذا كانت  $\varphi$  في  $C(J_1)$  (أي أن  $\varphi$  دالة متصلة في  $J_1$  إلى  $R$ ) بفرض أن  $T(\varphi)$  دالة معرفة في  $J_2$  بالقانون

$$T(\varphi)(t) = \int_a^b f(x, t)\varphi(x) dx$$

أثبت أن  $T$  هي تحويل خطي في  $C(J_1)$  إلى  $C(J_2)$  بمعنى أنه إذا كانت  $\varphi, \psi$  ، تنتميان إلى  $C(J_1)$  ، فإن

(أ)  $T(\varphi)$  تنتمي إلى  $C(J_2)$  .

(ب)  $T(\varphi + \psi) = T(\varphi) + T(\psi)$

(ج)  $T(c\varphi) = cT(\varphi)$  عند  $c \in \mathbb{R}$  .

إذا كانت  $M = \sup \{ |f(x, t)| : (x, t) \in J_1 \times J_2 \}$  ، فإن  $T$  محدودة بمعنى أنه

(د)  $\|T(\varphi)\|_{J_2} \leq M \|\varphi\|_{J_1}$  عند  $\varphi \in C(J_1)$  .

٣١- (خ) بالاستمرار في دلالة التمرين السابق ، وضع أنه إذا كانت  $r > 0$  ، فإن

$T$  ترسل المجموعة

$$B_r = \{\varphi \in C(J_1) : \|\varphi\|_{J_1} \leq r\}$$

إلى فئة متساوية الاتصال بانتظام لدوال في  $C(J_2)$  (أنظر تعريف ٢٨ - ٦) لذلك ،

إذا كانت  $(\varphi_n)$  أى متتابعة لدوال في  $B_r$  ، فإنه توجد متتابعة جزئية  $(\varphi_{n_k})$  بحيث أن

المتتابعة  $(T(\varphi_{n_k}))$  تتقارب بانتظام في  $J_2$  .

٣١- (ذ) بفرض أن  $J_1$  و  $J_2$  معرفان كما سبق وبفرض أن  $f$  متصلة في  $\mathbb{R} \times J_2$

إلى  $\mathbb{R}$  . إذا كانت  $\varphi$  في  $C(J_1)$  ، ونفرض أن  $S(\varphi)$  هي الدالة المعرفة في  $J_2$  بالقانون

$$S(\varphi)(t) = \int_a^b f(\varphi(x), t) dx$$

وضح أن  $S(\varphi)$  تنتمي إلى  $C(J_2)$  ، لكن ، في الحالة العامة ،  $S$  ليست تحويلاً خطياً

بمعنى تمرين ٣١- ث . وبالرغم من ذلك أثبت أن  $S$  ترسل المجموعة  $B_r$  في تمرين ٣١- خ

إلى فئة متساوية الاتصال بانتظام لدوال في  $C(J_2)$  . أيضاً ، إذا كانت  $(\varphi_n)$  أى متتابعة في

$B_r$  ، فستوجد متتابعة جزئية بحيث أن  $(S(\varphi_{n_k}))$  تتقارب بانتظام في  $J_2$  (هذه النتيجة هامة في

نظرية المعادلة التكاملية غير الخطية) .

٣١- (ض) وضع أنه إذا عرفنا  $G_0$  و  $G_1$  و  $G_2$  عند  $f$  في  $C(I)$  بأنها

$$G_0(f) = f(0), \quad G_1(f) = 2 \int_0^{1/2} f(x) dx,$$

$$G_2(f) = \frac{1}{2} \{f(0) + f(1)\}$$

فإن  $G_0$  و  $G_1$  و  $G_2$  دالات خطية موجبة محدودة في  $C(I)$  . أعط دوال بترابطة باطراد

$g_0$  و  $g_1$  و  $g_2$  تمثل هذه الدالات الخطية كشكاملات ريمان اشتلتجز . وضع أن الاختبار

للدوال  $g_i$  ليس محددًا وحيداً ما لم يكن  $g_i(0) = 0$  وأن  $g_i$  متصلة من اليمين عند كل

نقطة داخلية من  $I$  .

## مشروعات :

٣١ (α) هذا المشروع يثبت الوجود لحل وحيد لمعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى تحت وجود شرط لبشز . نفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  مفتوحة ونفرض أن  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  متصلة وتحقق شرط لبشز :  $|f(x, y) - f(x, y')| \leq K|y - y'|$  لجميع نقط  $(x, y), (x, y') \in \Omega$  . نفرض  $I$  خلية مغلقة

$$I = \{(x, y) : |x - a| \leq \alpha, |y - b| \leq \beta\}$$

محتوية في  $\Omega$  ونفرض أن  $M\alpha \leq \beta$  ، حيث  $|f(x, y)| \leq M$  عند  $(x, y) \in I$

(أ) إذا كانت  $J = [a - \alpha, a + \alpha]$  فإننا نعرف  $\varphi_0(x) = b$  عند  $x \in J$  وإذا كانت  $n \in \mathbb{N}$  ، فنعرف

$$\varphi_n(x) = b + \int_a^x f(t, \varphi_{n-1}(t)) dt$$

عند  $x \in J$  . أثبت بالاستنتاج أن المتتابعة  $(\varphi_n)$  معرفة جيدا في  $J$  وأن

$$|\varphi_n(x) - b| \leq \beta \quad (i)$$

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leq \frac{MK^{n-1}}{(n-1)!} |x - a|^{n-1} \quad (ii)$$

لكل  $x \in J$  .

(ب) أثبت أن كلا من الدوال  $\varphi_n$  متصلة في  $J$  وأن المتتابعة  $(\varphi_n)$  تتقارب بانتظام في  $J$  إلى دالة  $\varphi$  .

(ج) استنتج أن الدالة  $\varphi$  متصلة في  $J$  ، وتحقق  $\varphi(a) = b$  ، وأن

$$\varphi(x) = b + \int_a^x f(t, \varphi(t)) dt$$

لجميع  $x \in J$  . استنتج أن  $\varphi$  قابلة للتفاضل في  $J$  وتحقق

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \text{for } x \in J$$

(د) إذا كانت  $\psi$  متصلة في  $J$  وتحقق

$$\psi(a) = b, \quad \psi'(t) = f(t, \psi(t))$$

عند كل  $x \in J$  أثبت أن

$$\psi(x) = b + \int_a^x f(t, \psi(t)) dt \quad \text{for } x \in J$$

(هـ) إذا كانت  $\varphi$  كما في (ج) وكانت  $\psi$  كما في (د) ، أثبت بالاستنتاج أن

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq K \left| \int_a^x |\varphi(t) - \psi(t)| dt \right|$$

$$\leq \frac{K^n}{n!} \|\varphi - \psi\|_J |x - a|^n$$

ومن ثم  $\|\varphi - \psi\|_J \leq \|\varphi - \psi\|_J K^n \alpha^n / n!$  ، ومن ذلك ينتج أن  $\varphi(x) = \psi(x)$  لكل  $x \in J$

## الباب الثاني والثلاثون — تكاملات غير معينة ولا نهائية :

كان يوجد في الأبواب الثلاثة السابقة فرضان دائماً : كنا نطلب كون الدوال محدودة وكنا نطلب كون نطاق التكامل مدجماً . إذا أسقطنا أياً من هذين الفرضين فإن نظرية التكامل القادمة لا تستخدم بدون بعض التغيير ، بما أنه عدد من التطبيقات الهامة التي يكون فيها من المستحسن السماح لأحد أو كلتا هذه الظواهر الجديدة . سنشير هنا إلى التغييرات التي يمكن إجراؤها .

### دوال غير محدودة :

نفرض أن  $J = [a, b]$  فترة في  $R$  ونفرض أن  $f$  دالة حقيقية القيمة ومعرفة على الأقل عندما  $x$  تحقق  $a < x \leq b$  . إذا كانت  $f$  قابلة لتكامل ريمان في الفترة  $[c, b]$  لكل  $c$  تحقق  $a < c \leq b$  ، ونفرض أن

$$I_c = \int_c^b f \quad (32.1)$$

سنعرف التكامل غير المعين للدالة  $f$  في  $J = [a, b]$  بأنه نهاية المقدار  $I_c$  عندما  $c \rightarrow a$  .

٣٢ - ١ تعريف . نفرض أن تكامل ريمان في (٣٢ - ١) موجود لكل  $c$  في  $(a, b]$  . نفرض أنه يوجد عدد حقيق  $I$  بحيث أنه عند كل  $\varepsilon > 0$  يوجد  $\delta(\varepsilon) > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $a < c < a + \delta(\varepsilon)$  فإن  $|I_c - I| < \varepsilon$  . في هذه الحالة نقول أن  $I$  هي التكامل غير المعين للدالة  $f$  في  $J = [a, b]$  وأحياناً نرمز للقيمة  $I$  لهذا التكامل غير المعين بأنه

$$\int_{a+}^b f \quad \text{or by} \quad \int_{a+}^b f(x) dx \quad (32.2)$$

مع أنه من المعتاد بكثرة عدم كتابة إشارة + في الحد الأسفل .

٣٢ - ٢ أمثلة . (أ) نفرض أن الدالة  $f$  معرفة في  $(a, b]$  ومحدودة في هذه الفترة . إذا كانت  $f$  قابلة لتكامل ريمان في كل فترة  $[c, b]$  حيث  $a < c \leq b$  ، فإنه من السهل

ملاحظة (تمرين ٣٢-١) أن التكامل غير المعين (٣٢-٢) موجود . أى أن الدالة  $f(x) = \sin(1/x)$  لها تكامل غير معين في الفترة  $[0, 1]$  .

(ب) إذا كانت  $f(x) = 1/x$  عند  $x$  في الفترة  $(0, 1]$  وإذا كانت  $c$  في الفترة  $(0, 1]$  فينتج من النظرية الأساسية ٣٠-٨ ومن حقيقة كون  $f$  هي المشتقة للوغاريتم أن

$$I_c = \int_c^1 f = \log 1 - \log c = -\log c$$

بما أن  $\log c$  يصبح غير محدودة عند  $c \rightarrow 0$  ، فإن التكامل غير المعين للدالة  $f$  في الفترة  $[0, 1]$  غير موجود .

(ج) نفرض أن  $f(x) = x^\alpha$  عند  $x$  في  $(0, 1]$  . إذا كانت  $\alpha < 0$  ، فإن الدالة متصلة لكنها غير محدودة في  $[0, 1]$  . إذا كانت  $\alpha \neq -1$  ، فإن  $f$  هي مشتقة للدالة .

$$g(x) = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$$

ينتج من النظرية الأساسية ٣٠-٨ أن

$$\int_c^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} (1 - c^{\alpha+1})$$

إذا كانت  $\alpha$  تحقق  $-1 < \alpha < 0$  ، فإن  $c^{\alpha+1} \rightarrow 0$  عندما  $c \rightarrow 0$  ويكون للدالة  $f$  تكامل غير معين ومن الناحية الأخرى ، إذا كانت  $\alpha < -1$  فإن  $c^{\alpha+1}$  ليس لها نهاية محدودة عندما  $c \rightarrow 0$  ومن ثم فإن الدالة  $f$  ليس لها تكامل غير معين .

تتعلق المناقشة السابقة بدالة غير معروفة أو ليست محدودة عند النقطة الطرفية اليسرى للفترة . من الواضح كيفية معالجة السلوك المماثل عند النقطة الطرفية اليمنى . أحياناً تهتم أكثر بالحالة التي يكون فيها الدالة ليست معرفة وليست محدودة عند نقطة داخلية للفترة ، ونفرض أن  $p$  هي نقطة داخلية للفترة  $[a, b]$  ونفرض أن  $f$  معرفة عند كل نقطة للفترة  $[a, b]$  ماعداً ربما عند  $p$  . إذا كان كلا التكاملين غير المعينين

$$\int_a^{p-} f, \quad \int_{p+}^b f$$

موجودين فإننا نعرف التكامل غير المعين للدالة  $f$  في الفترة  $[a, b]$  بأنه حاصل جمعها وبمفهوم النهاية ، نعرف التكامل غير المعين للدالة  $f$  في الفترة  $[a, b]$  بأنه

$$(32.3) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_a^{p-\epsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{p+\delta}^b f(x) dx$$

من الواضح أنه إذا كانت هاتان النهايتان موجودتين ، فإن النهاية الواحدة

$$(32.4) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left\{ \int_a^{p-\varepsilon} f(x) dx + \int_{p+\varepsilon}^b f(x) dx \right\}$$

موجودة أيضاً ولها نفس القيمة . لكن ، وجود النهاية ( ٣٢ - ٤ ) لا يتضمن وجود ( ٣٢ - ٣ ) .  
فثلاً ، إذا كانت  $f$  معرفة عند  $x \in [-1, 1], x \neq 0$  بأنها  $f(x) = 1/x^3$  ، فإنه من السهل ملاحظة أن

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \left( \frac{1}{x^3} \right) dx + \int_{\varepsilon}^1 \left( \frac{1}{x^3} \right) dx = \left( \frac{-1}{2} \right) \left( \frac{1}{\varepsilon^2} - 1 \right) + \left( \frac{-1}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \right) = 0$$

لكل  $\varepsilon$  تحقق  $0 < \varepsilon < 1$  . لكن ، قد رأينا في مثال ( ٣٢ - ٢ ) ( ج ) أنه إذا كانت  $\alpha = -3$  ، فإن التكاملين غير المعينين

$$\int_{-1}^{0-} \frac{1}{x^3} dx, \quad \int_{0+}^1 \frac{1}{x^3} dx$$

غير موجودين .

الشرح السابق يوضح أن النهاية في ( ٣٢ - ٤ ) ربما يكون موجوداً بدون كون النهاية في ( ٣٢ - ٣ ) موجودة . عرفنا التكامل غير المعين ( الذي أحياناً يسمى تكامل كوشي ) للدالة  $f$  المعطى بالصيغة ( ٣٢ - ٣ ) . النهاية الموجودة في ( ٣٢ - ٤ ) مهمة أيضاً وتسمى بالقيمة الأساسية لكوشي للتكامل ويرمز له بالرمز

$$(CPV) \int_a^b f(x) dx$$

من الواضح أن دالة لها عدد محدود من نقاط ليست معرفة أو محدودة عندها يمكن معالجتها بتجزء الفترة إلى فترات جزئية بهذه النقاط كنقط طرفية .

### تكاملات لا نهائية :

من المهم على امتداد التكامل لدوال معينة معرفة في فئات غير محدودة مثال ذلك ، إذا كانت  $f$  معرفة في  $\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$  إلى  $\mathbb{R}$  وكانت قابلة لتكامل ريمان في  $[a, c]$  لكل  $c > a$  ، فنفرض أن  $I_c$  هو التكامل الجزئي المعطى بأنه

$$(32.5) \quad I_c = \int_a^c f$$

سنعرف الآن « التكامل اللانهائي » للدالة  $f$  عند  $x \geq a$  بأنه النهاية للتكامل  $I_c$  عندما  $c$  تزداد .

٣٢ - ٣ تعريف . إذا كانت  $f$  قابلة لتكامل ريمان على  $[a, c]$  لكل  $c > a$  ، فنفرض أن  $I_c$  أنه التكامل الجزئي المعطى بالصيغة ( ٣٢ - ٥ ) . يقال لعدد حقيقي  $I$  أنه تكامل لانهائي للدالة

$f$  على  $\{x : x \geq a\}$  إذا كان يوجد لكل  $\varepsilon > 0$  ، عدد حقيقي  $M(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $c > M(\varepsilon)$  فإن  $|I - I_c| < \varepsilon$  في هذه الحالة ترمز إلى  $I$  بالرمز

$$(32.6) \quad \int_a^{+\infty} f \quad \text{or} \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

يجب ملاحظة أن تكاملات لانهائية تسمى أحياناً « تكاملات غير معينة من النوع الأول »  
نفضل المصطلح الحالي ، الذى يرجع إلى هاردى (\*) ، لأنه أسهل ومواز للاصطلاح المستخدم  
في حالة المتسلسلات اللانهائية .

٣٢ - أمثلة . (أ) إذا كانت  $f(x) = 1/x$  عند  $x > a > 0$  فإن التكاملات  
الجزئية هي

$$I_c = \int_a^c \frac{1}{x} dx = \log c - \log a$$

بما أن  $\log c$  تصبح غير محدودة عندما  $c \rightarrow +\infty$  فإن التكامل اللانهائى للدالة  $f$  غير موجودة .

(ب) نفرض أن  $f(x) = x^\alpha$  عند  $x \geq a > 0$  وأن  $\alpha \neq -1$  . إذن

$$I_c = \int_a^c x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} (c^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})$$

إذا كانت  $\alpha > -1$  ، فإن  $\alpha + 1 > 0$  والتكامل اللانهائى لا يوجد . لكن ، إذا كانت  $\alpha < -1$  ، فإن

$$\int_a^{+\infty} x^\alpha dx = -\frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

(ج) نفرض أن  $f(x) = e^{-x}$  عند  $x \geq 0$  بإذن

$$\int_0^c e^{-x} dx = -(e^{-c} - 1)$$

ومن ثم التكامل اللانهائى للدالة  $f$  في  $\{x : x \geq 0\}$  موجود ويساوى الواحد الصحيح .

من الممكن أيضاً اعتبار التكامل لدالة معرفة في كل  $\mathbf{R}$  . في هذه الحالة نطلب أن  $f$   
تكون قابلة لتكامل ريمان على كل فترة محدودة في  $\mathbf{R}$  ونعتبر النهايتين

$$(32.7a) \quad \int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f(x) dx,$$

$$(32.7b) \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) dx$$

(\*) جيفرى هاردى ( ١٨٧٧ - ١٩٤٧ ) كان استاذاً بكمبريدج وكان عميد الرياضيات الانجليزية  
لوقت طويل . قدم مساهمات كثيرة وعميقة الى التحليل الرياضى .

من السهل أن نرى أنه إذا كانت كلتا هاتين النهايتين موجودتين لقيمة واحدة المقدار ، فإن  $a$  كلتا النهايتين موجودتان لكل قيم  $a$  . في هذه الحالة نعرف التكامل اللانهائي للدالة  $f$  على الفراغ  $R$  بأنه حاصل جمع هذين التكاملين اللانهائيين

$$(32.8) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f(x) dx + \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) dx$$

وكما في حالة التكاملات غير المعينة يكون وجود كلتا النهايتين في ( ٣٢ - ٨ ) متضمناً وجود النهاية

$$(32.9) \quad \lim_{c \rightarrow +\infty} \left\{ \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_a^c f(x) dx \right\} = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^c f(x) dx$$

وتساوى ( ٣٢ - ٨ ) ، ( ٣٢ - ٩ ) . تسمى النهاية في ( ٣٢ - ٩ ) ، أن وجدت ، غالباً بالقيمة الأساسية لكوثي للتكامل اللانهائي على الفراغ  $R$  ويرمز له بالرمز

$$(32.10) \quad (\text{CPV}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

لكن ، وجود القيمة الأساسية لكوثي لا يتضمن وجود التكامل اللانهائي ( ٣٢ - ٨ ) يلاحظ هذا باعتبار  $f(x) = x$  ، لذلك

$$\int_{-\infty}^c x dx = \frac{1}{2}(c^2 - c^2) = 0$$

لجميع  $c$  أى أن القيمة الأساسية لكوثي للتكامل اللانهائي عند  $f(x) = x$  موجودة وتساوى الصفر ، لكن التكامل اللانهائي لهذه الدالة غير موجودة ، حيث لا يوجد أى من التكاملات اللانهائية في ( ٣٢ - ٧ ) .

## وجود التكامل اللانهائي :

سنحصل الآن على شروط قليلة لوجود التكامل اللانهائي في الفئة  $\{x : x \geq a\}$  . هذه النتائج يمكن استخدامها أيضاً لتعطي شروطاً للتكامل اللانهائي في الفراغ  $R$  ، حيث أن الأخير يشمل اعتبار التكاملات اللانهائية على الفئتين  $\{x : x \geq a\}$  و  $\{x : x \leq a\}$  ندون أول معيار كوثي .

٣٢ - ٥ معيار كوثي . نفرض أن  $f$  قابلة للتكامل على  $[a, c]$  لكل  $c \geq a$  . إذن التكامل اللانهائي

$$\int_a^{+\infty} f$$

موجود إذا وإذا فقط كان يوجد لكل  $\varepsilon > 0$  ،  $K(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $b \geq c \geq K(\varepsilon)$  فإن



$$(32.11) \quad \left| \int_c^b f \right| < \varepsilon$$

البرهان . نثبت ضرورية الشرط بالطريقة العادية . نفرض أن الشرط متحقق ونفرض أن  $I_n$

تكامل جزئي معرف عند  $n \in \mathbb{N}$  بأنه

$$I_n = \int_a^{a+n} f$$

يلاحظ أن  $(I_n)$  هي متتابعة كوشي لأعداد حقيقية . إذا كانت  $I = \lim (I_n)$  ، وكانت  $\varepsilon > 0$  ، فإنه يوجد  $N(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $n \geq N(\varepsilon)$  ، فإن  $|I - I_n| < \varepsilon$  . نفرض أن  $M(\varepsilon) = \sup\{K(\varepsilon), a + N(\varepsilon)\} + 1$  وأن  $c > M(\varepsilon)$  . إذن يوجد عدد طبيعي  $n \geq N(\varepsilon)$  بحيث أن  $a + n < c$  لذلك يعطى التكامل الجزئي  $I_c$  كما يلي

$$I_c = \int_a^c f = \int_a^{a+n} f + \int_{a+n}^c f$$

ومنها ينتج أن  $|I - I_c| < 2\varepsilon$  وهو المطلوب إثباته

في الحالة الهامة حيث  $f(x) \geq 0$  لجميع  $x \geq a$  نمدنا النتيجة الآتية باختبار مفيد .

٣٢ - نظرية . نفرض أن  $f(x) \geq 0$  لكل  $x \geq a$  وأن  $f$  قابلة للتكامل على  $[a, c]$  لكل  $c \geq a$  . إذن التكامل اللانهائي للدالة  $f$  موجود إذا  $g$  إذا فقط كانت الفتحة  $\{I_c : c \geq a\}$  محدودة . في هذه الحالة

$$\int_a^{+\infty} f = \sup \left\{ \int_a^c f : c \geq a \right\}$$

البرهان : الفرض بأن  $f(x) \geq 0$  يدل على أن  $I_c$  دالة متزايدة بإطراد للعدد  $c$  . لذلك ، يكون وجود  $\lim I_c$  مكافئاً لمحدودية  $\{I_c : c \geq a\}$

٣٣ - اختبار مقارنة . نفرض أن  $g$  و  $f$  قابلتان للتكامل على  $[a, c]$  لكل  $c \geq a$  وأن  $|f(x)| \leq g(x)$  لكل  $x \geq a$  . إذا كان التكامل اللانهائي للدالة  $g$  موجوداً ، فإن التكامل اللانهائي للدالة  $f$  موجود وأن

$$\left| \int_a^{+\infty} f \right| \leq \int_a^{+\infty} g$$

البرهان . إذا كانت  $a \leq c < b$  ، فينتج من مفترض (٣٠ - ٥) أن  $|f|$  قابلة للتكامل على  $[c, b]$  وأن

$$\left| \int_c^b f \right| \leq \int_c^b |f| \leq \int_c^b g$$

ينتج من معيار كوشي ( ٣٢ - ٥ ) أن التكاملين اللانهائيين للدالة  $f$  ،  $|f|$  موجودان وبالإضافة إلى ذلك نجد أن

$$\left| \int_a^{+\infty} f \right| \leq \int_a^{+\infty} |f| \leq \int_a^{+\infty} g$$

وهو المطلوب إثباته

٣٢ - ٨ اختبار مقارنة للنهائية . نفرض أن  $g$  و  $f$  موجبان وقابلان للتكامل على  $[a, c]$  لكل  $a \geq c$  وأنه

$$(32.12) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$$

حينئذ يكون كل من أولاً أحد من التكاملين اللانهائيين  $\int_a^{+\infty} g$  ،  $\int_a^{+\infty} f$  موجود .

البرهان . وحسب العلاقة ( ٣٢ - ١٢ ) نستنتج أنه توجد أعداد موجبة  $A < B$  ،  $K \geq a$  بحيث أن

$$Ag(x) \leq f(x) \leq Bg(x) \quad \text{for } x \geq K$$

اختبار المقارنة ( ٣٢ - ٧ ) وهذه العلاقة يوضحان أن كلا من أولاً أحد من التكاملات النهائية  $\int_K^{+\infty} f$  ،  $\int_K^{+\infty} g$  موجود . بما أن كلا من  $g$  و  $f$  قابلة للتكامل في  $[a, K]$  ، فينتج المطلوب . وهو المطلوب إثباته

٣٢ - ٩ اختبار ديرشليت . نفرض أن  $f$  متصلة عند  $x \geq a$  ونفرض أن التكاملات الجزئية

$$I_c = \int_a^c f, \quad c \geq a$$

محدودة ، وأن  $\varphi$  تتناقص بإطراد إلى صفر عندما  $x \rightarrow +\infty$  . إذن التكامل اللانهائي  $\int_a^{+\infty} f\varphi$  موجود .

البرهان . نفرض أن  $A$  حداً للفئة  $\{ |I_c| : c \geq a \}$  . إذا كانت  $\varepsilon > 0$  ، فنفرض  $K(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $x \geq K(\varepsilon)$  ، فإن  $0 \leq \varphi(x) \leq \varepsilon/2A$  . إذا كانت  $b \geq c \geq K(\varepsilon)$  ، فينتج من تمرين ( ٣٠ - ن ) أنه يوجد عدد  $\xi$  في الفترة  $[c, b]$  بحيث أن

$$\int_c^b f\varphi = \varphi(\xi) \int_c^b f$$

حسب التقدير

$$\left| \int_c^b f \right| = |I_\xi - I_c| \leq 2A$$

ينتج أن

$$\left| \int_c^b f \varphi \right| < \varepsilon$$

عند  $b \geq c$  وكان كلا منهما يزيد عن المقدار  $K(\varepsilon)$ . إذن يمكننا استخدام معيار كوشي وهو المطلوب إثباته ( ٣٢ - ٥ )

٣٢ - ١٠ أمثلة . (أ) إذا كانت  $f(x) = 1/(1+x^2)$  و  $g(x) = 1/x^2$  عند  $x \geq a > 0$  فإن  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  بما أننا قد رأينا حالا في مثال ( ٣٢ - ٤ ) (ب) أن التكامل اللانهائي  $\int_1^{\infty} (1/x^2) dx$  موجودة فينتج من اختبار المقارنة ( ٣٢ - ٧ ) أن التكامل اللانهائي  $\int_1^{\infty} (1/(1+x^2)) dx$  موجود أيضاً ( يمكن توضيح هذا مباشرة بملاحظة أن

$$\int_1^c \frac{1}{1+x^2} dx = \text{Arc tan } c - \text{Arc tan } 1$$

وأن  $c \rightarrow +\infty$  عندما  $\text{Arc tan } c \rightarrow \pi/2$  )

(ب) إذا كانت  $h(x) = e^{-x^2}$  و  $g(x) = e^{-x}$  ، فإن  $0 \leq h(x) \leq g(x)$  ،  $x \geq 1$  . لاحظنا في مثال ( ٣٢ - ٤ ) (ج) أن التكامل اللانهائي  $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$  موجود ، ومن ثم ينتج من اختبار المقارنة ( ٣٢ - ٧ ) أن التكامل اللانهائي  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$  موجود أيضاً . هذه المرة ، يكون حساباً مباشراً للتكاملات الجزئية ليس ممكناً ، باستخدام دوال أساسية . لكن ، سيري فيما بعد أن هذا التكامل اللانهائي يساوي  $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

(ج) نفرض أن  $p > 0$  ونعتبر وجود التكامل اللانهائي

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$$

إذا كانت  $p > 1$  ، فإن الدالة المراد تكاملها يكون المقدار  $1/x^p$  مسيطراً عليها ، وقد لاحظنا في مثال ( ٣٢ - ٤ ) (ب) أنه تقارب . في هذه الحالة بدل اختبار المقارنة على أن التكامل اللانهائي يتقارب . إذا كانت  $0 < p \leq 1$  ؛ فإن هذا الاستدلال يفشل ، لكن ، إذا وضعنا  $\varphi(x) = 1/x^p$  ،  $f(x) = \sin x$  فإن اختبار ديرشلت ( ٣٢ - ٩ ) يوضح أن التكامل اللانهائي موجود .

(د) نفرض  $f(x) = \sin x^2$  عند  $x \geq 0$  ونعتبر تكامل فريسنل(\*)

(\*) أوجستن فريسنل ( ١٧٨٨ - ١٨٢٧ ) ، كان فرنسياً فيزيائياً رياضياً ، وساعد في إعادة إثبات النظرية الموجبة للضوء التي قد قدمت قبل ذلك بواسطة هيجينز .

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$$

من الواضح أن التكامل على  $[0, 1]$  موجود ، لذلك سوف نختبر فقط التكامل على  $\{x : x \geq 1\}$  .  
إذا أجرينا التعويض  $t = x^2$  واستخدمنا نظرية تغير المتغير ( ٣٠ - ١٢ ) ، نحصل على

$$\int_1^c \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_1^{c^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

المثال السابق يوضح أن التكامل الموجود في الطرف الأيمن يتقارب عند  $c \rightarrow +\infty$  ؛ ومن  
ينتج أن  $\int_1^{+\infty} \sin x^2 dx$  موجود . ( يجب ملاحظة أن الدالة المراد تكاملها لا تقترب من صفر  
عندما  $x \rightarrow +\infty$  )

( ٨ ) نفرض أن  $\alpha \geq 1$  ونفرض أن  $\Gamma(\alpha)$  معرفة بالتكامل

$$(32.13) \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$$

لإثبات وجود هذا التكامل اللانهائي ، نعتبر الدالة  $g(x) = 1/x^2$  عند  $x \geq 1$  . وحيث أن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} x^{\alpha-1}}{x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{e^x} = 0$$

ينتج أنه إذا كانت  $\varepsilon > 0$  فإنه توجد  $K(\varepsilon)$  بحيث أن

$$0 < e^{-x} x^{\alpha-1} \leq \varepsilon x^{-2} \quad \text{for } x \leq K(\varepsilon)$$

بما أن التكامل اللانهائي  $\int_K^{+\infty} x^{-2} dx$  موجود ، فنستنتج أن التكامل ( ٣٢ - ١٣ ) يتقارب  
أيضاً . الدالة الهامة المعرفة عند  $\alpha \geq 1$  بالقانون ( ٣٢ - ١٣ ) تسمى دالة جاما . سنبين حالا أنه  
إذا كانت  $\alpha < 1$  ، فإن الدالة المراد تكاملها أي  $e^{-x} x^{\alpha-1}$  تصبح غير محدودة في جوار  $x = 0$   
لكن ، إذا كانت  $\alpha$  تحقق  $0 < \alpha < 1$  ، فقد رأينا في مثال ٣٢ - ٢ ( ج ) أن الدالة  
 $x^{\alpha-1}$  لها تكامل غير معين على الفترة  $[0, 1]$  . بما أن  $0 < e^{-x} \leq 1$  لجميع  $x \geq 0$  ، فقد  
أثبتنا حالا أن التكامل غير المعين

$$\int_{0+}^1 e^{-x} x^{\alpha-1} dx$$

موجود عند  $0 < \alpha < 1$  . ومن ثم ، يمكننا مد التعريف لدالة جاما المغطاة لكل  $\alpha > 0$  بتكامل  
على الصورة ( ٣٢ - ١٣ ) بشرط تفسيره كحاصل جمع

$$\int_{n+}^{\alpha} e^{-x} x^{\alpha-1} dx + \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$$

لتكامل غير معين وتكامل لانهائي

## تقارب مطلق :

إذا كانت  $f$  قابلة للتكامل ريمان في  $[a, c]$  لكل  $a \leq c$  ، فينتج من نظرية ( ٣٠ - ٤ )  
(أ) أن  $|f|$  ، القيمة المطلقة للدالة  $f$  ، تكون أيضاً قابلة للتكامل ريمان في  $[a, c]$  عند  $c \geq a$  .  
ينتج من اختبار المقارنة ( ٣٢ - ٧ ) أنه إذا كانت التكامل اللانهائي

$$(32.14) \quad \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

موجود ، فإن التكامل اللانهائي

$$(32.15) \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

موجود أيضاً ويكون محدداً بالقيمة المطلقة ( ٣٢ - ١٤ ) .

٣٢ - ١١ تعريف . إذا كان التكامل اللانهائي ( ٣٢ - ١٤ ) موجود ، فنقول أن  $f$  قابلة للتكامل مطلقاً على  $\{x : x \geq a\}$  ، أو أن التكامل اللانهائي ( ٣٢ - ١٥ ) متقارب تقارباً مطلقاً .

قد لاحظنا أنه إذا كانت  $f$  قابلة للتكامل مطلقاً على  $\{x : x \geq a\}$  ، فإن التكامل اللانهائي ( ٣٢ - ١٥ ) موجود . العكس ليس ، صحيحاً ، لكن ، كما يلاحظ باعتبار التكامل

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

أثبتنا التقارب لهذا التكامل في مثال ( ٣٢ - ١٠ ) ( ج ) . لكن ، من السهل ملاحظة أنه في كل فترة  $[k\pi, (k+1)\pi]$  ،  $k \in \mathbb{N}$  توجد فترة جزئية طولها  $b > 0$  التي فيها  
 $|\sin x| \geq \frac{1}{2}$

( في الحقيقة ، يمكن أخذ  $b = 2\pi/3$  ) . لذلك ، نجد أن

$$\int_{\pi}^{k\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \int_{\pi}^{2\pi} + \dots + \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \geq \frac{b}{2} \left\{ \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{3\pi} + \dots + \frac{1}{k\pi} \right\}$$

وإذن ينتج أنظر ( ١٦ - ١١ ج ) أن الدالة  $f(x) = \sin x/x$  ليست قابلة للتكامل مطلقاً فوق  $\{x : x \geq \pi\}$  .

نلاحظ أن اختبار المقارنة ( ٣٢ - ٧ ) يثبت في الحقيقة التقارب المطلق للتكامل اللانهائي للدالة  $f$  على الفترة  $[a, +\infty)$  .

## تمارين :

٣٢- (أ) بفرض أن  $f$  دالة حقيقية القيمة محدودة في الفترة  $J = [a, b]$  وأن  $f$  قابلة للتكامل في  $[c, b]$  لكل  $c > a$ . أثبت أن التكامل غير المعين للدالة  $f$  في  $J$  موجود .

٣٢- (ب) بفرض أن  $f$  قابلة للتكامل في  $[c, b]$  لكل  $c > a$  وأن التكامل غير المعين  $\int_a^b |f|$  موجود . وضع أن التكامل غير المعين  $\int_a^b f$  موجود ، لكن العكس ربما لا يكون صحيحاً .

٣٢- (ج) نفرض أن  $f$  و  $g$  قابلة للتكامل في  $[c, b]$  لجميع  $c \in (a, b)$  . إذا كانت  $|f(x)| \leq g(x)$  عند  $x \in J = [a, b]$  وإذا إذا كانت  $g$  لها تكامل غير معين في  $J$  ، فإن الدالة  $f$  يكون لها تكامل غير معين .

٣٢- (د) ناقش التقارب أو التباعد للتكاملات غير المعينة الآتية :

$$\begin{array}{ll} \int_0^1 \frac{dx}{(x-x^2)^{1/2}} \quad (\text{ب}) & \int_0^1 \frac{dx}{(x+x^2)^{1/2}} \quad (\text{أ}) \\ \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx \quad (\text{د}) & \int_0^1 \frac{x dx}{(1-x^3)} \quad (\text{ج}) \\ \int_0^1 \frac{x dx}{(1-x^3)^{1/2}} \quad (\text{و}) & \int_0^1 \frac{\log x}{1-x^2} dx \quad (\text{هـ}) \end{array}$$

٣٢- (هـ) حدد قيم  $q$  و  $p$  التي عندها تتقارب التكاملات الآتية :

$$\begin{array}{ll} \int_0^{\pi/2} x^p (\sin x)^q dx \quad (\text{ب}) & \int_0^1 x^p (1-x)^q dx \quad (\text{أ}) \\ \int_0^1 x^p (-\log x)^q dx \quad (\text{د}) & \int_1^2 (\log x)^p dx \quad (\text{ج}) \end{array}$$

٣٢- (و) ناقش التقارب أو التباعد للتكاملات الآتية . أي التكاملات تتقارب مطلقاً :

$$\begin{array}{ll} \int_1^{+\infty} \frac{x+2}{x^2+1} dx \quad (\text{ب}) & \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})} \quad (\text{أ}) \\ \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx \quad (\text{د}) & \int_1^{+\infty} \frac{\sin(1/x)}{x} dx \quad (\text{ج}) \\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \sin 2x}{x} dx \quad (\text{و}) & \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx \quad (\text{هـ}) \end{array}$$

٣٢- (ز) لأي قيم  $q$  و  $p$  تتقارب التكاملات الآتية ؟ لأي قيم يكون التقارب مطلقاً ؟

$$\begin{array}{ll} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^q} dx \quad (\text{ب}) & \int_1^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q} dx \quad (\text{أ}) \\ \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^q} dx \quad (\text{د}) & \int_1^{+\infty} \frac{\sin x^p}{x} dx \quad (\text{ج}) \end{array}$$

٣٢- (ح) إذا كانت  $f$  قابلة للتكامل في أي فترة  $[0, c]$  عند  $c > 0$  ، أثبت التكامل  $\int_0^c f$  اللانهائي موجود إذا وإذا فقط كان التكامل اللانهائي  $\int_0^+ f$  موجوداً .

٣٢- (ط) اعط مثالا يكون فيه التكامل اللانهائي  $\int_0^+ f$  موجوداً لكن فيه الدالة  $f$  ليست محدودة في الفترة  $\{x : x \geq 0\}$  .

٣٢- (ي) إذا كانت  $f$  إطرادية وكان التكامل اللانهائي  $\int_0^+ f$  موجوداً ، فإن  $xf(x) \rightarrow 0$  عند  $x \rightarrow +\infty$  .

### الباب الثالث والثلاثون — تقارب منتظم وتكاملات لا نهائية :

من المهم في تطبيقات كثيرة اعتبار تكاملات لانهاية فيها الدالة المراد تكاملها تعتمد على بارامتر . وللمعالجة هذه الحالة بسهولة نذكر أن ، المفهوم لتقارب منتظم للتكامل بالنسبة إلى البارامتر له أهمية أولى . سنبحث أولاً الحالة التي فيها البارامتر ينتمي إلى فترة  $J = [\alpha, \beta]$  .

٣٣- ١ تعريف . نفرض أن  $f$  دالة حقيقية القيمة ، ومعرفة عند  $(x, t)$  حيث  $x \geq a$  ،  $\alpha \leq t \leq \beta$  . نفرض أنه لكل  $t$  في الفترة  $J = [\alpha, \beta]$  يكون التكامل اللانهائي

$$(33.1) \quad F(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$$

موجوداً . نقول أن هذا التقارب منتظم على  $J$  إذا كان يوجد لكل  $\varepsilon > 0$  عدد  $N(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $c \geq N(\varepsilon)$  و  $t \in J$  ، فإن

$$\left| F(t) - \int_a^c f(x, t) dx \right| < \varepsilon$$

التمييز بين التقارب المادي للتكاملات اللانهائية المعطاة في (٣٣ - ١) والتقارب المنتظم هو أن  $M(\varepsilon)$  يمكن اختياره بحيث لا يتوقف على القيمة  $t$  في  $J$  . سنترك للقارئ كتابة التعريف لتقارب منتظم للتكاملات اللانهائية عندما ينتمي البارامتر  $t$  إلى الفترة  $\{t : t \geq \alpha\}$  أو إلى الفترة  $N$  .

من المفيد وجود بعض اختبارات لتقارب المنتظم للتكامل اللانهائي .

٣٣- ٢ معيار كوشي . نفرض أنه لكل  $t \in J$  ، يكون التكامل اللانهائي (٣٣ - ١) موجوداً . حينئذ التقارب يكون منتظماً في  $J$  إذا وإذا فقط كان يوجد لكل  $\varepsilon > 0$  عدد  $K(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $b \geq c \geq K(\varepsilon)$  و  $t \in J$  ، فإن

$$(33.2) \quad \left| \int_c^b f(x, t) dx \right| < \varepsilon$$

نترك البرهان كتمرين .

٣٣-٣ اختيار  $M$  لغير اشتراط . نفرض أن  $f$  قابلة لتكامل ريمان على الفترة  $[a, c]$  لكل  $c \geq a$  وكل  $t \in J$  . نفرض أنه يوجد دالة موجبة  $M$  معرفة عند  $x \geq a$  بحيث أن

$$|f(x, t)| \leq M(x) \quad \text{for } x \geq a, t \in J$$

وبحيث أن التكامل اللانهائي  $\int_a^{+\infty} M(x) dx$  موجود . حينئذ ، لكل  $t \in J$  ، يكون التكامل في (٣٣-١) تقاربياً مطلقاً ويكون التقارب منتظماً في  $J$  .

البرهان . التقارب للتكامل

$$\int_a^{+\infty} |f(x, t)| dx \quad \text{for } t \in J$$

نتيجة مباشرة لاختبار المقارنة والفروض ، لذلك ، يكون التكامل المنتج للدالة  $F(t)$  تقاربياً مطلقاً عند  $t \in J$  . إذا استخدمنا معيار كوشي مع التقدير .

$$\left| \int_c^b f(x, t) dx \right| \leq \int_c^b |f(x, t)| dx \leq \int_c^b M(x) dx$$

يمكننا بسهولة إثبات التقارب المنتظم في  $J$  . وهو المطلوب إثباته

اختبار  $M$  لغير اشتراط مفيد عند ما يكون التقارب مطلقاً وأيضاً منتظماً ، لكن بحث الحالة التي فيها التقارب ليس تقاربياً مطلقاً منتظماً ليس دقيقاً بدرجة كافية . لهذا ، نرجع إلى اختيار مناظر لاختبار ديرشلت (٣٣-٩) .

٣٣-٤ اختبار ديرشلت . نفرض أن  $f$  متصلة في  $(x, t)$  عند  $x \geq a$  وعند  $t$  في الفترة  $J$  ونفرض أنه يوجد مقدار ثابت  $A$  بحيث أن

$$\left| \int_a^c f(x, t) dx \right| \leq A \quad \text{for } c \geq a, t \in J$$

نفرض أنه لكل  $t \in J$  ، تكون الدالة  $\varphi(x, t)$  متناقصة بإطراد عند  $x \geq a$  وتقترب إلى 0 عندما  $x \rightarrow +\infty$  بانتظام حيث  $t \in J$  . إذن التكامل

$$F(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) \varphi(x, t) dx$$

يتقارب بانتظام في  $J$  .

البرهان . نفرض أن  $\varepsilon > 0$  ونختار  $K(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $x \geq K(\varepsilon)$  وأن  $t \in J$  ، فإن  $\varphi(x, t) < \varepsilon/2A$  . إذا كانت  $b \geq c \geq K(\varepsilon)$  ، فينتج من تمرين (٣٠-ن) أنه يوجد لكل  $t \in J$  ، عدد  $\xi(t)$  في الفترة  $[c, b]$  بحيث أن



$$\int_c^b f(x, t) \varphi(x, t) dx = \varphi(c, t) \int_c^{\varepsilon(t)} f(x, t) dx$$

لذلك ، إذا كان  $b \geq c \geq K(\varepsilon)$  وكان  $t \in J$  ، فنحصل على

$$\left| \int_c^b f(x, t) \varphi(x, t) dx \right| \leq \varphi(c, t) 2A < \varepsilon$$

وإذن ينتج انتظام التقارب من معيار كوشي ( ٣٣ - ٢ ) . وهو المطلوب إثباته

٣٣ - ٥ أمثلة . ( أ ) إذا كانت  $f$  معطاة بالتعبير

$$f(x, t) = \frac{\cos tx}{1+x^2}, \quad x \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

وإذا عرفنا  $M(x) = (1+x^2)^{-1}$  ، فإن  $|f(x, t)| \leq M(x)$  ، بما أن التكامل اللانهائي للدالة  $M$  في الفترة  $[0, +\infty)$  موجود ، فينتج من اختبار  $M$  لغير اشتراط أن التكامل اللانهائي

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+x^2} dx$$

يتقارب بانتظام عند  $t \in \mathbb{R}$  .

(ب) نفرض أن  $f(x, t) = e^{-x} x^t$  عند  $x \geq 0$  ،  $t \geq 0$  . يلاحظ أن التكامل

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^t dx$$

يتقارب بانتظام عند  $t$  في الفترة  $[0, \beta]$  لأي  $\beta > 0$  . لكن ، التقارب ليس منتظماً في  $\{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$  . ( انظر تمرين ٣٣ - أ ) .

(ج) إذا كانت  $f(x, t) = e^{-tx} \sin x$  عند  $x \geq 0$  و  $t \geq \gamma > 0$  ، فإن

$$|f(x, t)| \leq e^{-\gamma x} \leq e^{-\gamma x}$$

إذا وضعنا  $M(x) = e^{-\gamma x}$  ، فإن اختبار  $M$  لغير اشتراط يثبت أن التكامل

$$\int_0^{+\infty} e^{-\gamma x} \sin x dx$$

تقارب بانتظام عند  $t \geq \gamma > 0$  وحساب بسيط يثبت أنه يتقارب إلى  $(1+t^2)^{-1}$  . ( لاحظ أنه إذا كانت  $t = 0$  ، فإن التكامل لا يتقارب أبداً ) .

(د) اعتبر التكامل اللانهائي

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{for } t \geq 0$$

حيث نفسر الدالة المراد تكاملها بأنها تساوى واحداً صحيحاً عند  $x = 0$  . بما أن الدالة المراد تكاملها يسيطر عليها، فيكن إثبات أن التكامل على  $x \leq \varepsilon$  يتقارب بانتظام عند  $t \geq 0$  . لا يستخدم اختبار  $M$  لثبات اشتراط هذه الدالة المراد تكاملها . لكن إذا أخذنا  $f(x, t) = \sin x$  و  $\varphi(x, t) = e^{-tx}/x$  ، فإن فروض اختبار ديرشلت تكون متحققة .

### تكاملات لا نهائية تتوقف على بارامتر :

نفرض أن  $f$  الدالة متصلة عند  $(x, t)$  ومعرفة عند  $x \geq a$  وعند  $t$  في الفترة  $J = [\alpha, \beta]$  . وبالإضافة إلى ذلك ، نفرض أن التكامل اللانهائي

$$(33.1) \quad F(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$$

موجود لكل  $t \in J$  . سنوضح الآن أنه إذا كان هذا التقارب منتظماً ، فإن  $F$  تكون متصلة في  $J$  ويمكن حساب تكاملها بتبادل ترتيب التكامل . سنثبت نتيجة مماثلة للمشتقة .

٣٣-٦ نظرية . نفرض أن  $f$  متصلة في  $(x, t)$  حيث  $x \geq a$  وأن  $t$  تقع في الفترة  $J = [\alpha, \beta]$  وأن التقارب في (٣٣-١) يكون منتظماً في  $J$  . حينئذ  $F$  متصلة في  $J$  .

البرهان . إذا كانت  $n \in \mathbb{N}$  ، نفرض أن  $F_n$  معرفة في  $J$  بأنها

$$F_n(t) = \int_a^{a+n} f(x, t) dx$$

ينتج من نظرية (٣١-٦) أن  $F_n$  متصلة في  $J$  . بما أن المتتالية  $(F_n)$  تتقارب بانتظام إلى  $F$  في  $J$  ، ينتج من نظرية (٢٤-١) أن  $F$  متصلة في  $J$  . وهو المطلوب إثباته

٣٣-٧ نظرية . تحت الفرض للنظرية السابقة ، يكون

$$\int_a^{\beta} F(t) dt = \int_a^{+\infty} \left\{ \int_a^{\beta} f(x, t) dt \right\} dx$$

التي يمكن كتابتها في الصورة

$$(33.3) \quad \int_a^{\beta} \left\{ \int_a^{+\infty} f(x, t) dx \right\} dt = \int_a^{+\infty} \left\{ \int_a^{\beta} f(x, t) dt \right\} dx$$

البرهان . إذا كانت  $F_n$  معرفة كما في البرهان السابق ، فينتج من نظرية (٣١-٩) أن

$$\int_a^{\beta} F_n(t) dt = \int_a^{a+n} \left\{ \int_a^{\beta} f(x, t) dt \right\} dx$$

حيث  $(F_n)$  تتقارب بانتظام إلى  $F$  في  $J$  ، حينئذ نظرية (٣١-٧) تثبت أن

$$\int_a^b F(t) dt = \lim_n \int_a^b F_n(t) dt$$

يربط الملاحظتين الأخيرتين ؛ نحصل على ( ٣٢ - ٣ ) وهو المطلوب إثباته

٣٣ - ٨ نظرية . نفرض أن  $f$  ومشتقاتها الجزئية  $f_t$  متصلة في  $(x, t)$  عند  $x \geq a$  ،  $t$  في الفترة  $J = [\alpha, \beta]$  . نفرض أن ( ٣٣ - ١ ) موجودة لكل  $t \in J$  وأن

$$G(t) = \int_a^{+\infty} f_t(x, t) dx$$

بتقارب بانتظام في  $J$  . إذن  $F$  تكون قابلة للتفاضل في  $J$  وأن  $F' = G$  . بالرموز : يكون

$$\frac{d}{dt} \int_a^{+\infty} f(x, t) dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

البرهان . إذا كانت  $F_n$  معرفة عند  $t \in J$  بأنها

$$F_n(t) = \int_a^{a+n} f(x, t) dx$$

فينتج من نظرية ( ٣١ - ٧ ) أن  $F_n$  قابلة للتفاضل وأن

$$F'_n(t) = \int_a^{a+n} f_t(x, t) dx$$

من الفرض نجد أن المتتالية  $(F_n)$  تتقارب في  $J$  إلى  $F$  وأن المتتالية  $(F'_n)$  تتقارب بانتظام في  $J$  إلى  $G$  . ينتج من نظرية ( ٢٨ - ٥ ) أن  $F$  قابلة للتفاضل في  $J$  وأن  $F' = G$  .

وهو المطلوب إثباته

٣٣ - ٩ أمثلة . ( أ ) نلاحظ أنه إذا كانت  $t > 0$  ، فإن

$$\frac{1}{t} = \int_0^{+\infty} e^{-tx} dx$$

وأن التقارب يكون منتظماً عند  $t \geq t_0 > 0$  . إذا كاملنا كلا الطرفين لهذه العلاقة بالنسبة إلى  $t$  على فترة  $[\alpha, \beta]$  حيث  $0 < \alpha < \beta$  واستعملنا نظرية ( ٣٣ - ٧ ) ، نحصل على القانون

$$\begin{aligned} \log(\beta/\alpha) &= \int_\alpha^\beta \frac{1}{t} dt = \int_0^{+\infty} \left\{ \int_\alpha^\beta e^{-tx} dt \right\} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx \end{aligned}$$

( لاحظ أن الدالة المراد تكاملها الأخيرة يمكن تعريفها بأن متصلة عند  $x = 0$  ) .

( ب ) بدلا من التكامل بالنسبة إلى  $t$  ، نفاضل فنحصل رسمياً على

$$\frac{1}{t^2} = \int_0^{+\infty} x e^{-tx} dx$$

بما أن هذا التكامل الأخير يتقارب بانتظام بالنسبة إلى  $t$  ، بشرط  $t \geq t_0 > 0$  ، فإن القانون يظل صحيحاً عند  $t > 0$  . بالاستنتاج نحصل على

$$\frac{n!}{t^{n+1}} = \int_0^{+\infty} x^n e^{-tx} dx \quad \text{for } t > 0$$

بالإشارة إلى تعريف الدالة جاما ، المعطاة في مثال ( ٢٢ - ١٠ ) ( ٥ ) ، نلاحظ أن  $\Gamma(n+1) = n!$

( ج ) إذا كانت  $\alpha > 1$  عدداً حقيقياً وكانت  $x > 0$  ، فإن  $x^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\log x}$  ومن ثم تكون  $f(\alpha) = x^{\alpha-1}$  دالة متصلة عند  $(\alpha, x)$  . وبالإضافة إلى ذلك ، يلاحظ أنه يوجد جوار للمقدار  $\alpha$  التي يكون فيه التكامل

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

تقاربياً بانتظام . ينتج من نظرية ( ٢٢ - ٦ ) أن الدالة جاما تكون متصلة على الأقل إذا كانت  $\alpha > 1$  . (إذا كانت  $0 < \alpha \leq 1$  ، فإن نغيب الاستنتاج يمكن إجراؤه ، لكن حقيقة كون التكامل غير معين عند  $x = 0$  يجب أن يؤخذ في الاعتبار ) .

( د ) نفرض أن  $t \geq 0$  ،  $u \geq 0$  ونفرض أن  $F$  معرفة بأنها

$$F(u) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin ux}{x} dx$$

إذا كانت  $t > 0$  ، فإن هذا التكامل يتقارب بانتظام عند  $u \geq 0$  وإذن يكون كذلك التكامل

$$F'(u) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos ux dx$$

وبالإضافة إلى ذلك ، يثبت التكامل بالتجزئة أن

$$\int_0^A e^{-tx} \cos ux dx = \left[ \frac{e^{-tx} [u \sin ux - t \cos ux]}{t^2 + u^2} \right]_{x=0}^{x=A}$$

إذا فرضنا  $A \rightarrow +\infty$  ، نحصل على القانون

$$F'(u) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos ux dx = \frac{t}{t^2 + u^2}, \quad u \geq 0$$

لذلك ، يوجد مقدار ثابت  $C$  بحيث أن

$$F(u) = \text{Arc tan } (u/t) + C \quad \text{for } u \geq 0$$

لحساب الثابت  $C$  ، نستخدم الحقيقة التي تقول أن  $F(0) = 0$  وأن  $\text{Arc tan}(0) = 0$  .  
ونستنتج أن  $C = 0$  . ومن ثم ، إذا كانت  $t > 0$  و  $u \geq 0$  ، فإن

$$\text{Arc tan}(u/t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin ux}{x} dx.$$

( ٥ ) الآن نجعل  $u > 0$  ثابتة في القانون الأخير ونلاحظ ، كما في مثال ( ٣٣-٥ ) ( د )  
أن التكامل يتقارب بانتظام عند  $t \geq 0$  أى أن النهاية متصلة عند  $t \geq 0$  . إذا فرضنا أن  $t \rightarrow 0$   
نحصل على القانون الهام

$$(33.4) \quad \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ux}{x} dx, \quad u > 0.$$

### تكاملات لا نهائية لتتابعات :

نفرض أن  $(f_n)$  متتابعة لدوال حقيقية القيمة التي تكون معرفة عند  $x \geq a$  . سنفرض أن  
التكاملات اللانهائية  $\int_a^{+\infty} f_n$  موجودة جميعها وأن  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  موجودة  
لجميع  $x \geq a$  . نرغب في أن نتبين أن التكامل اللانهائي للدالة  $f$  موجود وأن

$$(33.5) \quad \int_a^{+\infty} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{+\infty} f_n.$$

برهنا في نظرية ( ٣١ - ٢ ) على أنه إذا كانت  $(f_n)$  متتابعة لدوال قابلة لتكامل ريمان تتقارب  
بانتظام في فترة  $[a, c]$  إلى دالة  $f$  ، فإن  $f$  تكون قابلة لتكامل ريمان وأن التكامل للدالة  $f$  هو  
النهاية لتكاملات الدالة  $f_n$  . النتيجة المناظرة ليست بالضرورة صحيحة في حالة التكاملات لانهائية ،  
سنلاحظ في تمرين ( ٣٣ - ١ ) أن الدالة النهائية لا تحتاج إلى تكامل لانهائي لها . وبالإضافة إلى ذلك  
ربما يفشل التساوى حتى إذا كان التكامل اللانهائي موجوداً وكان لكل من الطرفين في ( ٣٣-٥ )  
معنى ، ( تمرين ٣٣ - ١ ك ) . بالمثل ، الامتداد الواضح لنظرية التقارب المحدودة ( ٣١ - ٣ )  
ربما تفشل لتكاملات لانهائية . لكن ، توجد نتيجتان مفيدتان هامتان وتعتيان شروطاً تظل تحتها  
معادلة ( ٣٣ - ٥ ) صحيحة . سنستفيد لبرهنتهما من نظرية التقارب المحدودة ( ٣١ - ٣ ) .  
النتيجة الأولى هي حالة خاصة من النظرية المشهورة التي ترجع إلى ليبيج ( حيث أننا نبعث حالة  
تكاملات ريمان اللانهائية ، فإننا نحتاج لإضافة الفرض بأن النهاية قابلة للتكامل في الحالة الأكثر  
عوماً لنظرية ليبيج للتكامل ، يكون هذا الفرض الإضافي غير مطلوب ) .

٣٣ - ١٠ نظرية تقارب مسيطرة . نفرض أن  $(f_n)$  متتابعة محدودة لدوال حقيقية  
القيمة ، وأن  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  ، لكل  $x \geq a$  وأن  $f_n$  و  $f$  ،  $n \in \mathbb{N}$  قابلة  
لتكامل ريمان في  $[a, c]$  لكل  $c > a$  ونفرض أنه توجد دالة  $M$  لها تكامل على  $x \geq a$  وأن

$$|f_n(x)| \leq M(x) \quad \text{عند } x \geq a, \quad n \in \mathbb{N}$$

حينئذ  $f$  لها تكامل عند  $a \leq x$  وأن

$$(33.5) \quad \int_a^{+\infty} f = \lim \int_a^{+\infty} f_n$$

البرهان . ينتج من اختبار المقارنة ( ٣٢ - ٧ ) أن التكاملات اللانهائية

$$\int_a^{+\infty} f; \quad \int_a^{+\infty} f_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

موجودة . إذا كانت  $\varepsilon > 0$  فنفرض  $K$  تكون مختارة بحيث أن  $\int_K^{+\infty} M < \varepsilon$  التي منها ينتج أن

$$\left| \int_K^{+\infty} f \right| < \varepsilon \quad \text{و} \quad \left| \int_K^{+\infty} f_n \right| < \varepsilon, \quad n \in \mathbb{N}$$

بما أن  $f(x) = \lim (f_n(x))$  لكل  $x \in [a, K]$  فينتج من نظرية التقارب المحدودة ( ٣١-٢ ) أن  $\int_a^K f = \lim_n \int_a^K f_n$  . وإذن نجد أن

$$\left| \int_a^{+\infty} f - \int_a^{+\infty} f_n \right| \leq \left| \int_a^K f - \int_a^K f_n \right| + 2\varepsilon$$

الذي يكون أقل من  $3\varepsilon$  عندما  $n$  تكون كبيرة كبراً كافياً وهو المطلوب إثباته

٣١-١١ نظرية تقارب إطرادية . نفرض أن  $(f_n)$  متتامة محدودة لدوال موجبة في الفترة  $\{x : a \leq x\}$  المتزايدة بإطراد بمعنى أن  $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$  عند  $n \in \mathbb{N}$  وأن  $x \geq a$  وبحيث أن  $f$  وكل  $f_n$  لها تكامل على  $[a, c]$  لكل  $c > a$  . إذن الدالة النهائية  $f$  لها تكامل على الفترة  $\{x : x \geq a\}$  إذا وإذا فقط كانت الفتة  $\{\int_a^{+\infty} f_n : n \in \mathbb{N}\}$  محدودة . في هذه الحالة

$$\int_a^{+\infty} f = \sup \left\{ \int_a^{+\infty} f_n \right\} = \lim_n \int_a^{+\infty} f_n$$

البرهان . بما أن المتتامة  $(f_n)$  متزايدة بإطراد ، فنستنتج أن المتتامة  $(\int_a^{+\infty} f_n : n \in \mathbb{N})$  هي أيضاً متزايدة بإطراد . إذا كان للدالة  $f$  تكامل على الفتة  $\{x : x \geq a\}$  ، فإن نظرية التقارب السيطرة ( حيث  $M = f$  ) تثبت أن

$$\int_a^{+\infty} f = \lim \int_a^{+\infty} f_n$$

وبالعكس ، نفرض أن الفتة لتكاملات لانهائية محدودة ونفرض أن  $S$  هي الأعلى لهذه الفتة . إذا كانت  $c > a$  ، فإن نظرية التقارب الإطرادية ٣١ - ٤ تثبت أن

$$\int_a^c f = \lim_n \int_a^c f_n = \sup \left\{ \int_a^c f_n \right\}$$

بما أن  $f_n \geq 0$  ، فينتج أن  $\int_a^c f_n \leq \int_a^{+\infty} f_n \leq S$  ومن ثم  $\int_a^c f \leq S$  حسب نظرية ( ٣٢ - ٦ ) يكون التكامل اللانهائي للدالة  $f$  موجوداً وأن

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f &= \sup \int_a^c f = \sup \left\{ \sup \int_a^c f_n \right\} \\ &= \sup \left\{ \sup \int_a^c f_n \right\} = \sup \int_a^{+\infty} f_n.\end{aligned}$$

وهو المطلوب إثباته

### تكاملات لا نهائية مكررة :

حصلنا في نظرية ( ٣٣ - ٧ ) على نتيجة بررت تبادل ترتيب التكامل على المنطقة  $\{(x, t) : a \leq x, \alpha \leq t \leq \beta\}$  . من المرغوب فيه أيضاً إمكانية تبادل ترتيب التكامل لتكامل لانهاى مكرر . أى أن ، نرغب في إثبات المتساوية

$$(33.6) \quad \int_a^{+\infty} \left\{ \int_a^{+\infty} f(x, t) dx \right\} dt = \int_a^{+\infty} \left\{ \int_a^{+\infty} f(x, t) dt \right\} dx,$$

تحت فروض مناسبة . كان نتيجة ذلك أن شرطاً بسيطاً يمكن إعطاؤه بحيث يثبت أيضاً التقارب المطلق للتكاملات . لكن ، لكن نبحث التكاملات اللانهائية المكررة التي لا تكون بالضرورة تقاربية مطلقة ، نحتاج إلى مجموعة أكبر تعقيداً من الشروط .

٣٣ - ١٢ نظرية . نفرض أن  $f$  دالة موجبة معرفة عند  $(x, t)$  وتحقق  $x \geq a$  ,  $t \geq \alpha$  . نفرض أن

$$(33.7) \quad \int_a^b \left\{ \int_a^{+\infty} f(x, t) dt \right\} dx = \int_a^{+\infty} \left\{ \int_a^b f(x, t) dx \right\} dt$$

لكل  $b \geq a$  وأن

$$(33.7') \quad \int_a^{\beta} \left\{ \int_a^{+\infty} f(x, t) dx \right\} dt = \int_a^{+\infty} \left\{ \int_a^{\beta} f(x, t) dt \right\} dx$$

لكل  $\beta \geq \alpha$  . إذن ، إذا كانت أحد التكاملين المكررين في معادلة ( ٣٣ - ٦ ) موجوداً ، فإن الآخر يكون موجوداً أيضاً ويكونان متساويين

البرهان . نفرض أن التكامل الموجود في الطرف الأيسر من ( ٣٣ - ٦ ) موجود . بما أن  $f$  موجبة ، يكون

$$\int_a^b f(x, t) dx \leq \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$$

لكل  $b \geq a$  و  $t \geq \alpha$  . لذلك ، ينتج من اختبار المقارنة ( ٣٢ - ٧ ) ، أن

$$\int_a^{+\infty} \left\{ \int_a^b f(x, t) dx \right\} dt \leq \int_a^{+\infty} \left\{ \int_a^{+\infty} f(x, t) dx \right\} dt$$

باستخدام علاقة (٣٣ - ٧) ، نستنتج أن

$$\int_a^b \left\{ \int_a^{+\infty} f(x, t) dt \right\} dx \leq \int_a^{+\infty} \left\{ \int_a^{+\infty} f(x, t) dx \right\} dt$$

لكل  $b \geq a$  . وبطبيق نظرية (٣٢ - ٦) نجد أنه يمكننا أخذ النهاية عندما  $b \rightarrow +\infty$  ، وإذن التكامل المكرر الآخر موجود أيضاً ويكون

$$\int_a^{+\infty} \left\{ \int_a^{+\infty} f(x, t) dt \right\} dx \leq \int_a^{+\infty} \left\{ \int_a^{+\infty} f(x, t) dx \right\} dt$$

إذا كررنا هذه المناقشة واستخدمنا معادلة (٣٣ - ٧) ، نحصل على المتباينة المعكوسة لذلك ، يجب أن تظل المتباينة صحيحة

٣٣ - ١٣ نظرية . نفرض أن - متصلة عند  $x \geq a, t \geq a$  وأنه يوجد دالتان موجبتان  $M$  و  $N$  بحيث أن التكاملين اللانهائين  $\int_a^{+\infty} M$  و  $\int_a^{+\infty} N$  موجودان . إذا ظلت المتباينة

$$(33.8) \quad |f(x, t)| \leq M(x)N(t), \quad x \geq a, \quad t \geq a$$

صحيحة ، فإن التكاملين المكررين في (٣٣ - ٦) موجودان ويكونان متساويين .

البرهان . نفرض أن  $g$  معرفة عند  $x \geq a, t \geq a$  بأنها  $g(x, t) = f(x, t) + M(x)N(t)$  بحيث أن

$$0 \leq g(x, t) \leq 2M(x)N(t)$$

بما أن  $N$  محدودة في كل فترة  $[\alpha, \beta]$  ، ينتج من المتباينة (٣٣ - ٨) واختبار  $M$  لثيبر اشتراش (٣٣ - ٣) أن التكامل

$$\int_a^{+\infty} g(x, t) dx$$

موجود بانتظام عند  $t \in [\alpha, \beta]$  . باستخدام نظرية (٣٣ - ٧) ، نلاحظ أن معادلة (٣٣ - ٧) تظل صحيحة (حيث  $f$  حل محلها  $g$ ) لكل  $\beta \geq \alpha$  . أيضاً اختبار المقارنة (٣٢ - ٧) يثبت أن التكاملين المكررين في (٣٣ - ٦) موجودان (بعد كتابة  $g$  بدلا من  $f$ ) . نستنتج من نظرية ٣٣ - ١٢ أن هذين التكاملين المكررين للدالة  $g$  متساويان . لكن هذا يثبت أن التكاملين المكررين للدالة  $f$  موجودان ومتساويان . وهو المطلوب إثباته

النتائج السابقة تبحث الحالة التي يكون فيها التكاملان المكرران تقاربين تقارباً مطلقاً . الآن تقدم نتيجة تبحث حالة تقارب غير مطلق .

٣٣ - ١٤ نظرية . نفرض أن الدالة  $f$  حقيقية القيمة ومتصلة في الفترة  $(x, t)$  عند  $x \geq a, t \geq a$  وأن التكاملين اللانهائين



$$(33.9) \quad \int_a^{+\infty} f(x, t) dx, \quad \int_a^{+\infty} f(x, t) dt$$

تتقارب بانتظام عند  $x \geq a$  ،  $t \geq a$  ، على الترتيب . وبالإضافة إلى ذلك ، نفرض أن  $F$  معرفة عند  $x \geq a, \beta \geq a$  ، بأنها

$$F(x, \beta) = \int_a^\beta f(x, t) dt$$

ونفرض أن التكامل اللانهائي

$$(33.10) \quad \int_a^{+\infty} F(x, \beta) dx$$

يتقارب بانتظام عند  $\beta \geq a$  . حينئذ كلا التكاملين اللانهائيين المكررين موجودان ومتساويان .

البرهان . بما أن التكامل اللانهائي ( ٣٣ - ١٠ ) يكون تقاربياً بانتظام عند  $\beta \geq a$  ، إذا كانت  $\varepsilon > 0$  فإنه يوجد عدد  $A_\varepsilon \geq a$  بحيث أنه إذا كانت  $A \geq A_\varepsilon$  فإن

$$(33.11) \quad \left| \int_a^A F(x, \beta) dx - \int_a^{+\infty} F(x, \beta) dx \right| < \varepsilon$$

لكل  $\beta \geq a$  نلاحظ أيضاً أن

$$\begin{aligned} \int_a^A F(x, \beta) dx &= \int_a^A \left\{ \int_a^\beta f(x, t) dt \right\} dx \\ &= \int_a^\beta \left\{ \int_a^A f(x, t) dx \right\} dt. \end{aligned}$$

حسب نظرية ( ٣٣ - ٧ ) والتقارب المنتظم للتكامل الثاني في ( ٣٣ - ٩ ) ، نستنتج أن

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^A F(x, \beta) dx = \int_a^A \left\{ \int_a^{+\infty} f(x, t) dt \right\} dx$$

ومن ثم يوجد عدد  $B \geq a$  بحيث أنه إذا كانت  $B \geq \beta_1 \geq \beta_2$  ، فإن

$$(33.12) \quad \left| \int_a^A F(x, \beta_2) dx - \int_a^A F(x, \beta_1) dx \right| < \varepsilon$$

بربط ( ٣٣ - ١١ ) ، ( ٣٣ - ١٢ ) ، نلاحظ أنه إذا كانت  $B \geq \beta_2 \geq \beta_1$  ، فإن

$$\left| \int_a^{+\infty} F(x, \beta_2) dx - \int_a^{+\infty} F(x, \beta_1) dx \right| < 3\varepsilon$$

ومنها ينتج أن نهاية  $\int_a^{+\infty} F(x, \beta) dx$  موجودة عندما  $\beta \rightarrow +\infty$  بعد استخدام نظرية ( ٣٣ - ٧ ) للتقارب المنتظم للتكامل الأول في ( ٣٣ - ٩ ) ، نجد أن

$$\begin{aligned}\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} F(x, \beta) dx &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} \left\{ \int_a^{\beta} f(x, t) dt \right\} dx \\ &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^{\beta} \left\{ \int_a^{+\infty} f(x, t) dx \right\} dt \\ &= \int_a^{+\infty} \left\{ \int_a^{+\infty} f(x, t) dx \right\} dt.\end{aligned}$$

بما أن كلا الحدين الموجودين في الطرف الأيسر ( ٣٣ - ١١ ) لهما نهايتان عندما  $\beta \rightarrow +\infty$  فنستنتج بالوصول إلى النهاية ، أن

$$\left| \int_a^A \left\{ \int_a^{+\infty} f(x, t) dt \right\} dx - \int_a^{+\infty} \left\{ \int_a^{+\infty} f(x, t) dx \right\} dt \right| \leq \varepsilon$$

إذا فرضنا أن  $A \rightarrow +\infty$  ، نحصل على تساوى التكاملات غير المعينة المكررة .

وهو المطلوب إثباته

النظريات المطعاة أعلى والمسوفة لتبديل ترتيب التكامل مفيدة غالباً ، لكن مازالت تترك مجالاً فسيحاً للبراعة . وتشمعل مراراً لارتباطها بنظريات التقارب الإطراذية أو المسيطرة ( ٣٣ - ١٠ ) ( ٣٣ - ١١ ) .

٣٣ - ١٥ أمثلة . ( أ ) إذا كانت  $f(x, t) = e^{-(x+t)}$  ، فإنه يمكننا أخذ  $M(x) = e^{-x}$  ،  $N(t) = e^{-t}$  ونستخدم نظرية ( ٣٣ - ١٣ ) لنستنتج أن

$$\int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-(x+t)} \sin xt dx \right\} dt = \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-(x+t)} \sin xt dt \right\} dx$$

( ب ) إذا كانت  $g(x, t) = e^{-xt}$  عند  $x \geq 0$  ،  $t \geq 0$  ، فتوجد متسقة عند اعتبار الخطين  $t = 0$  و  $x = 0$  . لكن ، إذا كانت  $a > 0$  ،  $\alpha > 0$  و  $x \geq a$  و  $t \geq \alpha$  ، فنلاحظ أن

$$e^{-xt} = e^{-x\alpha/2} e^{-xt/2} \leq e^{-\alpha x/2} e^{-\alpha t/2}$$

إذا وضعنا  $M(x) = e^{-\alpha x/2}$  و  $N(t) = e^{-\alpha t/2}$  ، فإن نظرية ( ٣٣ - ١٣ ) تثبت أن

$$\int_a^{+\infty} \left\{ \int_a^{+\infty} e^{-xt} dx \right\} dt = \int_a^{+\infty} \left\{ \int_a^{+\infty} e^{-xt} dt \right\} dx$$

( ج ) اعتبر الدالة  $f(x, y) = xe^{-x^2(1+y^2)}$  عند  $y \geq 0$  و  $x \geq a > 0$  . إذا وضعنا  $N(y) = e^{-a^2 y^2}$  و  $M(x) = xe^{-x^2}$  فيمكننا تبديل ترتيب التكامل على  $x \leq a$  ،  $0 \leq y$  بما أن

$$\int_a^{+\infty} xe^{-(1+y^2)x^2} dx = \frac{-e^{-(1+y^2)x^2}}{2(1+y^2)} \Big|_{x=a}^{x \rightarrow +\infty} = \frac{e^{-a^2(1+y^2)}}{2(1+y^2)}$$

فينتج أن

$$\frac{1}{2}e^{-a^2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-a^2 y^2}}{1+y^2} dy = \int_a^{+\infty} e^{-x^2} \left\{ \int_0^{+\infty} x e^{-x^2 y^2} dy \right\} dx$$

إذا غيرنا المتغير  $t = xy$  ، نجد أن

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2 y^2} dy = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = I$$

وإذن ينتج أن

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-a^2 y^2}}{1+y^2} dy = 2e^{-a^2} I \int_a^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

إذا جعلنا  $a \rightarrow 0$  فنجد أن التعبير الموجود في الطرف الأيمن يقترب إلى  $2I^2$  . تلاحظ في الطرف الأيسر أن الدالة المراد تكاملها تكون مسيطرة بالدالة القابلة للتكامل  $(1+y^2)^{-1}$  . باستخدام نظرية التقارب المسيطرة ، نحصل على

$$\frac{1}{2}\pi = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-a^2 y^2}}{1+y^2} dy = 2I^2$$

لذلك نجد أن  $I^2 = \pi/4$  ، التي تنتج اشتقاقاً للقانون

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

(د) إذا تكاملنا بالتجزئتين مرتين ، نحصل على القانون

$$(33.13) \quad \int_a^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx = \frac{e^{-ay}}{1+y^2} \cos a + \frac{ye^{-ay}}{1+y^2} \sin a$$

إذا كانت  $a > 0$  و  $y \geq a$  و  $x \geq a$  فإنه يمكننا المناقشة كما في مثال (ب) لإثبات أن

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{e^{-ay} \cos a}{1+y^2} dy + \int_a^{+\infty} \frac{ye^{-ay} \sin a}{1+y^2} dy \\ = \int_a^{+\infty} \left\{ \int_a^{+\infty} e^{-xy} \sin x dy \right\} dx = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-ax} \sin x}{x} dx \end{aligned}$$

نريد إيجاد النهاية عندما  $a \rightarrow 0$  . وهذا يمكن إجراؤه بوضوح في التكامل السابق ونحصل على  $\int_0^{+\infty} (e^{-ax} \sin x/x) dx$  . ومن حقيقة كون  $e^{-ay} \cos a$  مسيطرة بالواحد الصحيح عند  $y \geq 0$  ، وكون التكامل  $\int_a^{+\infty} (1/(1+y^2)) dy$  موجوداً ، فيمكننا استخدام نظرية التقارب المسيطرة (٣٣ - ١٠) لنستنتج أن

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^{+\infty} \frac{e^{-ay} \cos a}{1+y^2} dy = \int_a^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2}$$

التكامل الثانى أكثر مشقة قليلا لأن نفس النمط من التقدير يوضح أن

$$\left| \frac{ye^{-ay} \sin a}{1+y^2} \right| \leq \frac{y}{1+y^2}$$

والدالة المسيطرة ليست قابلة للتكامل ، ومن ثم يجب علينا عمل أفضل من هذا . بما أن  $u \leq e^u$  ،  
 $|\sin u| \leq u$  عند  $u \geq 0$  ، فمستنتج أن  $1/y \leq |e^{-ay} \sin a|$  ، ومنها نحصل على تقدير أدق

$$\left| \frac{ye^{-ay} \sin a}{1+y^2} \right| \leq \frac{1}{1+y^2}$$

يمكننا الآن استخدام نظرية التقارب المسيطرة لأخذ النهاية تحت علامة التكامل ، لنحصل على

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^{+\infty} \frac{ye^{-ay} \sin a}{1+y^2} dy = 0$$

قد وصلنا إلى القانون

$$\frac{1}{2}\pi - \text{Arc tan } \alpha = \int_a^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} \sin x}{x} dx$$

نريد الآن أن نأخذ النهاية عندما  $\alpha \rightarrow 0$  . لا يمكننا هذه المرة استخدام نظرية التقارب المسيطرة لأن  $\int_0^{+\infty} x^{-1} \sin x dx$  ليس مطلق التقارب . مع أن التقارب  $e^{-ax}$  إلى الواحد الصحيح عندما  $\alpha \rightarrow 0$  إطرادى ، فإن حقيقة كون  $\sin x$  تأخذ كلتا الإشارتين تثبت أن التقارب للدالة المراد تكاملها الداخلية ليست إطرادياً . لحسن الحظ ، قد رأينا سابقاً فى مثال ( ٣٣ - ٥ ) ( د ) أن التقارب للتكامل يكون منتظماً عند  $\alpha \geq 0$  . حسب نظرية ( ٣٣ - ٦ ) ، للمرة الثانية يكون التكامل متصلاً عند  $\alpha \geq 0$  ومن ثم نحصل على القانون الآتى

$$(33.14) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2}\pi$$

### تمريعات :

- ٣٣ - ( أ ) أثبت أن التكامل  $\int_0^{+\infty} x'e^{-x} dx$  يتقارب بانتظام عند  $t$  فى فترة  $[0, \beta]$  لكن سوف لا يتقارب بانتظام عند  $t \geq 0$  .  
 ٣٣ - ( ب ) أثبت أن التكامل

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x} dx$$

- تقارب بانتظام عند  $t \geq 1$  ، لكن لا يتقارب تقارباً مطلقاً عند أى من هذه القيم للمقدار  $t$  .  
 ٣٣ - ( ج ) لى قيم للمقدار  $t$  تتقارب التكاملات اللانهائية الآتية بانتظام .

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+t} \quad (\text{ب}) \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+t^2} \quad (1)$$

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} \cos tx \, dx \quad (\text{د}) \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos tx \, dx \quad (\text{ج})$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2} e^{-x^2-t^2/x^2} \, dx \quad (\text{و}) \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2-t^2/x^2} \, dx \quad (\text{هـ})$$

٣٣ (د) استخدم قانون (٣٣-١٤) لإثبات أن  $\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{\pi}$

٣٣- (هـ) استخدم قانون (٣٣-١٤) لإثبات أن  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$  عند  $t > 0$  .  
 حقق التفاضل وأثبت أن

$$\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}$$

٣٣ (و) أثبت الوجود للتكامل  $\int_0^{+\infty} (1-e^{-x^2})x^{-2} \, dx$  (لاحظ أن الدالة المراد تكاملها يمكن تعريفها بأنها متصلة عند  $x=0$  ) . أحسب هذا التكامل

(أ) بإبدال  $e^{-x^2}$  بالمقدار  $e^{-tx^2}$  ثم التفاضل بالنسبة إلى  $t$  ،

(ب) بتكامل  $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} \, dx$  بالنسبة إلى  $t$  . حقق كل الخطوات

٣٣- (ز) بفرض أن  $F$  ممطاة عند  $t \in \mathbb{R}$  بأنها

$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos tx \, dx$$

فاضل بالنسبة إلى  $t$  ثم كامل بالتجزئة لتثبت أن  $F'(t) = (-1/2)tF(t)$  . حينئذ أوجد  $F(t)$  بعد تغيير متغير ، أثبت القانون

$$\int_0^{+\infty} e^{-cx^2} \cos tx \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/c} e^{-t^2/4c}, \quad c > 0$$

٣٣ (ح) بفرض أن  $G$  معرفة عند  $t > 0$  بأنها

$$G(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2-t^2/x^2} \, dx$$

فاضل ثم غير متغيرات لتوضيح أن  $G'(t) = -2G(t)$  . حينئذ أوجد  $G(t)$  وأثبت القانون

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2-t^2/x^2} \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} e^{-2|t|}$$

٣٣ (ط) استخدم (٣٣-٤) ، وقوانين حساب المشتقات الأولية ، والممارسة لإثبات أن

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx &= 1, & a > 0, \\ &= 0, & a = 0, \\ &= -1, & a < 0. \end{aligned} \quad (أ)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos ax}{x} dx &= 1, & |a| < 1, \\ &= \frac{1}{2}, & |a| = 1, \\ &= 0, & |a| > 1. \end{aligned} \quad (ب)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \sin ax}{x} dx &= \frac{1}{\pi} \log \frac{a+1}{1-a}, & |a| < 1 \\ &= \frac{1}{\pi} \log \frac{a+1}{a-1}, & |a| > 1 \end{aligned} \quad (ج)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \frac{\sin x}{x} \right]^2 dx = 1 \quad (د)$$

٣٣- (ى) عند  $n \in \mathbb{N}$  نفرض أن  $f_n$  معرفة بأنها

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 1/x, & 1 \leq x \leq n, \\ &= 0, & x > n \end{aligned}$$

أثبت أن كل  $f_n$  لها تكامل عند  $x \geq 1$  والمتتابة  $(f_n)$  محدودة ، متزايدة باطراد ،  
وتتقارب بانتظام إلى دالة متصلة ليست قابلة للتكامل على  $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$  .

٣٣- (ك) بفرض أن  $g_n$  معرفة بأنها

$$\begin{aligned} g_n(x) &= 1/n, & 0 \leq x \leq n^2, \\ &= 0, & x > n^2 \end{aligned}$$

أثبت كل  $g_n$  لها تكامل عند  $x \geq 0$  والمتتابة  $(g_n)$  محدودة وتتقارب إلى دالة  $g$  لها تكامل  
على  $x \geq 0$  ، لكن ليس صحيحا أن

$$\lim \int_0^{+\infty} g_n = \int_0^{+\infty} g$$

هل التقارب اطرادى ؟ .

٣٣- (ل) إذا كانت  $f(x, t) = (x-t)/(x+t)^3$  ، أثبت أن

$$\int_1^A \left\{ \int_1^{+\infty} f(x, t) dx \right\} dt > 0 \quad \text{for } A \geq 1;$$

$$\int_1^B \left\{ \int_1^{+\infty} f(x, t) dt \right\} dx < 0 \quad \text{for } B \geq 1$$

ومن ثم ، استنتج أن

$$\int_1^{+\infty} \left\{ \int_1^{+\infty} f(x, t) dx \right\} dt \neq \int_1^{+\infty} \left\{ \int_1^{+\infty} f(x, t) dt \right\} dx.$$

٣٣ - (م) استخدم مناقشة مماثلة إلى التي في مثال (٣٣-١٥) (ج) وقوانيننا من تمرينات ٣٣ (ز) ، ٣٣ (ح) ، لإثبات

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ty}{1+y^2} dy = \frac{\pi}{2} e^{-|t|}$$

٣٣ - (ن) باعتبار التكاملات المكررة للدالة  $e^{-(a+y)x} \sin y$  على الربع  $x \geq 0, y \geq 0$  أثبت القانون

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{a+y} dy, \quad a > 0$$

### مشروعات :

٣٣ - (أ) هذا المشروع يدرس دالة جاما ، التي قدمت في مثال (٣٣-١٠) (أ) . تذكر أن  $\Gamma$  معرفة عند  $x$  في  $P = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$  بواسطة التكامل

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

قد رأينا توجاً أن هذا التكامل يتقارب عند  $x \in P$  وأن  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

(أ) وضح أن  $\Gamma$  متصلة في  $P$  .

(ب) أثبت أن  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  عند  $x \in P$  (إرشاد : كامل بالتجزئة في الفترة  $[(\varepsilon, c)]$  .

(ج) أثبت أن  $\Gamma(n+1) = n!$  عند  $n \in \mathbb{N}$  .

(د) أثبت أن  $\lim_{x \rightarrow 0+} x\Gamma(x) = 1$  . ومن ثم ينتج أن  $\Gamma$  ليست محدودة على يمين  $x = 0$  .

(هـ) أثبت أن  $\Gamma$  قابل للتفاضل في  $P$  وأن المشتقة الثانية تكون دائماً موجبة . (ومن ثم تكون  $\Gamma$  دالة محدبة في  $P$ ) .

(و) بتغيير المتغير  $t$  أثبت أن

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^{2x-1} dt = u^x \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{x-1} du$$

٣٣ - (ب) نقدم دالة بيتا لأويلر . نفرض أن  $B(x, y)$  معرفة عند  $x, y$  في  $P = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$  بأنها

$$B(x, y) = \int_0^{1-} t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

إذا كانت  $y \geq 1$  و  $x \geq 1$  ، فإن هذا التكامل يكون معيّن ، لكن إذا كانت  $0 < x < 1$  أو  $0 < y < 1$  فإن التكامل يكون غير معيّن

(أ) أثبت تقارب التكامل عند  $x, y$  في  $P$  .

(ب) أثبت أن  $B(x, y) = B(y, x)$

(ج) أثبت أنه إذا كانت  $x, y$  تنتميان إلى  $P$  ، فإن

$$B(x, y) = 2 \int_{0+}^{(\pi/2)-} (\sin t)^{2x-1} (\cos t)^{2y-1} dt$$

$$B(x, y) = \int_{0+}^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du.$$

(د) بتكامل الدالة الموجبة

$$f(t, u) = e^{-t^2 - u^2} t^{2x-1} u^{2y-1}$$

على  $\{(t, u) : t^2 + u^2 = R^2, t \geq 0, u \geq 0\}$  م مقارنة هذا التكامل بالتكامل على المربعات الداخلية والخارجية ، استنبط القانون الهام

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

(هـ) أثبت قانوني التكامل الآتيين :

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n} dx = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n + \frac{1}{2})}{2 \Gamma(n + 1)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) 2},$$

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n+1} dx = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n + 1)}{2 \Gamma(n + \frac{3}{2})} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}$$

٣٣ (γ) - هذا المشروع والمشروع الآتي يعطى قليلا من خواص تحويل لابلاس (\*) ، وهي هامة لكلتا الرياضيات النظرية والتطبيقية . لتبسيط المناقشة ، سنركز اهتمامنا للدوال المتصلة  $f$  المعرفة في  $\{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$  إلى الفراغ  $\mathbb{R}$  . تحويل لابلاس لدالة  $f$  هو الدالة  $\hat{f}$  المعرفة عند العدد الحقيقي  $s$  بالقانون

$$\hat{f}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

طالما يتقارب هذا التكامل . أحيانا للدالة  $\hat{f}$  بالرمز  $\mathcal{L}(f)$  .

(أ) نفترض أنه يوجد عدد حقيقي  $c$  بحيث أن  $|f(t)| \leq e^{ct}$  عندما  $t$  تكون كبيرة كبراً

(\*) بيري - سيمون لابلاس ( ١٧٤٩ - ١٨٢٧ ) ، كان الابن لفلان نورماندي ، ثم أصبح استاذاً في المدرسة العسكرية في باريس وانتخب لأكاديمية العلوم .  
هو مشهور بعمله في الميكانيكا السماوية والاحتمالات .



كافياً . حيثئذ التكامل الذى يعرف تحويل لابلاس  $f$  يتقارب عندما  $s > c$  . وبالإضافة إلى ذلك ، فإنه يتقارب بانتظام عندما  $s \geq c + \delta$  إذا كانت  $\delta > 0$  .

(ب) إذا كانت  $f$  تحقق شرط كونها محدودة المذكور فى جزء (أ) ، فإن  $f$  تكون متصلة ولها مشتقة عند  $s > c$  ومطاة بالقانون

$$f'(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} (-t) f(t) dt$$

[ أى أن المشتقة لتحويل لابلاس للدالة  $f$  هي تحويل لابلاس للدالة  $g(t) = -tf(t)$  . ]

(ج) بالاستنتاج ، أثبت أنه تحت شرط المحدودية فى (أ) يكون للدالة لها مشتقات من كل الرتب عند  $s > c$  وأن

$$f^{(n)}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} (-t)^n f(t) dt$$

(د) نفرض أن  $g$  و  $f$  دالتان متصلتان حيث تحويل لابلاس لهما هما أى الدالتان  $\hat{g}$  و  $\hat{f}$  تتقاربان عند  $s_0$  ،  $s > s_0$  ، وإذا كانت  $a$  و  $b$  عددين حقيقيين فإن للدالة  $af + bg$  تحويل لابلاس يتقارب عند  $s_0$   $s > s_0$  ويساوى  $a\hat{f} + b\hat{g}$  .

(هـ) إذا كانت  $a > 0$  ، وكانت  $g(t) = f(at)$  ، فإن  $\hat{g}$  تتقارب عند  $as_0$   $s > as_0$  وأن

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{a} \hat{f}(s/a)$$

بالمثل ، إذا كانت  $h(t) = (1/a)f(t/a)$  ، فإن  $\hat{h}$  تتقارب عند  $s_0/a$   $s > s_0/a$  وأن

$$\hat{h}(s) = \hat{f}(as)$$

(و) نفرض أن تحويل لابلاس  $f$  للدالة  $f$  موجود عند  $s_0$   $s > s_0$  ونفرض أن  $f$  معرفة عند  $t < 0$  بأنها مساوية للصفر . إذا كانت  $b > 0$  وكانت  $g(t) = f(t - b)$  ، فإن  $\hat{g}$  تتقارب عند  $s_0$   $s > s_0$  وأن

$$\hat{g}(s) = e^{-bs} \hat{f}(s)$$

بالمثل، إذا كانت  $h(t) = e^{bt} f(t)$  لى مقدار حقيقى  $b$  ، فإن  $\hat{h}$  تتقارب عندما  $s > s_0 + b$  وأن

$$\hat{h}(s) = \hat{f}(s - b)$$

٣٣ (٨) - هذا المشروع استمرار للمشروع السابق ويستخدم نتائجه . .

(أ) أثبت الجدول القصير الآتى لتحويلات لابلاس

$f(t)$	$\hat{f}(s)$	فترة التقارب
1	$1/s$	$s > 0,$
$t^n$	$n!/s^{n+1}$	$s > 0,$
$e^{at}$	$(s-a)^{-1}$	$s > a,$
$t^n e^{at}$	$n!/(s-a)^{n+1}$	$s > a,$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	all $s,$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	all $s,$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$s > a,$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$s > a,$
$\frac{\sin t}{t}$	$\text{Arc tan } (1/s)$	$s > 0.$

(ب) نفرض أن  $f'$  و  $f$  متصلتان عند  $t \geq 0$  وأن  $f$  تتقارب عندما  $s > s_0$  وأن  $0 \rightarrow e^{-st} f(t) \rightarrow 0$  عند  $t \rightarrow +\infty$  لجميع  $s > s_0$ . إذن يكون تحويل لابلاس للدالة  $f'$  موجوداً عند  $s_0$  يكون

$$\hat{f}'(s) = s\hat{f}(s) - f(0).$$

(ارشاد : كامل بالتجزئ.)

(ج) نفرض أن  $f''$  و  $f'$  و  $f$  متصلة عند  $t \geq 0$  وأن  $f$  تتقارب عند  $s > s_0$ . بالإضافة إلى ذلك نفرض أن  $e^{-st} f'(t)$  و  $e^{-st} f(t)$  تقترب من 0 عندما  $t \rightarrow +\infty$  لكل  $s > s_0$  إذن يكون تحويل لابلاس للدالة  $f''$  موجوداً عند  $s > s_0$  ويكون

$$\hat{f}''(s) = s^2 \hat{f}(s) - sf(0) - f'(0)$$

(د) إذا لاحظنا أن كل أو جزء الدالة المراد تكاملها هو تحويل لابلاس ، فإن التكامل يمكن حسابه أحياناً بتغيير ترتيب التكامل . استخدم هذه الطريقة لحساب التكامل

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin s}{s} ds = \frac{1}{2}\pi$$

(هـ) من المرغوب حل المعادلة التفاضلية

$$y'(t) + 2y(t) = 3 \sin t, \quad y(0) = 1$$

نفرض أن هذه المعادلة لها حل  $y$  بحيث أن تحويل لابلاس لـ  $y$  ،  $\hat{y}$  موجودان عندما  $s$  تكون كبيرة كبراً كافياً . في هذه الحالة يجب أن يحقق تحويل  $y$  المعادلة

$$s\hat{y}(s) - y(0) + 2\hat{y}(s) = 4/(s-1), \quad s > 1$$

التي منها ينتج أن

$$\hat{y}(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s-1)}$$

استخدم كسوراً جزئية والجدول في (أ) للحصول على  $y(t) = \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-2t}$  ، الذي يمكن إثباته مباشرة كحل للمعادلة التفاضلية (و) أوجد الحل للمعادلة

$$y'' + y' = 0, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = b$$

باستخدام تحويل لابلاس

(ز) أثبت أن معادلة تفاضلية متجانسة خطية بمعادلات ثابتة يمكن حلها باستخدام تحويل لابلاس . والأسلوب الاصطلاحي لتحليل دالة قياسية إلى كسور جزئية .

## المتسلسلات اللانهائية

يختص هذا الفصل بإثبات النظريات الأكر أهمية في نظرية المتسلسلات اللانهائية . وبالرغم من وجود نتائج هامشية قليلة هنا ، فسنوجه انتباهنا إلى الفروض الأساسية . يرجع القارىء إلى مقالات أكثر شمولاً لتتائج وتطبيقات متقدمة .

سنقدم في الباب الأول النظريات الأساسية المتعلقة بالتقارب للمتسلسلات النهائية في الفراغ سوف نحصل على بعض نتائج لها طبيعة عامة وتساعد في إثبات التقارب لمتسلسلات وتحقق ممارسة خاصة للمتسلسلات .

سنعطى في باب ٣٥ بعض « اختبارات » مألوفة للتقارب المطلق للمتسلسلات وبالإضافة إلى ذلك فإن كلا من هذه الاختبارات ينتج تقديراً كياً يختص بسرعة التقارب وذلك لضمان تقارب المتسلسلات التي تطبق هذه الاختبارات عليها .

يمدنا الباب الآتى ببعض اختبارات مفيدة للتقارب الشرطى ، ويزودنا بمناقشة قصيرة للمتسلسلات المزدوجة وحاصل ضرب المتسلسلات .

نقدم في باب ٣٧ الدراسة لمتسلسلات الدوال ونثبت الخواص الأساسية لمتسلسلات القوى فيما في الباب الأخير من هذا الفصل سنثبت بعض النتائج الأساسية لنظرية متسلسلة فورييه

### الباب الرابع والثلاثون — تقارب متسلسلات لا نهائية :

في مقررات أولية ، « تعرف » متسلسلة لانهاية أحياناً بأنها « تعبير في الصورة

$$(34.1) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots$$

هذا « تعريف » ينقصه وضوح ، لكن ، بما أنه لا يوجد قيمة خاصة يمكننا ربطها قبل هذا النظام من الرموز لتدل على إجراء عدد لانهاى من عمليات الجمع بالرغم من وجود تعريفات أخرى مناسبة ، فسنعتبر المتسلسلة النهائية مثل المتتابعة لحواصل جمع جزئية .

٢٤-١ تعريف . إذا كانت  $X = (x_n)$  متتابعة في الفراغ  $R^p$  ، فإن المتسلسلة النهائية (أو ببساطة المتسلسلة) المولدة بواسطة  $X$  هي المتتابعة  $S = (s_k)$  المعرفة بواسطة

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1, \\ s_2 &= s_1 + x_2 \quad (= x_1 + x_2), \\ &\dots\dots\dots \\ s_k &= s_{k-1} + x_k \quad (= x_1 + x_2 + \dots + x_k), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

إذا كانت  $S$  تقتارب ، فنشير إلى  $\lim S$  بأنه حاصل جمع المتسلسلة النهائية . نسمى العناصر  $x_n$  الحدود ونسمى العناصر  $s_k$  حواصل جمع جزئية لهذه المتسلسلة النهائية .

من المناسب استعمال التعبير (٢٤-١) أو أى من أحد هذه الرموز

$$\sum (x_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (x_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

كل يشير إلى المتسلسلة النهائية المولدة بواسطة المتتابعة  $X = (x_n)$  وأيضاً لتشير إلى  $\lim S$  في حالة كون هذه المتسلسلة النهائية تقاربية . بالممارسة الحقيقية ، الاستعمال الزوجي لهذه الرموز لا يؤدي إلى إيهام ، طالما كان من المفهوم وجوب إثبات تقارب المتسلسلة .

ويجب على القارئ الاحتراس منعاً للإيهام بين الكلمتين (متتابعة) ، « متسلسلة » . وبلغة غير رياضية تكون هاتان الكلمتان قابلتين لتبديل كل منهما مكان الأخرى ، لكن ، في الرياضة ، لا يكونان مترادفين حسب تعريفنا ، تكون متسلسلة لانهاية هي متتابعة  $S$  حصلنا عليها من متتابعة مطعاة  $X$  طبقاً لعملية خاصة ذكرناها أعلاه . توجد طرق أخرى كثيرة لتوليد متتابعات جديدة و « حواصل جمع » ملتصقة للمتتابعة المطعاة  $X$  . يجب على القارئ أن يبحث في كتب على المتسلسلات التبادعية ، المتسلسلات المقاربة ، قابلية المتسلسلات للجمع على أمثلة لمثل هذه النظريات .

توجد كلمة أخيرة عن مسائل رمزية . مع أننا نفهرس غالباً العناصر المتسلسلة بأعداد طبيعية ، يكون ، من المناسب أحياناً بدرجة أكثر أن نبدأ من  $n = 0$  ، من  $n = 5$  ، أو من  $n = k$  في مثل هذه الحالة سنرمز للمتسلسلات الناتجة أو لخواص جمعها برموز مثل

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n, \quad \sum_{n=5}^{\infty} x_n, \quad \sum_{n=k}^{\infty} x_n$$

عرفنا في تعريف (١٤-٢) ، حاصل الجمع وباقي الطرح لمتابعتين  $X, Y$  في  $R^p$  . بالمثل ، إذا كانت  $c$  عدداً حقيقياً وإذا كانت  $w$  عنصراً في  $R^p$  ، فقد عرفنا المتابعتين  $cX = (cx_n)$  في  $R^p$  ، على الترتيب . نختبر الآن المتسلسلات المتولدة بهذه المتتابعات .

٣٤-٢ نظرية . (أ) إذا كانت المتسلسلتان  $\sum (x_n)$  ،  $\sum (y_n)$  تقاربيتين فإن  $\sum (x_n + y_n)$  تتقارب وأن خواصل الجمع تكون مرتبطة بالقانون .

$$\sum (x_n + y_n) = \sum (x_n) + \sum (y_n)$$

نتيجة مشابهة تظل صحيحة للمتسلسلة المنتجة بواسطة  $X - Y$  .

(ب) إذا كانت المتسلسلة  $\sum (x_n)$  تقاربية ،  $c$  عدداً حقيقياً ،  $w$  عنصراً ثابتاً من  $R^p$  ، فإن المتسلسلتين  $\sum (w \cdot x_n)$  ،  $\sum (cx_n)$  تتقاربان ويكون

$$\sum (cx_n) = c \sum (x_n), \quad \sum (w \cdot x_n) = w \cdot \sum (x_n)$$

البرهان . تنتج هذه النتيجة مباشرة من نظرية (١٥ - ٦) ومن تعريف (٣٤ - ١) . وهو المطلوب إثباته

ربما يكون متوقفاً أنه إذا كانت المتتابعات  $X = (x_n)$  ،  $Y = (y_n)$  تولدان متسلسلتين تقاربيتين ، فإن المتتابعة  $X \cdot Y = (x_n \cdot y_n)$  تولد أيضاً متسلسلة تقاربية . وملاحظة أن هذا لا يكون دائماً صحيحاً نأخذ  $X = Y = ((-1)^n / \sqrt{n})$  في الفراغ  $R$  . الآن نقدم شرطاً ضرورياً بسيطاً لتقارب متسلسلة . ومع ذلك فهو ليس كاف .

٣٤-٣ مفترض . إذا كانت  $\sum (x_n)$  تتقارب في  $R^p$  فإن  $\lim (x_n) = 0$  .

البرهان . من التعريف نجد أن ، التقارب للمتسلسلة  $\sum (x_n)$  يعنى أن  $\lim (s_k)$  موجود . لكن ، بما أن

$$\lim (x_k) = \lim (s_k) - \lim (s_{k-1}) = 0 \quad \text{فإن} \quad x_k = s_k - s_{k-1}$$

وهو المطلوب إثباته

النتيجة الآتية ، لها أهمية كبيرة بالرغم من أنها محدودة في مجال .

٣٤-٤ نظرية . نفرض أن  $(x_n)$  متتابعة لأعداد حقيقية موجبة . إذن المتسلسلة  $\sum (x_n)$  تتقارب إذا وإذا فقط كانت المتتابعة  $S = (s_k)$  لخواصل جمع جزئية محدودة . في هذه الحالة يكون

$$\sum x_n = \lim (s_k) = \sup \{s_k\}$$

البرهان . بما أن  $x_n \geq 0$  ، فإن المتتابعة لخواصل جمع جزئية متزايدة باطراد

$$s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_k \leq \dots$$

حسب نظرية التقارب الاطراوى (١٦ - ١) ، نجد أن المتتابعة  $S$  تتقارب إذا وإذا فقط كانت محدودة . وهو المطلوب إثباته

. بما أن معيار كوشي الآتي هو بالضبط صياغة ثانية لنظرية ١٦ - ١٠ ، فسوف نحذف برهانه .

٣٤ - ٥ معيار كوشي للمتسلسلات . تتقارب المتسلسلات  $\sum (x_n)$  في  $R^p$  إذا وإذا فقط كان يوجد لكل عدد  $\varepsilon > 0$  عدد طبيعي  $M(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $m \geq n \geq M(\varepsilon)$  فإن

$$\|s_m - s_n\| = \|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_m\| < \varepsilon$$

مفهوم التقارب المطلق يكون غالباً ذو أهمية عظمى في دراسة المتسلسلات ، كما سنوضح فيما بعد .

٣٤ - ٦ تعريف . نفرض أن  $x = (x_n)$  متتابعة في  $R^p$  . نقول إن المتسلسلة  $\sum (x_n)$  تقاربية تقارباً مطلقاً (أو تقاربية مطلقة) إذا كانت المتسلسلة  $\sum (\|x_n\|)$  تقاربية في الفراغ  $R$  .

يقال للمتسلسلة أنها تقاربية مشروطة إذا كانت تقاربية ولكن ليست تقاربية مطلقة . من المؤكد أنه لا يوجد تمييز بين التقارب المادي والتقارب المطلق للمتسلسلات التي عناصرها أعداد حقيقية موجبة . لكن ، ربما يوجد فرق بين التقاربين لمتسلسلات أخرى .  
٣٤ - ٧ نظرية . إذا كانت متسلسلة في  $R^p$  تقاربية مطلقة فإنها تكون تقاربية .

البرهان . من الفرض ، تتقارب المتسلسلة  $\sum (\|x_n\|)$  . لذلك ، ينتج من لزوم معيار كوشي ( ٣٤ - ٥ ) أنه بإعطاء  $\varepsilon > 0$  ، يوجد عدد طبيعي  $M(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $m \geq n \geq M(\varepsilon)$  ، حينئذ

$$\|x_{n+1}\| + \|x_{n+2}\| + \dots + \|x_m\| < \varepsilon$$

طبقاً لمتباينة المثلث ، يسيطر الطرف الأيسر لهذه العلاقة على

$$\|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_m\|$$

نستخدم الكفاية لمعيار كوشي لنستنتج أن  $\sum (x_n)$  يجب أن تتقارب . وهو المطلوب إثباته

٣٤ - ٨ أمثلة . (أ) نعتبر المتتابعة الحقيقية  $X = (a^n)$  ، التي تولد المتسلسلة الهندسية

$$(34.2) \quad a + a^2 + \dots + a^n + \dots$$

شرط كاف للتقارب هو أن  $\lim (a^n) = 0$  ، التي تتطلب أن  $|a| < 1$  . إذا كانت  $m \geq n$  ، فإن

$$(34.3) \quad a^{n+1} + a^{n+2} + \dots + a^m = \frac{a^{n+1} - a^{m+1}}{1 - a}$$

التي يمكن تحقيقها بضرب كلا الطرفين بالمقدار  $1 - a$  وملاحظة الظاهرة التلصكية على الطرف الأيسر. إذن حواصل الجمع الجزئية تحقق

$$|s_m - s_n| = |a^{n+1} + \dots + a^m| \leq \frac{|a^{n+1}| + |a^{m+1}|}{|1 - a|}, \quad m \geq n$$

إذا كانت  $|a| < 1$ ، فإن  $|a^{n+1}| \rightarrow 0$  لذلك يدل معيار كوشي على أن المتسلسلة الهندسية (٣-٣٤) تتقارب إذا وإذا فقط كان  $|a| < 1$ . نفرض أن  $n = 0$  في (٣-٣٤) وبإيجاد النهاية بالنسبة إلى  $m$  نجد أن (٣-٣٤) تتقارب إلى النهاية  $a/(1 - a)$  عندما  $|a| < 1$ .

(ب) نعتبر المتسلسلة التوافقية  $\sum (1/n)$ ، المعروفة بأنها تتباعد. بما أن  $\lim (1/n) = 0$ ، لا يمكننا استخدام مفروض (٣-٣٤) لإثبات هذا التباعد، لكي يجب تنفيذ استدلال أكثر دقة، التي سيستنتج من نظرية (٤-٣٤).

سنوضح أن متتابعة جزئية لحواصل جمع جزئية ليست محدودة. في الحقيقة، إذا كانت  $k_1 = 2$ ، فإن

$$s_{k_1} = 1 + \frac{1}{2}$$

وإذا كانت  $k_2 = 2^2$ ، فإن

$$s_{k_2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = s_{k_1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > s_{k_1} + 2\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2}$$

بالاستنتاج الرياضي، نستنتج أنه إذا كانت  $k_r = 2^r$ ، فإن

$$s_{k_r} > s_{k_{r-1}} + 2^{r-1} \left( \frac{1}{2^r} \right) = s_{k_{r-1}} + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{r}{2}$$

لذلك، تكون المتتابعة الجزئية  $(s_{k_r})$  ليست محدودة والمتسلسلة التوافقية لا تتقارب.

(ج) ندرس الآن المتسلسلة  $p$ -التي هي  $\sum (1/n^p)$  حيث  $0 < p \leq 1$  ونستعمل المتباينة الأساسية  $n^p \leq n$ ، عند  $n \in \mathbb{N}$ . من هذا ينتج أنه، عند  $0 < p \leq 1$ ، فإن

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p}, \quad n \in \mathbb{N}$$

وحيث أن حواصل الجمع الجزئية للمتسلسلة التوافقية ليست محدودة، فإن هذه المتباينة توضح أن حواصل الجمع الجزئية للمتسلسلة  $\sum (1/n^p)$  ليست محدودة عند  $0 < p \leq 1$ . ومن ثم المتسلسلة تكون تباعدية عند هذه القيم للمعد  $p$ .



(د) اعتبر المتسلسلة  $p$  - عندما  $p > 1$  . بما أن حواصل الجمع الجزئية اطرادية ، فيمكن أن نوضح أن متتابعة جزئية ما تظل محدودة لكي نثبت التقارب للمتسلسلة . إذا كانت  $k_1 = 2^1 - 1 = 1$  ، فإن  $s_{k_1} = 1$  . إذا كانت  $k_2 = 2^2 - 1 = 3$  ، ونجد أن

$$s_{k_2} = \frac{1}{1} + \left( \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right) < 1 + \frac{2}{2^p} = 1 + \frac{1}{2^{p-1}}$$

وإذا كانت  $k_3 = 2^3 - 1$  ، فنحصل على

$$s_{k_3} = s_{k_2} + \left( \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} \right) < s_{k_2} + \frac{4}{4^p} < 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}}$$

نفرض  $a = 1/2^{p-1}$  ، بما أن  $p > 1$  ، فيلاحظ أن  $0 < a < 1$  . بالاستنتاج الرياضي ، نجد أنه إذا كانت  $k_r = 2^r - 1$  ، فإن

$$0 < s_{k_r} < 1 + a + a^2 + \dots + a^{r-1}$$

ومن ثم يكون العدد  $1/(1-a)$  هو الحد الأعلى لحواصل الجمع الجزئية للمتسلسلة  $p$  - حيث  $p > 1$  . ينتج من نظرية ( ٤-٣٤ ) أن عند مثل هذه القيم المقدار  $p$  ، تتقارب المتسلسلة  $p$  - .  
(٥) اعتبر المتسلسلة  $\sum (1/(n^2 + n))$  باستخدام كسور جزئية ، يمكننا أن نكتب

$$\frac{1}{k^2 + k} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

هذا تعبير يوضح أن حواصل الجمع الجزئية تلسكوبية ومن ثم

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$$

ينتج أن المتتابعة  $(s_n)$  تتقارب إلى الواحد الصحيح .

### إعادة تنظيمات ومتسلسلات :

بعبارة غير دقيقة يكون معنى إعادة تنظيم المتسلسلة هو متسلسلة أخرى نحصل عليها من المتسلسلة المعطاة باستخدام كل الحدود مرة واحدة تماماً ، لكن بتغيير الترتيب الذي تؤخذ فيه الحدود . مثل ذلك ، المتسلسلة التوافقية

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

لها إعادة تنظيمات

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \dots,$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

نحصل على إعادة التنظيم الأول بتبادل الحدين الأول والثاني ، والحدين الثالث والرابع إلى آخره .  
 بينما نحصل على إعادة التنظيم الثاني من المتسلسلة التوافقية . يأخذ « حد فردى » ، واحد ثم  
 « حدين زوجين » ، « ثلاثة حدود فردية » وهكذا . من الواضح أنه يوجد إعادة تنظيمات أخرى  
 كثيرة ممكنة عددها لانهاى للمتسلسلة التوافقية .

٣٤-٩ تعريف . متسلسلة  $\sum (y_m)$  في  $R^p$  تكون إعادة تنظيم المتسلسلة  $\sum (x_n)$

إذا كان يوجد تناظر أحادى  $f$  للمقدار  $N$  على  $N$  بحيث إن  $y_m = x_{f(m)}$

لجميع  $m \in N$  .

توجد ملاحظة تسترعى الانتباه ترجع إلى ريمان ، وهى أنه إذا كانت  $\sum (x_n)$  متسلسلة  
 تقاربية شرطية في  $R$  تقاربية شرطية ( أى إنها تقاربية لكن ليست تقاربية مطلقة ) وإذا كانت  $c$   
 عدداً حقيقياً اختيارياً ، فإنه يوجد إعادة تنظيم المتسلسلة  $\sum (x_n)$  التى تقارب إلى  $c$  . فكرة  
 البرهان لهذا الغرض أولية جداً . نأخذ حدوداً موجبة إلى أن نحصل على حاصل جمع جزئى يزيد  
 عن  $c$  ، حينئذ نأخذ حدوداً سالبة من المتسلسلة المعطاة حتى نحصل على حاصل جمع جزئى للحدود  
 يكون أقل من  $c$  ، وهكذا . وحيث إن  $\lim (x_n) = 0$  ، فليس صعباً ملاحظة أنه يمكن  
 تركيب إعادة تنظيم للمتسلسلة بحيث يتقارب إلى  $c$  .

بمعالجتنا للمتسلسلات ، نجد في الحالة العامة ، أنه من المناسب التأكد من أن إعادة التنظيمات  
 لا تؤثر في التقارب أو قيمة النهاية .

٣٤-١٠ نظرية إعادة تنظيم . بفرض أن  $\sum (x_n)$  متسلسلة تقاربية مطلقة في  $R^p$  .

إذن أى إعادة تنظيم للمتسلسلة  $\sum (x_n)$  يتقارب بانتظام إلى نفس القيمة .

البرهان . نفرض أن  $x = \sum (x_n)$  ، نفرض  $\sum (y_m)$  هى إعادة تنظيم للمتسلسلة

$\sum (x_n)$  ونفرض أن  $K$  حداً أعلى لحواصل الجمع الجزئية من  $\sum (\|x_n\|)$  واضح أنه إذا كانت

$t_r = y_1 + \dots + y_r$  هو حاصل جمع جزئى للمتسلسلة  $\sum (y_m)$  ، حينئذ

$$\|y_1\| + \dots + \|y_r\| \leq K$$

ومنها نجد أن  $\sum (y_m)$  تتقارب تقارباً مطلقاً لمنصر ما  $y$  في الفراغ  $R^p$  نرغب في

إثبات أن  $x = y$  . إذا كانت  $\varepsilon > 0$  ، ونفرض أن  $N(\varepsilon)$  بحيث إنه إذا كانت

$m > n \geq N(\varepsilon)$  و  $s_n = x_1 + \dots + x_n$  فإن  $\|x - s_n\| < \varepsilon$  ويكون

$$\sum_{k=n+1}^m \|x_k\| < \varepsilon$$

باختيار حاصل جمع جزئى  $t_r$  للمتسلسلة  $\sum (y_m)$  بحيث إن  $\|y - t_r\| < \varepsilon$  وبحيث إن كل  $x_1, x_2, \dots, x_n$  تقع فى  $t_r$  . وبإجراء هذا ، نختار  $m > n$  كبيرة لدرجة أن كل  $y_k$  التى تظهر فى  $t_r$  تظهر أيضاً فى  $s_m$  . وإذن

$$\|x - y\| \leq \|x - s_m\| + \|s_m - t_r\| + \|t_r - y\| < \varepsilon + \sum_{n+1}^m \|x_k\| + \varepsilon < 3\varepsilon$$

بما أن  $\varepsilon > 0$  اختيارية ، فنستنتج أن  $x = y$  . وهو المطلوب إثباته .

### تمارينات :

٣٤ - (أ) نفرض أن  $\sum (a_n)$  متسلسلة معطاة ونفرض أن  $\sum (b_n)$  هى المتسلسلة التى فيها حدودها هى نفس الحدود فى المتسلسلة  $\sum (a_n)$  ، بعد حذف الحدود التى فيها  $a_n = 0$  . أثبت أن  $\sum (a_n)$  تتقارب إلى عدد  $A$  إذا وإذا فقط كانت  $\sum (b_n)$  تتقارب إلى  $A$  .  
٣٤ - (ب) وضع أن التقارب لمتسلسلة لا تتأثر بتغيير عدد محدود من حدودها . ( طبعاً ، ربما يتغير حاصل الجمع ) .

٣٤ - (ج) أثبت أن مجموعات الحدود لمتسلسلة تقاربية الناتجة بإدخال أقواساً تحتوى على عدد محدود من الحدود ، لا تهدم التقارب أو قيمة النهاية . لكن ، مجموعات حدود فى متسلسلة تباعدية يمكن أن تنتج تقارباً .

٣٤ - (د) أثبت أنه إذا كانت متسلسلة تقاربية لأعداد حقيقية تحتوى فقط على عدد محدود من حدود سالبة ، فإنها تكون تقاربية مطلقة .

٣٤ - (هـ) وضع أنه إذا كانت متسلسلة لأعداد حقيقية تقاربية شرطية ، فإن المتسلسلة لحدود موجبة تباعدية والمتسلسلة لحدود سالبة تباعدية .

٣٤ - (و) باستخدام كسور جزئية ، أثبت أن

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} = \frac{1}{\alpha} \quad \text{if } \alpha > 0 \quad (\text{أ})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4} \quad (\text{ب})$$

٣٤ - (ز) إذا كانت  $\sum (a_n)$  متسلسلة تقاربية لأعداد حقيقية ، هل  $\sum (a_n^2)$  تكون تقاربية دائماً ؟ إذا كانت  $a_n \geq 0$  ، هل صحيح أن  $\sum (\sqrt{a_n})$  تكون دائماً تقاربية ؟

٣٤ - (ح) إذا كانت  $\sum (a_n)$  تقاربية وأن  $a_n \geq 0$  ، حينئذ هل  $\sum (\sqrt{a_n a_{n+1}})$  تقاربية ؟

٣٤ - (ط) نفرض أن  $\sum (a_n)$  متسلسلة لأعداد موجبة مضبوطة ونفرض أن

$b_n, n \in \mathbb{N}$  معرفة بأن تكون  $b_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n$ . أثبت أن  $\sum (b_n)$  تكون دائماً تباعدية .

٣٤ - (ى) نفرض أن  $\sum (a_n)$  متسلسلة تقاربية ونفرض أن  $c_n, n \in \mathbb{N}$  ، معرفة بأنها المتوسطات الموزونة أى

$$c_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n(n+1)}$$

إذن  $\sum (c_n)$  تتقارب وتتساوى  $\sum (a_n)$  .

٣٤ - (ك) نفرض أن  $\sum (a_n)$  هى متسلسلة لأعداد موجبة ومتناقصة باطراد أثبت أن  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)$  تتقارب إذا وإذا فقط كانت المتسلسلة .

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

تتقارب . نسمى هذه النتيجة أحياناً باختبار تكثيف لكوشى . [ إرشاد : ضم الحدود فى مجموعات كما فى مثال ( ٣٤ - ٨ ) ( ب ، د ) ] .

٣٤ - (ل) استخدم اختبار التكثيف لكوشى لمناقشة التقارب للمتسلسلة  $\sum (1/n^p)$

٣٤ - (م) استخدم اختبار التكثيف لكوشى لإثبات أن المتسلسلات

$$\sum \frac{1}{n \log n}, \quad \sum \frac{1}{n(\log n)(\log \log n)},$$

$$\sum \frac{1}{n(\log n)(\log \log n)(\log \log \log n)}$$

تباعدية .

٣٤ - (ن) أثبت أنه إذا كانت  $c > 1$  ، فإن المتسلسلتين

$$\sum \frac{1}{n(\log n)^c}, \quad \sum \frac{1}{n(\log n)(\log \log n)^c}$$

تقاربيتان

٣٤ - (س) نفرض أن  $(a_n)$  متتابة متناقصة باطراد لأعداد موجبة . أثبت أنه إذا

كانت المتسلسلة  $\sum (a_n)$  تقاربية ، فإن  $\lim (na_n) = 0$  . هل العكس صحيح ؟

٣٤ - (ع) إذا كانت  $\lim (a_n) = 0$  فإن  $\sum (a_n)$  و  $\sum (a_n + 2a_{n+1})$  تتقاربان معاً أو تتباعدان معاً .

## الباب الخامس والثلاثون — اختبارات لتقارب مطلق :

حصلنا في الباب السابق على بعض نتائج متعلقة بدراسة المتسلسلات اللانهائية ، وخاصة الحالة الهامة التي فيها تكون المتسلسلات تقاربية مطلقة . لكن ، باستثناء معيار كوشي وحقيقة كون حدود متسلسلة تقاربية تقترب إلى صفر ، لم نثبت أى شروط ضرورية أو كافية لتقارب المتسلسلات اللانهائية .

سنعطى الآن بعض نتائج بحيث يمكن استخدامها لإثبات التقارب أو التباعد لمتسلسلات لانهائية . وبسبب أهميتها ، سنمير انتباهاً خاصاً للتقارب المطلق . بما أن التقارب المطلق للمتسلسلة  $\sum (x_n)$  في  $R^p$  يكون مكافئاً لتقارب المتسلسلة  $\sum (\|x_n\|)$  لعناصر موجبة في الفراغ  $R$  ، فن الواضح أن النتائج التي تثبت التقارب لمتسلسلات حقيقية موجبة لها قاعدة خاصة .

يوضح اختبارنا الأول أنه إذا كانت الحدود لمتسلسلة حقيقية موجبة تكون مسيطرة بالحدود المناظرة لمتسلسلة تقاربية ، فإن المتسلسلة الأولى تكون تقاربية . وتعطى اختباراً للتقارب المطلق الذي يجب أن يصوغه القارئ .

٣٥ - ١ اختبار المقارنة . نفرض أن  $X = (x_n)$  و  $Y = (y_n)$  متتابعتين حقيقيتين موجبتين ونفرض أنه لأي عدد حقيقي  $K$  يكون

$$(35.1) \quad x_n \leq y_n \quad \text{for } n \geq K$$

حينئذ التقارب للمتتابعة  $\sum (y_n)$  يضمن التقارب للمتتابعة  $\sum (x_n)$  .

البرهان . إذا كانت  $m \geq n \geq \sup \{K, M(\varepsilon)\}$  فإن

$$x_{n+1} + \dots + x_m \leq y_{n+1} + \dots + y_m < \varepsilon$$

التي منها يكون المطلوب إثباته واضحاً وهو المطلوب إثباته

٣٥ - ٢ نهاية اختبار مقارنة . نفرض أن  $X = (x_n)$  و  $Y = (y_n)$  متتابعتين حقيقيتين موجبتين .

(أ) إذا كانت العلاقة

$$(35.2) \quad \lim (x_n/y_n) \neq 0$$

صحيحة ، فإن  $\sum (x_n)$  تكون تقاربية إذا وإذا فقط كانت  $\sum (y_n)$  تقاربية .

(ب) إذا كانت النهاية في (٣٥ - ٢) صفراً وكانت  $\sum (y_n)$  تقاربية ، فإن  $\sum (x_n)$

تقاربية .

البرهان . ينتج من (٣٥ - ٢) أنه لعدد حقيقي ما  $c > 1$  وعدد طبيعي ما  $K$  ،

يكون

$$(1/c)y_n \leq x_n \leq cy_n \quad \text{for} \quad n \geq K$$

إذا استخدمنا اختبار المقارنة (٣٥ - ١) مرتين ، نحصل على المطلوب إثباته والمذكور في جزء (أ) . برهان الجزء (ب) يكون ماثلاً وسوف يحذف . وهو المطلوب إثباته

### اختبار الجذر والنسبة :

الآن يعطى اختباراً هاماً يرجع لكوثي .

٣٥ - ٣٠ اختبار جذر : (أ) إذا كانت  $X = (x_n)$  متتابعة في  $R^p$  وكان يوجد عدد موجب  $r < 1$  وعدد طبيعي  $K$  بحيث إن

$$\|x_n\|^{1/n} \leq r \quad \text{for} \quad n \geq K. \quad (35.3)$$

فإن المتسلسلة  $\sum (x_n)$  تكون تقاربية مطلقة .

(ب) إذا كان يوجد عدد  $r > 1$  وعدد طبيعي  $K$  بحيث إن

$$\|x_n\|^{1/n} \geq r \quad \text{for} \quad n \geq K \quad (35.4)$$

فإن المتسلسلة  $\sum (x_n)$  تكون تباعدية

البرهان . (أ) إذا كانت (٣٥ - ٣٠) تظل صحيحة ، فنحصل على  $\|x_n\| \leq r^n$  . الآن عند  $0 \leq r \leq 1$  ، تكون المتسلسلة  $\sum (r^n)$  تقاربية ، كالاخطنا في مثال (٣٤ - ٨) (أ) ومن ثم ينتج من اختبار المقارنة أن  $\sum (x_n)$  تقاربية مطلقة .

(ب) إذا كانت (٣٥ - ٣٠) تظل قائمة ، فإن  $\|x_n\| \geq r^n$  . لكن ، بما أن  $r \geq 1$  ، فن الخطأ أن  $\lim (\|x_n\|) = 0$  وهو المطلوب إثباته

وبالإضافة إلى ذلك ، نجد لإثبات التقارب للمتسلسلة  $\sum (x_n)$  ، أن اختبار الجذر يمكن استخدامه للحصول على تقدير لسرعة التقارب . هذا التقدير مفيد في الحسابات العددية وفي بعض التقويمات النظرية أيضاً .

٣٥ - ٣١ نتيجة . إذا كانت  $r$  تحقق  $0 < r < 1$  وإذا كانت المتتابعة  $X = (x_n)$  تحقق (٣٥ - ٣٠) ، فإن حواصل الجمع الجزئية  $s_n, n \geq K$  ، تقترّب من حاصل الجمع  $s = \sum (x_n)$  حسب التقدير

$$\|s - s_n\| \leq \frac{r^{n+1}}{1-r} \quad \text{for} \quad n \geq K \quad (35.5)$$

البرهان . إذا كانت  $m \geq n \geq K$  فتحصل على

$$\|s_m - s_n\| = \|x_{n+1} + \dots + x_m\| \leq \|x_{n+1}\| + \dots + \|x_m\| \leq r^{n+1} + \dots + r^m < \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

الآن نأخذ النهاية بالنسبة إلى  $m$  لمحصل على ( ٣٥ - ٥ ) . وهو المطلوب إثباته

من المناسب غالباً الاستفادة من التغير الآتي لاختبار الجذر .

٣٥ - ٥ نتيجة . نفرض أن  $X = (x_n)$  متتابعة في  $R^p$  وضع

$$(35.6) \quad r = \lim (\|x_n\|^{1/n})$$

طالما تكون هذه النهاية موجودة . إذن  $\sum (x_n)$  تكون تقاربية مطلقة عند  $r < 1$  وتكون تباعدية عند  $r > 1$  .

البرهان . ينتج أنه إذا كانت النهاية في ( ٣٥ - ٦ ) موجودة وأقل من واحد صحيح ، فإنه يوجد عدد حقيقي  $r_1$  حيث  $r < r_1 < 1$  وعدد طبيعي  $K$  بحيث إن

$$\|x_n\|^{1/n} \leq r_1 \quad \text{for } n \geq K$$

في هذه الحالة تكون المتسلسلة تقاربية مطلقة . إذا كانت هذه النهاية تزيد عن الواحد الصحيح ، فإنه يوجد عدد حقيقي  $r_2 > 1$  وعدد طبيعي  $K$  بحيث إن

$$\|x_n\|^{1/n} \geq r_2 \quad \text{for } n \geq K$$

أي إنه في هذه الحالة تكون المتسلسلة تباعدية . وهو المطلوب إثباته

هذه النتيجة يمكن تميمها باستخدام النهاية الأعلى بدلا من النهاية . سنترك التفاصيل كتمرين .  
بالاختبار الآتي يرجع إلى دالميرت (\*)

٣٥ - ٦ اختبار نسبة . (أ) إذا كانت  $X = (x_n)$  متتابعة لعناصر ليست أصفاراً في الفراغ  $R^p$  وكان يوجد عدد موجب  $r < 1$  وعدد طبيعي  $K$  بحيث إن

$$(35.7) \quad \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \leq r \quad \text{for } n \geq K$$

فإن المتسلسلة  $\sum (x_n)$  تكون تقاربية مطلقة .

(ب) إذا كان يوجد عدد  $r \geq 1$  وعدد طبيعي  $K$  بحيث إن

$$(35.8) \quad \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \geq r \quad \text{for } n \geq K$$

فإن المتسلسلة  $\sum (x_n)$  تكون تباعدية .

---

(\*) جين لرون دالميرت ( ١٧١٧ - ١٧٨٣ ) كان ابن شيفاليرد ستوشز . أصبح سكرتيراً للأكاديمية الفرنسية وموجهاً رياضياً لدائرة المعارف . ساهم في الديناميكا والمعادلات التفاضلية .

البرهان . (أ) إذا كانت ( ٧ - ٣٥ ) تظل صحيحة ، فإن مناقشة أولية للاستنتاج تثبت أن  $\|x_{K+m}\| \leq r^m \|x_K\|$  لكل  $m \geq 1$  . ينتج أنه عند  $n \geq K$  تكون الحدود المتسلسلة

مسيطره بحدود متوالية هندسية بعد ضربها في ثابت ولتكن  $\sum (r^n)$  حيث  $0 \leq r < 1$  .

تستنتج من اختبار المقارنة ( ١ - ٣٥ ) ، أن  $\sum (x_n)$  تكون تقاربية مطلقة .

(ب) إذا كانت ( ٨ - ٣٥ ) صحيحة ، فإن مناقشة أولية للاستنتاج - توضح أن

$$m \geq 1 \text{ عند } \|x_{K+m}\| \geq r^m \|x_K\|$$

بما أن  $r \geq 1$  ، فن غير الممكن أن نحصل على  $\lim (\|x_n\|) = 0$  ، لذلك لا يمكن للمتسلسلة أن تتقارب . وهو المطلوب إثباته .

٧ - ٣٥ نتيجة . إذا كانت  $r$  تحقق  $0 \leq r < 1$  وإذا كانت المتتابة  $X = (x_n)$

تحقق ( ٧ - ٣٥ ) عند  $n \geq K$  ، فإن حواصل الجمع الجزئية تقترب من حاصل لجمع  $s = \sum (x_n)$  حسب التقدير .

$$(35.9) \quad \|s - s_n\| \leq \frac{r}{1-r} \|x_n\| \quad \text{for } n \geq K$$

البرهان . تدل العلاقة ( ٧ - ٣٥ ) على أن  $\|x_{n+k}\| \leq r^k \|x_n\|$  عند  $n \geq K$  ، لذلك ، إذا كانت  $m \geq n \geq K$  فنجد أن

$$\begin{aligned} \|s_m - s_n\| &= \|x_{n+1} + \dots + x_m\| \leq \|x_{n+1}\| + \dots + \|x_m\| \\ &\leq (r + r^2 + \dots + r^{m-n}) \|x_n\| < \frac{r}{1-r} \|x_n\| \end{aligned}$$

ومرة أخرى نأخذ النهاية بالنسبة إلى  $m$  لنحصل على ( ٩ - ٣٥ ) . وهو المطلوب إثباته

٨ - ٣٥ نتيجة . نفرض أن  $X = (x_n)$  متتابة في  $R^p$  ونضع

$$r = \lim \left( \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \right)$$

طالما وحدت النهاية . إذن المتسلسلة  $\sum (x_n)$  تكون تقاربية مطلقة عند  $r < 1$  وتباعدية عند  $r > 1$  .

البرهان . نفرض أن النهاية موجودة وأن  $r < 1$  . إذا كانت  $r_1$  تحقق  $r < r_1 < 1$  ، فمعدئذ يوجد عدد طبيعي  $K$  بحيث إن

$$\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} < r_1 \quad \text{for } n \geq K$$

في هذه الحالة تثبت نظرية ( ٦ - ٣٥ ) التقارب المطلق للمتسلسلة . إذا كانت  $r > 1$  ، وإذا



كانت  $r_2$  تحقق  $1 < r_2 < r$  ، فإنه يوجد عدد طبيعي  $K$  بحيث إن

$$\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} > r_2 \quad \text{for } n \geq K$$

وفي هذه الحالة يوجد تباعد للمتسلسلة . وهو المطلوب إثباته

### اختبار راب :

إذا كانت  $r = 1$  ، فإن كلا من اختبارى النسبة والجذر يفشل والمتسلسلة إما أن تكون تقاربية أو تكون تباعدية . [ أنظر مثال ٣٥ - ١٣ ( د ) ] . يكون من المفيد لبعض أغراض الحصول على صيغة أكثر دقة لاختبار النسبة للحالة التي فيها  $r = 1$  . النتيجة الآتية ، التي ترجع إلى راب (\*) ، تكون عادة مناسبة .

٣٥ - ٩ اختبار راب . ( أ ) إذا كانت  $X = (x_n)$  متتابعة لعناصر غير صفرية من الفراغ  $R^p$  وكان يوجد عدد حقيقى  $a > 1$  وعدد طبيعي  $K$  بحيث إن

$$(35.10) \quad \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \leq 1 - \frac{a}{n} \quad \text{for } n \geq K$$

فإن المتسلسلة  $\sum (x_n)$  تكون تقاربية منتظمة .

( ب ) إذا كان يوجد عدد حقيقى  $a \leq 1$  وعدد طبيعي  $K$  بحيث إن

$$(35.11) \quad \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \geq 1 - \frac{a}{n} \quad \text{for } n \geq K$$

فإن المتسلسلة  $\sum (x_n)$  ليست تقاربية مطلقة .

البرهان . ( أ ) نفترض أن العلاقة ( ٣٥ - ١٠ ) تظل قائمة ، فنحصل على

$$k \|x_{k+1}\| \leq (k-1) \|x_k\| - (a-1) \|x_k\| \quad \text{for } k \geq K$$

ينتج أن

$$(35.12) \quad (k-1) \|x_k\| - k \|x_{k+1}\| \geq (a-1) \|x_k\| > 0 \quad \text{for } k \geq K$$

التي منها ينتج أن المتتابعة  $(k \|x_{k+1}\|)$  تتناقص عند  $k \geq K$  . بجمع العلاقة ( ٣٥ - ١٢ ) عند  $n, \dots, K$  وملاحظة أن الطرف الأيسر يكون تلسكوبياً ، نجد أن

$$(K-1) \|x_K\| - n \|x_{n+1}\| \geq (a-1)(\|x_K\| + \dots + \|x_n\|)$$

( هـ ) جوزيف راب ( ١٨٠١ - ١٨٥٩ ) ولد في أكران ودرس في زيورخ . اشتغل في كل من الهندسة والتحليل .

ما يوضح أن حواصل الجمع الجزئية من  $\sum (\|x_n\|)$  محدودة ويثبت التقارب المطلق للمتسلسلة  $\sum (x_n)$

(ب) إذا كانت العلاقة (٣٥ - ١١) تظل قائمة عند  $n \geq K$  ، فبما أن  $a \leq 1$  ،

$$n \|x_{n+1}\| \geq (n-a) \|x_n\| \geq (n-1) \|x_n\|$$

نجد أن المتتابة  $(n \|x_{n+1}\|)$  تزايد عند  $n \geq K$  ، ويوجد عدد  $c > 0$  بحيث إن

$$\|x_{n+1}\| > c/n, \quad n \geq K$$

بما أن المتسلسلة التوافقية  $\sum (1/n)$  تتباعد ، إذن  $\sum (x_n)$  لا يمكن أن تكون تقاربية مطلقة . وهو المطلوب إثباته

يمكننا أيضاً استخدام اختبار راب للوصول على معلومات عن سرعة التقارب .

٣٥ - ١٠ نتيجة . إذا كانت  $a > 1$  وإذا كانت المتتابة  $X = (x_n)$  تحقق  $\sum (x_k)$  (٣٥ - ١٠) ، فإن حواصل الجمع الجزئية تقرب من حاصل جمع  $s$  للمتسلسلة  $\sum (x_k)$  حسب التقدير

$$(35.13) \quad \|s - s_n\| \leq \frac{n}{a-1} \|x_{n+1}\| \quad \text{for } n \geq K$$

البرهان . نفرض أن  $m > n \geq K$  ويجمع المتباينات الناتجة من (٣٥ - ١٢) عند  $k = n+1, \dots, m$  نحصل على

$$n \|x_{n+1}\| - m \|x_{m+1}\| \geq (a-1)(\|x_{n+1}\| + \dots + \|x_m\|)$$

ومن ثم نجد أن

$$\|s'_m - s_n\| \leq \|x_{n+1}\| + \dots + \|x_m\| \leq \frac{n}{a-1} \|x_{n+1}\|$$

بأخذ النهاية بالنسبة إلى  $m$  ، نحصل على (٣٥ - ١٣) . وهو المطلوب إثباته

في التطبيق لاختبارات راب ، ربما يكون مناسباً استخدام الصيغة الآتية والأقل حدة للنهاية .

٣٥ - ١١ نتيجة . نفرض أن  $X = (x_n)$  متتابة لعناصر غير صفيرية من الفراغ  $R^p$

ونضع

$$(35.14) \quad a = \lim \left( n \left( 1 - \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \right) \right)$$

طالما وجدت هذه النهاية . حينئذ تكون  $\sum (x_n)$  تقاربية مطلقة عند  $a > 1$  وليست تقاربية مطلقة عند  $a < 1$  .

البرهان . نفرض أن النهاية ( ٣٥ - ١٤ ) موجودة وتحقق  $a > 1$  . إذا كانت  $a_1$  أى عدد حيث  $a > a_1 > 1$  ، فإنه يوجد عدد طبعى  $K$  بحيث إن

$$a_1 < n \left( 1 - \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \right) \quad \text{for } n \geq K.$$

إذن ، ينتج أن

$$\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} < 1 - \frac{a_1}{n} \quad \text{for } n \geq K$$

وتؤكد نظرية ( ٣٥ - ٩ ) التقارب المطلق للمتسلسلة . بالمثل نتناول الحالة التى فيها  $a < 1$  ستحذف . وهو المطلوب إثباته .

### اختبار التكامل :

تقدم الآن اختباراً قوياً ، ينسب إلى ماكلورين (\*) ، لمتسلسلة أعداد موجبة .

٣٥ - ١٢ اختبار تكامل . بفرض أن  $f$  دالة متصلة ، متناقصة ، وموجبة فى الفترة  $\{t: t \geq 1\}$  . إذن المتسلسلة  $\sum (f(n))$  تتقارب إذا وإذا فقط كان التكامل اللانهائى

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt = \lim_n \left( \int_1^n f(t) dt \right)$$

موجوداً فى حالة التقارب نجد أن حاصل الجمع الجزئى  $s_n = \sum_{k=1}^n (f(k))$  وحاصل الجمع  $s = \sum_{k=1}^{+\infty} (f(k))$  يحققان التقدير

$$(35.15) \quad \int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt \leq s - s_n \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt$$

البرهان . بما أن  $f$  متصلة موجبة وتتناقص فى الفترة  $[k-1, k]$  ، فينتج أن

$$(35.16) \quad f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq f(k-1)$$

يجمع هذه المتباينة عند  $k = 2, 3, \dots, n$  نحصل على العلاقة

$$s_n - f(1) \leq \int_1^n f(t) dt \leq s_{n-1}$$

التي توضح أن كلا أولاً أحد من النهايتين

(\*) كولن ماكلورين (١٦٩٨ - ١٧٤٦) كان تلميذاً لتيوتن وأستاذاً فى أدنبره . وكان الموجه للرياضيات البريطانية فى عصره وساهم فى كل من الهندسة والفيزياء الرياضية .

$$\lim (s_n), \quad \lim \left( \int_1^n f(t) dt \right)$$

موجود . إذا كانا موجودين ، فنحصل بجمع العلاقة (٣٥ - ١٦) عند  $k = n+1, \dots, m$  ، على

$$s_m - s_n \leq \int_n^m f(t) dt \leq s_{m-1} - s_{n-1}$$

ومنها ينتج أن

$$\int_{n+1}^{m+1} f(t) dt \leq s_m - s_n \leq \int_n^m f(t) dt$$

إذا أخذنا النهاية بالنسبة إلى  $m$  في هذه المتباينة الأخيرة ، نحصل على (٣٥ - ١٥) .

وهو المطلوب إثباته

سنوضح كيفية تطبيق النتائج في النظريات (٣٥ - ١) إلى (٣٥ - ١٢) على المتسلسلة  $P$ - التي قدمناها في مثال (٣٤ - ٨) (ج) .

٣٥ - ١٣ أمثلة . (أ) سنستخدم أولاً اختبار المقارنة . مع العلم أن المتسلسلة التوافقية  $\sum (1/n)$  تتباعد ، يلاحظ أنه إذا كانت  $p \leq 1$  ، فإن  $n^p \leq n$  ومنها

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p}$$

بعد استخدام اختبار المقارنة (٣٥ - ١) ، نستنتج أن المتسلسلة  $p$ - التي هي  $\sum (1/n^p)$  تتباعد عند  $p \leq 1$  .

(ب) اعتبر الآن الحالة  $p = 2$  ، أى المتسلسلة  $\sum (1/n^2)$  . نقارن هذه المتسلسلة مع المتسلسلة التقاربية  $\sum [1/n(n+1)]$  الموجودة في مثال (٣٤ - ٨) (أ) . بما أن العلاقة

$$\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$$

تظل صحيحة والحدود الموجودة على اليسار تكون متسلسلة تقاربية ، فلا يمكننا استخدام نظرية المقارنة مباشرة . لكن ، يمكن استخدام هذه النظرية إذا قارنا الحد النوني من المتسلسلة  $\sum [1/n(n+1)]$  بالحد (النوني + ١) من المتسلسلة  $\sum (1/n^2)$  . بدلا من هذا نستخدم اختبار نهاية المقارنة (٣٥ - ٢) ونلاحظ أن

$$\frac{1}{n(n+1)} \div \frac{1}{n^2} = \frac{n^2}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

بما أن النهاية لخارج القسمة هو الواحد الصحيح وبما أن  $\sum [1/n(n+1)]$  تتقارب ، فإن المتسلسلة  $\sum (1/n^2)$  تتقارب أيضاً .

(ج) نعتبر الحالة  $p \geq 2$  . إذا لاحظنا أن  $n^p \geq n^2$  عند  $p \geq 2$  فإن

$$\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2}$$

فيطبق مباشر لاختبار المقارنة نجد أن  $\sum (1/n^p)$  تقارب عند  $p \geq 2$  . بالتعاقب ، يمكننا استخدام اختبار نهاية المقارنة ونلاحظ أن

$$\frac{1}{n^p} \div \frac{1}{n^2} = \frac{n^2}{n^p} = \frac{1}{n^{p-2}}$$

إذا  $p > 2$  ، فإن هذا التعبير يقترب إلى صفر ، وإذن ينتج من نتيجة ( ٣٥ - ٢ ) (ب) أن المتسلسلة  $\sum (1/n^p)$  تقارب عند  $p \geq 2$  .

باستخدام اختبار المقارنة ، لا يمكننا الحصول على أى معلومات تتعلق بالمتسلسلة  $p -$  عند  $1 < p < 2$  مالم يمكننا إيجاد متسلسلة معروف صفة تقاربها والتي يمكن مقارنتها بالمتسلسلة في هذا المدى .

(د) نفرض اختبارى النسبة والجذر بتطبيقهما على المتسلسلة  $p -$  . نلاحظ أن

$$\left(\frac{1}{n^p}\right)^{1/n} = (n^{-p})^{1/n} = (n^{1/n})^{-p}$$

من الآن المعروف ( انظر مثال ١٤ - ٨ ) (هـ) أن المتتامة  $(n^{1/n})$  تقارب إلى الواحد الصحيح . وإذن نحصل على

$$\lim \left( \left( \frac{1}{n^p} \right)^{1/n} \right) = 1$$

ومن هذا نجد أن اختبار الجذر ( في الصورة الموجودة في النتيجة ٣٥ - ٥ ) لا يمكن تطبيقه . بنفس الطريقة ، بما أن

$$\frac{1}{(n+1)^p} \div \frac{1}{n^p} = \frac{n^p}{(n+1)^p} = \frac{1}{(1+1/n)^p}$$

وبما أن المتتامة  $((1+1/n)^p)$  تقارب إلى الواحد الصحيح ، فنجد أن اختبار النسبة ( في الصورة الموجودة في النتيجة ٣٥ - ٨ ) لا يطبق .

(هـ) إذا يئسنا ، نستخدم اختبار راب المتسلسلة  $p -$  لقيم صحيحة المقدار  $p$  أولاً ، نحاول استخدام نتيجة ( ٣٥ - ١١ ) . نلاحظ أن

$$\begin{aligned} n \left( 1 - \frac{(n+1)^{-p}}{n^{-p}} \right) &= n \left( 1 - \frac{n^p}{(n+1)^p} \right) \\ &= n \left( 1 - \frac{(n+1-1)^p}{(n+1)^p} \right) = n \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^p \right) \end{aligned}$$

إذا كانت  $p$  عدداً صحيحاً ، فإنه يمكننا استخدام نظرية ذات الحدين للحصول على تقدير لحده الأخير .  
في الحقيقة

$$n \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^p \right) = n \left( 1 - 1 + \frac{p}{n+1} - \frac{p(p-1)}{2(n+1)^2} + \dots \right)$$

إذا أخذنا النهاية بالنسبة إلى  $n$  ، نحصل على  $p$  . ومن ثم توضح هذه النتيجة لاختبار راب أن المتسلسلة تتقارب لقيم صحيحة من  $p \geq 2$  ( لكن إذا كانت نظرية ذات الحدين معروفة لقيم غير صحيحة للمقدار  $p$  ، فيمكن تحسين هذا ) .

( و ) أخيراً ، نستخدم اختبار التكامل للمتسلسلة -  $p$  . نفرض أن  $f(t) = t^{-p}$  وتذكر أن

$$\int_1^n \frac{1}{t} dt = \log(n) - \log(1),$$

$$\int_1^n \frac{1}{t^p} dt = \frac{1}{1-p} (n^{1-p} - 1) \quad \text{for } p \neq 1$$

من هذه العلاقات نرى أن المتسلسلة -  $p$  تتقارب إذا كانت  $p > 1$  وتتباعد إذا كانت  $p \leq 1$  .

### تمريعات :

٣٥ - ( أ ) أثبت التقارب أو التباعد للمتسلسلة التي حدها النوني معطى كما يل :

$\frac{n}{(n+1)(n+2)}$ (ب)	$\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ (أ)
$n/2^n$ (د)	$2^{-1/n}$ (ج)
$[n^2(n+1)]^{-1/2}$ (و)	$[n(n+1)]^{-1/2}$ (هـ)
$(-1)^n n/(n+1)$ (ح)	$n!/n^n$ (ز)

٣٥ - (ب) لكل من المتسلسلات التقاربية في تمرين ( ٣٥ - أ ) ، احسب الباقي في حالة أخذ أربعة حدود فقط . إذا أردنا أن نحدد حاصل الجمع ضمن  $1/1000$  ، كم حداً يجب أن نأخذ ؟

٣٥ - (ج) ناقش التقارب أو التباعد للمتسلسلات التي حدها النوني ( عندما  $n$  تكون كبيرة كبراً كافياً ) معطى بأنه

$[\log n]^{-n}$ (ب)	$[\log n]^{-p}$ (أ)
$[\log n]^{-\log \log n}$ (د)	$[\log n]^{-\log n}$ (ج)
$[n(\log n)(\log \log n)^2]^{-1}$ (و)	$[n \log n]^{-1}$ (هـ)

٣٥- (د) ناقش التقارب أو التباعد للمتسلسلات التي حدها النوفى

$$\begin{array}{ll} n^n e^{-n} & \text{(ب)} \\ (\log n) e^{-\sqrt{n}} & \text{(د)} \\ n! e^{-n^2} & \text{(ج)} \end{array} \quad \begin{array}{ll} 2^n e^{-n} & \text{(أ)} \\ e^{-\log n} & \text{(ج)} \\ n! e^{-n} & \text{(أ)} \end{array}$$

٣٥- (أ) أثبت أن المتسلسلة

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^3} + \dots$$

تكون تقاربية ، لكن كلا من اختبارى النسبة والجذر يفشل فى الاستخدام .

٣٥- (و) إذا كان  $a, b$  عددين موجبين ، فإن

$$\sum \frac{1}{(an+b)^p}$$

تتقارب إذا كانت  $p > 1$  وتتباع إذا كانت  $p \leq 1$  .

٣٥- (ز) اختبر المتسلسلات التي حدها النوفى هو

$$\begin{array}{ll} \frac{(n!)^2}{(2n)!} & \text{(ب)} \\ \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{5 \cdot 7 \cdots (2n+3)} & \text{(د)} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \frac{n!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} & \text{(أ)} \\ \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} & \text{(ج)} \end{array}$$

٣٥- (ح) المتسلسلة المعطاة بأنها

$$\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^p + \dots$$

تتقارب عند  $p > 2$  وتتباع عند  $p \leq 2$  .

٣٥- (ط) نفرض أن  $X = (x_n)$  متتابعة فى  $R^p$  ونفرض أن  $r$  معرفة بأنها

$$r = \limsup (\|x_n\|^{1/n})$$

إذن  $\sum (x_n)$  تكون تقاربية مطلقة إذا كانت  $r < 1$  وتتباع إذا كانت  $r > 1$  . [ النهاية الأعلى  $u = \limsup (b_n)$  متتابعة محدودة لأعداد حقيقية عرفناها فى باب ١٨ . هى العدد الوحيد  $u$  ذو الخواص (i) إذا كانت  $u < v$  فإن  $b_n \leq v$  لجميع  $n \in N$  كبيرة كبراً كافياً ، (ii) إذا كانت  $w < u$  فإن  $w \leq b_n$  لأعداد كثيرة عددها لانهاى  $n \in N$  .

٣٥- (ي) نفرض أن  $X = (x_n)$  متتابعة لعناصر غير صفيرية للقراغ  $R^p$  ونفرض أن

$$r \text{ معرفة بأنها } (\|x_{n+1}\|/\|x_n\|)$$

(أ) أثبت أنه إذا كانت  $r < 1$  ، فإن المتسلسلة  $\sum (x_n)$  تكون تقاربية مطلقاً .

(ب) اعط مثالا لتسلسلة تقاربية مطلقة حيث  $r > 1$  .

(ج) إذا كانت  $\|x_{n+1}\|/\|x_n\| > 1$  ، أثبت أن التسلسلة  $\sum (x_n)$  ليست تقاربية مطلقة .

٣٥ - (ك) نفرض أن  $X = (x_n)$  متتابعة لعناصر ليست صفرية للفراغ  $R^p$  ونفرض أن  $a = \limsup (n(1 - \|x_{n+1}\|/\|x_n\|))$

(أ) إذا كانت  $a < 1$  أثبت أن التسلسلة  $\sum (x_n)$  ليست تقاربية مطلقة .

(ب) اعط مثالا لتسلسلة تباعدية حيث  $a > 1$  .

(ج) إذا كان  $\liminf (n(1 - \|x_{n+1}\|/\|x_n\|)) > 1$  أثبت أن التسلسلة  $\sum (x_n)$  تكون تقاربية مطلقة .

٣٥ - (ل) نفرض أن  $X = (x_n)$  بحيث أن  $x_n > 0$  عند  $n \in N$  . أثبت أن التسلسلة  $\sum (x_n)$  تكون تباعدية إذا كان

$$\limsup \left( (\log n) \left[ n \left( 1 - \frac{x_{n+1}}{x_n} \right) - 1 \right] \right) < 1$$

٣٥ - (م) نفرض أن  $x_n > 0$  عند  $n \in N$  ونفرض أن  $n(1 - x_{n+1}/x_n) = a + k_n/n^p$  حيث  $p > 0$  ،  $(k_n)$  محدودة . إذن التسلسلة  $\sum (x_n)$  تتقارب إذا كانت  $a > 1$  وتتباعد إذا كانت  $a \leq 1$  .

٣٥ - (ن) إذا كانت  $q > 0$  ،  $p > 0$  ، فإن التسلسلة

$$\sum \frac{(p+1)(p+2) \cdots (p+n)}{(q+1)(q+2) \cdots (q+n)}$$

تتقارب عند  $q > p + 1$  وتتباعد عند  $q \leq p + 1$  .

٣٥ - (س) أثبت أن التسلسلة  $\sum (2^n n!)^2 / (2n+1)!$  تكون تباعدية .

٣٥ - (ع) نفرض أن  $x_n > 0$  ونفرض أن  $r = \liminf (-\log x_n / \log n)$  أثبت أن  $\sum (x_n)$  تتقارب إذا كانت  $r > 1$  وتتباعد إذا كانت  $r < 1$  .

٣٥ - (ف) نفرض أنه لا أحد من الأعداد  $a, b, c$  ليس عدداً صحيحاً سالباً أو صفراً . أثبت أن التسلسلة فوق الهندسية

$$\frac{ab}{1!c} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)} + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)} + \dots$$

تقاربية مطلقة عند  $c > a + b$  وتباعدية عند  $c \leq a + b$  .

٣٥ - (ص) نفرض أن  $a_n > 0$  ونفرض أن  $\sum (a_n)$  تتقارب . كون متسلسلة



تقاربية  $\sum (b_n)$  حيث  $b_n > 0$  بحيث أن  $\lim (a_n/b_n) = 0$  ؛ ومن ثم بين أن  $\sum (b_n)$  تقارب بسرعة أقل من  $\sum (a_n)$  . (ارشاد : نفرض أن  $(A_n)$  هي حواصل الجمع الجزئية للمتسلسلة  $\sum (a_n)$  وأن  $A$  هي نهايتها . عرف  $b_n = \sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}$  و  $r_0 = A$ ,  $r_n = A - A_n$  . كونه متسلسلة تباعدية ٣٥ - (ق) نفرض أن  $a_n > 0$  ونفرض أن  $\sum (a_n)$  تتباعد . كون متسلسلة تباعدية  $\sum (b_n)$  حيث  $b_n > 0$  بحيث أن  $\lim (b_n/a_n) = 0$  ، ومن ثم  $\sum (b_n)$  تتباعد بسرعة أقل عن  $\sum (a_n)$  (ارشاد : نفرض أن  $b_n = \sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{a_n}$ ,  $n > 1$  و  $b_1 = \sqrt{a_1}$  ) ٣٥ - (ر) نفرض أن  $\{n_1, n_2, \dots\}$  ترمز إلى المجموعة لأعداد حقيقية التي لا يظهر رقم 6 في الجزء العشري لها . أثبت أن المتسلسلة  $\sum (1/n_k)$  تتقارب إلى عدد أقل من 90 . إذا كانت  $\{m_1, m_2, \dots\}$  هي المجموعة التي تنتهي بالرقم 6 ؛ فإن  $\sum (1/m_k)$  تتباعد .

## مشروعات :

٣٥ -  $\alpha$  بالرغم من أن حواصل الضرب اللانهائية لا تظهر بغالبية مثل المتسلسلات اللانهائية ، فلها أهمية في اختبارات كثيرة وتطبيقات . للبساطة ، سوف نركز اهتمامنا هنا على حواصل الضرب اللانهائية التي حدودها  $a_n > 0$  . إذا كانت  $A = (a_n)$  متتابعة لأعداد حقيقية موجبة دقيقة ، فإن حاصل ضرب لانهائي ، أو المتتابعة لحواصل ضرب جزئية ، المولدة بالمتتابعة  $A$  هي المتتابعة  $P = (p_n)$  المعرفة بأنها

$$p_1 = a_1, p_2 = p_1 a_2 (= a_1 a_2), \dots, \\ p_n = p_{n-1} a_n (= a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n), \dots$$

إذا كانت المتتابعة  $P$  تتقارب إلى عدد ليس صفراً ، فتسمى نهاية  $P$  بأنه حاصل الضرب لحاصل الضرب اللانهائي المولد بالمتتابعة  $A$  . نقول في هذه الحالة أن حاصل الضرب اللانهائي يكون تقاربياً ونكتب أما

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \prod (a_n), \quad \text{أو} \quad a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$$

للدلالة على كلا  $P$  ونهاية  $P$  .

( ملاحظة : المطلوب أن  $\lim P \neq 0$  ليس ضرورياً لكنه تقليدي ، لأنه يثبت أن خواص معينة لحواصل ضرب محدودة تطبق أيضاً على حواصل ضرب لانهائية ) .

(أ) وضع أن شرطاً ضرورياً للتقارب لحاصل ضرب لانهائي هو أن  $\lim (a_n) = 1$

(ب) أثبت أن الشرط الضروري والكافي للتقارب

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n \text{ هو تقارب } \prod_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0$$

(ج) حواصل الضرب اللانهائية غالباً لها حدود على الصورة  $a_n = 1 + u_n$  . حفظاً

على قيدنا الدائم ، نفرض أن  $u_n > -1$  لكل  $n \in \mathbb{N}$  . إذا كانت  $u_n \geq 0$  ، أثبت أن شرطاً ضرورياً كافياً لتقارب حاصل الضرب اللانهائي هو التقارب للمتسلسلة النهائية  $\sum (u_n)$  ، ( ارشاد : استعمل نهاية اختبار المقارنة ٣٥ - ٣٠ ) .

(د) نفرض أن  $u_n > -1$  . وضع أنه إذا كانت المتسلسلة اللانهائية  $\sum (u_n)$  تقاربية مطلقة ، فإن حاصل الضرب اللانهائي  $\prod (1+u_n)$  يكون تقاربياً .

(هـ) نفرض أنه  $u_n > -1$  وأن المتسلسلة  $\sum (u_n)$  تقاربية . إذن شرط ضروري وكاف لتقارب حاصل الضرب اللانهائي  $\prod (1+u_n)$  هو التقارب للمتسلسلة اللانهائية  $\sum (u_n^2)$  . ( ارشاد : استخدم نظرية تايلور ووضح أنه يوجد مقداران ثابتان موجبان  $A, B$  بحيث أنه إذا كانت  $|u| < \frac{1}{2}$  فإن  $Au^2 \leq u - \log(1+u) \leq Bu^2$  )

## الباب السادس والثلاثون — نتائج أبعد للمتسلسلات :

الاختبارات المطاة في باب ٣٥ كلها لها الخاصية التي تثبت أنه ، إذا توفرت فروض معينة فإن المتسلسلة  $\sum (x_n)$  تكون تقاربية مطلقة . من المعروف الآن أن التقارب المطلق يثبت التقارب العادي ، لكن يتضح حالا من فحص دوال خاصة ، مثل

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}, \quad \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

أن التقارب يمكن حدوثه حتى ولو فشل التقارب المطلق . لذلك يكون من المرغوب به الحصول على اختبار ينتج معلومات عن تقارب عادي . توجد بكثرة مثل هذه الاختبارات التي تستخدم لنماذج معينة من المتسلسلات . ربما الاختبارات القابلة للتطبيق في الحالة العامة بدرجة كبيرة هي التي تنسب إلى أبيل (\*) ودرشلت .

لإثبات هذه الاختبارات ، نحتاج إلى مفترض يسمى أحياناً قاعدة الجمع الجزئي لأنها تناظر قاعدة التكاميل بالتجزئ المألوفة ، في معظم التطبيقات ، تكون المتتابعات  $X, Y$  متتابعتين في الفراغ  $R^p$  ، لكن النتائج تظل صحيحة عند كون  $X, Y$  متتابعتين في الفراغ  $R^p$  . يستخدم حاصل الضرب المزدوج أو عند كون  $X, Y$  متتابعة حقيقية والأخرى تكون في  $R^p$  .

(\*) نيلس هنريك أبيل ( ١٨٠٢ - ١٨٢٩ ) كان الإبن لرجل دين نرويجي فقير . برهن عندما كان عمره ٢٢ سنة فقط عدم إمكانية حل المعادلة من الدرجة الخامسة بواسطة الجذور . هذا العبقرى الذي علم بنفسه أيضاً بحث بحثاً بارزاً في المتسلسلات والدوال الناقصية قبل موته المبكر بمرض السل .

٣٦-١ مفترض أبّل . نفرض أن  $X=(x_n)$  في  $R$  ،  $Y=(y_n)$  في  $R^p$  متباينتان ونفرض أننا نرمز لحواصل الجمع الجزئية  $\sum (y_n)$  ( بالرمز  $(s_k)$  . إذا كانت  $m \geq n$  ، فإن

$$(36.1) \quad \sum_{j=n}^m x_j y_j = (x_{m+1} s_m - x_n s_{n-1}) + \sum_{j=n}^m (x_j - x_{j+1}) s_j$$

البرهان . برهان هذه النتيجة يمكن إعطاؤه بملاحظة أن  $y_j = s_j - s_{j-1}$  وبمساواة الحدود على كل جانب من المتساوية . سنترك التفاصيل للقارىء . وهو المطلوب إثباته

نستخدم مفترض أبّل لنستنتج أن المتسلسلة  $\sum (x_n y_n)$  تكون تقاربية في حالة كون كلتا المتسلسلتين  $\sum (x_n)$  و  $\sum (y_n)$  متباينتين .

٣٦-٢ اختبار دوشلت . نفرض أن حواصل الجمع الجزئية للمتسلسلة  $\sum (y_n)$  محدودة .

(أ) إذا كانت المتباينة  $X=(x_n)$  تقرب من صفر ، وإذا كانت

$$(36.2) \quad \sum |x_n - x_{n+1}|$$

تقاربية ، فإن المتسلسلة  $\sum (x_n y_n)$  تقاربية .

(ب) في الحالة الخاصة ، إذا كانت  $X=(x_n)$  متباينة تناقصية لأعداد حقيقية موجبة وتقارب إلى صفر ، فإن المتباينة  $\sum (x_n y_n)$  تكون تقاربية .

البرهان . (أ) نفرض أن  $\|s_j\| < B$  لكل  $j$  . باستخدام (٣٦-١) ، نحصل على التقدير

$$(36.3) \quad \left\| \sum_{j=n}^m x_j y_j \right\| \leq \{ |x_{m+1}| + |x_n| + \sum_{j=n}^m |x_j - x_{j+1}| \} B$$

إذا كانت  $\lim (x_n) = 0$  ، فإن الحدين الأوليين الموجودين في الطرف الأيمن يمكن جعلهما صغيرين بدرجة اختيارية بأخذ  $m, n$  كبيرين كبراً كافياً . أيضاً إذا تقاربت المتسلسلة (٣٦-٢) ، فإن معيار كوشى يؤكد أن الحد الأخير في هذا الطرف يمكن جعله أقل من  $\varepsilon$  بأخذ  $m \geq n \geq M(\varepsilon)$  . ومن ثم يدل معيار كوشى على أن المتسلسلة  $\sum (x_n y_n)$  تكون تقاربية .

(ب) إذا كانت  $x_1 \geq x_2 \geq \dots$  ، فإن المتسلسلة في (٣٦-٢) تكون تلسكوبية وتقاربية .

٣٦-٣ نتيجة . في جزء (ب) ، نحصل على تقدير الخطأ

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j - \sum_{j=1}^n x_j y_j \right\| \leq 2x_{n+1} B$$

حيث  $B$  هي الحد الأعلى لحواصل الجمع الجزئية  $\sum (y_i)$  .

البرهان . حصلنا على المطلوب حالا من علاقة ( ٣٦ - ٣ ) . وهو المطلوب إثباته

الاختبار الآتي يقوى الفرض على المتسلسلة  $\sum (y_n)$  ، لكن يضعف الفرض على  $\sum (x_n)$

٣٦ - ٤ . اختبار أبيل . نفرض أن المتسلسلة  $\sum (y_n)$  تتقارب في  $R^p$

(أ) إذا كانت المتتابعة  $X = (x_n)$  في  $R$  بحيث أن المتسلسلة

$$\sum |x_n - x_{n+1}| \quad (36.2)$$

تقاربية ، فإن المتسلسلة  $\sum (x_n y_n)$  تكون تقاربية .

(ب) بوجه خاص ، إذا كانت المتتابعة  $X = (x_n)$  إطرادية وتقاربية إلى  $x$  في  $R$  ، حينئذ المتسلسلة  $\sum (x_n y_n)$  تقاربية .

البرهان . (أ) من الفرض ، تتقارب حواصل الجمع الجزئية  $s_k$  للمتسلسلة  $\sum (y_n)$  إلى عنصر ما  $s$  في  $R^p$  . ومن ثم توجد  $B$  محدودة خاصة بالفتة  $\{\|s_k\| : k \in N\}$  وبأخذ  $\varepsilon > 0$  نجد أنه يوجد  $N_1(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $n \geq N_1(\varepsilon)$  ، فإن  $\|s_n - s\| < \varepsilon$  .

الآن الفرض الآن بأن ( ٣٦ - ٢ ) تقاربية يدل على أنه إذا كانت  $n \in N$  فإن ،

$$\begin{aligned} |x_n| &\leq |x_1 + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})| \\ &\leq |x_1| + \sum_{k=1}^{n-1} |x_k - x_{k+1}| \end{aligned}$$

وإذن  $|x_n| < A$  لقيمة ما  $A > 0$  . وبالإضافة إلى ذلك ، يوجد  $N_2(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $m > n \geq N_2(\varepsilon)$  فإن

$$(36.4) \quad |x_{m+1} - x_n| \leq \sum_{j=n}^m |x_{j+1} - x_j| < \varepsilon$$

نفرض الآن  $N_3(\varepsilon) = \sup \{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$  بحيث أنه إذا كانت  $m > n > N_3(\varepsilon)$  فنحصل على

$$\begin{aligned} &\|x_{m+1}s_m - x_ns_{n-1}\| \\ &\leq \|x_{m+1}s_m - x_{m+1}s\| + \|x_{m+1}s - x_ns\| + \|x_ns - x_ns_{n-1}\| \\ &\leq |x_{m+1}| \|s_m - s\| + |x_{m+1} - x_n| \|s\| + |x_n| \|s - s_{n-1}\| \\ &\leq A\varepsilon + \varepsilon B + A\varepsilon = (2A + B)\varepsilon \end{aligned}$$

لذلك ، بواسطة مفترض أبيل ( ٣٦ - ١ ) ، إذا كانت  $m > n > N_3(\varepsilon)$  فينتج

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{j=n}^m x_j y_j \right\| &\leq (2A + B)\varepsilon + \left\| \sum_{j=n}^m (x_j - x_{j+1}) s_j \right\| \\ &\leq (2A + B)\varepsilon + \left( \sum_{j=n}^m |x_j - x_{j+1}| \right) B \\ &\leq 2(A + B)\varepsilon\end{aligned}$$

حيث استخدمنا (٣٦ - ٤) في الخطوة الأولى . وهذا يثبت التقارب للمتسلسلة  $\sum (x_j y_j)$  لأن  $\varepsilon > 0$  واختيارية .

(ب) إذا كانت المتتابعة  $(x_n)$  إطرادية وتقرب إلى  $x$  ، فإن المتسلسلة (٣٦ - ٢) تكون تلسكوبية وتقرب إما إلى  $x - x_1$  أو إلى  $x_1 - x$  . وهو المطلوب إثباته  
إذا استخدمنا نفس النموذج من المناقشة فيمكننا إثبات تقدير الخطأ الآتي :

٣٦ - ٥ نتيجة . حصلنا في جزء (ب) ، على تقدير الخطأ

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j - \sum_{j=1}^n x_j y_j \right\| \leq |x_{n+1}| \|s - s_n\| + 2B |x - x_{n+1}|$$

### متسلسلات متعاقبة ( أو متناوبة ) :

يوجد نوع هام بوجه خاص للمتسلسلات الحقيقية التقاربية الشرطية ، أى التى حدودها تكون بالتعاقب موجبة وسالبة .

٣٦ - ٦ تعريف . متتابعة  $X = (x_n)$  لأعداد حقيقية غير صفرية تكون متعاقبة إذا كانت الحدود  $(-1)^n x_n$  ،  $n = 1, 2, \dots$  أعدادها حقيقية كلها موجبة ( أو كلها سالبة )  
إذا كانت متتابعة  $X = (x_n)$  متعاقبة ، فنقول أن المتسلسلة  $\sum (x_n)$  التى تولدها متسلسلة متعاقبة .

من المفيد أن نضع  $x_n = (-1)^n z_n$  ونطلب أن  $z_n > 0$  ( أو  $z_n < 0$  ) لجميع  $n = 1, 2, \dots$  . يمكن دراسة التقارب للمتسلسلات المتناوبة بسهولة إذا أمكن استخدام النتيجة الآتية التى برهنها ليبنتز .

٣٦ - ٧ اعتبار متسلسلة متناوبة . نفرض أن  $Z = (z_n)$  متتابعة تناقصية لأعداد حقيقية دقيقة حيث  $\lim (z_n) = 0$  . حينئذ المتسلسلة المتعاقبة  $\sum ((-1)^n z_n)$  تقاربية . وبالإضافة إلى ذلك ، إذا كانت  $s$  هى حاصل الجمع لهذه المتسلسلة وأن  $s_n$  هى حاصل جمع الجزئى النوفى ، فإذا ن حصل على التقدير

$$(36.5) \quad |s - s_n| \leq z_{n+1}$$

لسرعة التقارب

البرهان . هذا ينتج مباشرة من اختبار درشلت ( ٣-٣٦ ) ( ب ) إذا أخذنا  $y_n = (-1)^n$  لكن تقدير الخطأ المعطى في نتيجة ( ٣-٣٦ ) ليس دقيقاً مثل التقدير في ( ٣-٣٦ ) يمكننا أيضاً الشروع مباشرة لتوضيح الاستنتاج الرياضي أنه إذا كانت  $m \geq n$  ، فإن

$$|s_m - s_n| = |z_{n+1} - z_{n+2} + \dots + (-1)^{m-n-1} z_m| \leq |z_{n+1}|$$

هذا ينتج كلا من التقارب والتقدير ( ٣-٣٦ ) وهو المطلوب إثباته

٣-٣٦ أمثلة . ( أ ) المتسلسلة  $\sum ((-1)^n/n)$  تسمى أحياناً بالمتسلسلة التوافقية المتعاقبة ، ليست تقاربية مطلقة . لكن ، ينتج من اختبار المتسلسلات المتعاقبة أنها تقاربية .

( ب ) بالمثل ، المتسلسلة  $\sum ((-1)^{2k}/\sqrt{k})$  تقاربية ، لكن ليست تقاربية مطلقة .

( ج ) نفرض أن  $x \in \mathbb{R}$  . ونفرض أن  $k \in \mathbb{Z}$  . إذن ، بما أن

$$2 \cos kx \sin \frac{1}{2}x = \sin (k + \frac{1}{2})x - \sin (k - \frac{1}{2})x$$

فينتج أن

$$2 \sin \frac{1}{2}x [\cos x + \dots + \cos nx] = \sin (n + \frac{1}{2})x - \sin \frac{1}{2}x$$

ومن ثم ، إذا كانت  $x$  ليست مضاعفاً صحيحاً للمقدار  $2\pi$  ، فإن

$$(36.6) \quad \cos x + \dots + \cos nx = \frac{\sin (n + \frac{1}{2})x - \sin \frac{1}{2}x}{2 \sin \frac{1}{2}x}$$

لذلك ، إذا كانت  $x \notin \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$  ، فإن

$$|\cos x + \dots + \cos nx| \leq \frac{1}{|\sin \frac{1}{2}x|}$$

يمكننا حينئذ استخدام اختبار درشلت ( ٣-٣٦ ) ( ب ) لنستنتج أن المتسلسلة  $\sum (1/n) \cos nx$  تتقارب لكل  $x \notin \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$  . نلاحظ أن هذه المتسلسلة تتباعد عند  $x = 2k\pi$  عند بعض  $k \in \mathbb{Z}$  .

( د ) نفرض أن  $x \in \mathbb{R}$  ونفرض أن  $k \in \mathbb{Z}$  . حينئذ بما أن

$$2 \sin kx \sin \frac{1}{2}x = \cos (k - \frac{1}{2})x - \cos (k + \frac{1}{2})x$$

ينتج أن

$$2 \sin \frac{1}{2}x [\sin x + \dots + \sin nx] = \cos \frac{1}{2}x - \cos (n + \frac{1}{2})x$$

ومن ثم ، إذا كانت  $x$  ليست مضاعفاً صحيحاً للمقدار  $2\pi$  فإن

$$\sin x + \dots + \sin nx = \frac{\cos \frac{1}{2}x - \cos (n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2}x}$$

لذلك ، إذا كانت  $x \notin \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$  ، فإن

$$|\sin x + \dots + \sin nx| \leq \frac{1}{|\sin \frac{1}{2}x|}$$

كما سبق ، يثبت اختبار درشلت تقارب المتسلسلة

$$\sum (1/n) \sin nx \quad \text{لجميع } x \notin \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

نلاحظ أن هذه المتسلسلة تقارب عند  $x = 2k\pi$  عند  $k \in \mathbb{Z}$  .

(\*) نفرض أن  $Y = (y_n)$  متتابعة في الفراغ  $R^2$  عناصرها هي

$$y_1 = (1, 0), \quad y_2 = (0, 1), \quad y_3 = (-1, 0),$$

$$y_4 = (0, -1), \dots, y_{n+4} = y_n, \dots$$

لاحظنا سالا أن المتسلسلة  $\sum (y_n)$  لاتتقارب ، لكن حواصل الجمع الجزئية لها  $s_n$  محدودة ، في الحقيقة يكون  $\|s_n\| \leq \sqrt{2}$  . إذن يوضح اختبار درشلت أن المتسلسلة  $\sum (1/n)y_n$  تكون تقاربية في  $R^2$

### متسلسلات مزدوجة :

يكون أحياناً ضرورياً أن نعتبر حواصل جمع لانهاية تعتمد على رقين صحيحين . تتطور النظرية لمثل هذه المتسلسلات المزدوجة باختزالها إلى متتابعات مزدوجة ، أي أن كل النتائج في باب ١٩ الخاصة بالمتتابعات المزدوجة يمكن تفسيرها للمتسلسلات المزدوجة . لكن ، سوف لانستنتج من نتائج باب ١٩ ، وبدلاً من ذلك ، سوف نركز انتباهنا إلى المتسلسلات المزدوجة التقاربية المطلقة ، حيث أن هذه المتسلسلات هي النموذج للمتسلسلات المزدوجة التي تظهر كثيراً جداً .

نفرض أنه لكل زوج  $(i, j)$  في  $N \times N$  عنصر  $x_{ij}$  في الفراغ  $R^p$  . نعرف حاصل الجمع الجزئي الذي رتبته  $(m, n)$  أي  $s_{mn}$  بأنه

$$s_{mn} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij}$$

وكما في تعريف ٣٤ - ١ ، سوف نقول أن المتسلسلة المزدوجة  $\sum (x_{ij})$  تقارب إلى عنصر  $x$  في  $R^p$  إذا كان يوجد لكل  $\varepsilon > 0$  عدد طبيعي  $M(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $m \geq M(\varepsilon)$  وكانت  $n \geq M(\varepsilon)$  فإن

$$\|x - s_{mn}\| < \varepsilon$$

وكما في تعريف ٣٤ - ٦ ، سوف نقول أن المتسلسلة المزدوجة  $\sum (x_{ij})$  تكون تقاربية مطلقة إذا كانت المتسلسلة المزدوجة  $\sum (\|x_{ij}\|)$  في  $R$  تقاربية .

نوضح كثرين أنه إذا كانت المتسلسلة المزدوجة تقاربية مطلقة ، فإنها تقاربية وبالإضافة إلى ذلك ، المتسلسلة المزدوجة تقاربية مطلقة إذا وإذا فقط كانت الفتة

$$(36.7) \quad \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|x_{ij}\| : m, n \in \mathbf{N} \right\}$$

فتة محدودة لأعداد حقيقية .

نرغب في ربط المتسلسلات المزدوجة بالمتسلسلات المكررة ، لكن سوف نناقش فقط المتسلسلات التقاربية المطلقة . النتيجة الآتية أولية جداً ، لكنها تعطي معياراً مفيداً للتقارب المطلق للمتسلسلات المزدوجة .

٣٦ - ٩ . نفرض أن المتسلسلة المكررة  $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \|x_{ij}\|$  تقارب . إذن المتسلسلة المزدوجة  $\sum (x_{ij})$  تكون تقاربية مطلقة .

البرهان . من الفرض تقارب كل متسلسلة  $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_{ij}\|$  إلى عدد موجب  $a_j, j \in \mathbf{N}$  وبالإضافة إلى ذلك ، تقارب المتسلسلة  $\sum (a_j)$  إلى عدد  $A$  . من الواضح أن  $A$  حد أعلى للفتة ( ٣٦ - ٧ ) . وهو المطلوب إثباته .

٣٦ - ١٠ . نظرية . نفرض أن المتسلسلة المزدوجة  $\sum (x_{ij})$  تقارب مطلقاً إلى  $x$  في  $\mathbf{R}^p$  . حينئذ كلتا المتسلسلتين المكررتين .

$$(36.8) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} x_{ij}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij}$$

تقاربان أيضاً إلى  $x$

البرهان . من الفرض نجد أنه يوجد عدد حقيق موجب  $A$  يكون حداً أعلى للفتة في ( ٣٦ - ٧ ) . نلاحظ أنه إذا كانت  $n$  ثابتة ، أن

$$\sum_{i=1}^m \|x_{in}\| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \|x_{ij}\| \leq A$$

لكل  $m$  في  $\mathbf{N}$  . من ذلك ينتج أنه ، لكل  $n \in \mathbf{N}$  ، تقارب المتسلسلة الفردية  $\sum_{i=1}^{\infty} (x_{in})$  تقارباً مطلقاً نعنصر  $y_n$  في  $\mathbf{R}^p$

إذا كانت  $\varepsilon > 0$  ، فنفرض  $M(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $m, n \geq M(\varepsilon)$  ، فإن

$$(36.9) \quad \|s_{mn} - x\| < \varepsilon$$

وحسب العلاقة

$$s_{mn} = \sum_{i=1}^m x_{i1} + \sum_{i=1}^m x_{i2} + \cdots + \sum_{i=1}^m x_{in}$$



نستنتج أن

$$\lim_m (s_{mn}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_{i1} + \sum_{i=1}^{\infty} x_{i2} + \dots + \sum_{i=1}^{\infty} x_{in} \\ = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

إذا عبرنا إلى النهاية في (٣٦ - ٩) بالنسبة إلى  $m$  ، نحصل على العلاقة

$$\left\| \sum_{i=1}^n y_i - x \right\| \leq \varepsilon, \quad n \geq M(\varepsilon)$$

ما يثبت أن حاصل الجمع المكرر الأول في (٣٦ - ٨) موجود ويساوي  $x$  . يستخدم برهان مماثل لحاصل الجمع المكرر الثاني . وهو المطلوب إثباته .

توجد طريقة إضافية لجمع المتسلسلات المزدوجة التي سنعتبرها ، وذلك بالجمع على الأقطار .  $i + j = n$  .

٣٦ - ١١ نظرية : نفرض أن المتسلسلة المزدوجة  $\sum (x_{ij})$  تتقارب مطلقاً إلى  $x$  في  $R^p$  . إذا عرفنا

$$t_k = \sum_{i+j=k} x_{ij} = x_{1,k-1} + x_{2,k-2} + \dots + x_{k-1,1}$$

فإن المتسلسلة  $\sum (t_k)$  تتقارب مطلقاً إلى  $x$  .

البرهان . إذا فرضنا أن  $A$  هي أعلى الفتة في (٣٦ - ٧) فنلاحظ أن

$$\sum_{k=2}^n \|t_k\| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \|x_{ij}\| \leq A$$

ومن ثم تكون المتسلسلة  $\sum (t_k)$  تقاربية مطلقة ؛ يتبقى أن نوضح أنها تتقارب إلى  $x$  بفرض أن  $\varepsilon > 0$  نفرض أن  $M$  بحيث أن

$$A - \varepsilon < \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \|x_{ij}\| \leq A$$

إذا كانت  $m, n \geq M$  ، فينتج أن  $\|s_{mn} - s_{MM}\|$  لا يكون أكبر من حاصل الجمع  $\sum (\|x_{ij}\|)$  المأخوذ على كل الأزواج  $(i, j)$  التي تحقق إما  $M < i \leq m$  أو  $M < j \leq n$  . إذن  $\|s_{mn} - s_{MM}\| < \varepsilon$  ، عند  $m, n \geq M$  . ينتج من هذا أن  $\|x - s_{MM}\| \leq \varepsilon$  توضح مناقشة مشابهة أنه إذا كانت  $n \geq 2M$  فإن

$$\left\| \sum_{k=2}^n t_k - s_{MM} \right\| < \varepsilon$$

وهو المطلوب إثباته

ومنها ينتج أن  $x = \sum t_k$

## حاصل ضرب كوشي :

في عملية حاصل ضرب متسلسلتين قوى وتجميع الحدود طبقاً للقوى ، ينتج ، طبيعياً جداً ، طريقة جديدة لتوليد متسلسلة من متسلسلتين معطيتين . بهذا الارتباط من المفيد رمزياً أن نأخذ الحدود للمتسلسلة ذات أدلة  $0, 1, 2, \dots$

٣٦-١٢ تعريف . إذا كانت  $\sum_{i=0}^{\infty} (y_i)$  و  $\sum_{j=0}^{\infty} (z_j)$  متسلسلتين لانهائيتين في الفراغ  $R^P$  حاصل ضربهما كوشي هو المتسلسلة  $\sum_{k=0}^{\infty} (x_k)$  ، حيث

$$x_k = y_0 \cdot z_k + y_1 \cdot z_{k-1} + \dots + y_k \cdot z_0$$

هنا تدل النقطة على حاصل الضرب القياسي في  $R^P$  . يمكننا بطريقة مشابهة تعريف حاصل ضرب كوشي للمتسلسلة في الفراغ  $R$  والمتسلسلة في الفراغ  $R^P$  .

ربما يفشل ، مع قليل من الدهشة ، حاصل ضرب كوشي لمتسلسلتين تقاربيتين في أن تتقارب لكن ، يلاحظ أن المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

تقاربية ، لكن الحد النوني في حاصل ضرب كوشي لهذه المتسلسلة في نفسها هو

$$(-1)^n \left[ \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{1}} \right]$$

بما أنه يوجد  $n+1$  حداً داخل القوسين وكل حد يزيد عن  $1/(n+2)$  ، فإن الحدود في حاصل ضرب كوشي لا تقترب من صفر مما يثبت أن حاصل ضرب كوشي لا يمكن أن يتقارب .

٣٦-١٣ نظرية . إذا كانت المتسلسلتان  $\sum_{i=0}^{\infty} z_i$  ،  $\sum_{i=0}^{\infty} y_i$  تتقاربان مطلقاً  $z, y$  في  $R^P$  ، فإن حاصل ضرب كوشي لهما يتقارب مطلقاً إلى  $z \cdot y$  .

البرهان . إذا كانت  $i, j = 0, 1, 2, \dots$  ، فنفرض أن  $x_{ij} = y_i \cdot z_j$  . تدل المعطيات على أن المتسلسلتين المكررتين  $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \|x_{ij}\|$  تتقاربان . من المفترض ٣٦-٩ ، تكون المتسلسلة المزدوجة  $\sum (x_{ij})$  تقاربية مطلقة للمدد الحقيقي  $x$  . باستخدام نظريتي ٣٦-١٠ و ٣٦-١١ ، نستنتج أن كلا من المتسلسلتين

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} x_{ij}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} x_{ij}$$

تتقاربان إلى  $x$  . برهنا حالاً على أن المتسلسلة المكررة تتقارب إلى  $z \cdot y$  وأن المتسلسلة القطرية كوشي للمتسلسلتين  $\sum (z_i)$  و  $\sum (y_i)$  وهو المطلوب إثباته

في حالة  $p = 1$  فقد برهن مرتنسى (\*) على أن التقارب المطلق لأحد المتسلسلتين يكون كافياً لإثبات التقارب لحاصل ضرب كوشي . وبالإضافة إلى ذلك وضح سيزارو أن المتوسطات الحسابية لحواصل الجمع الجزئية لحواصل ضرب كوشي تتقارب إلى  $yz$  (أنظر تمرين ٣٧ - س - ع) .

## تمريفات :

٣٦ - (أ) اعتبر المتسلسلة

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + + - \dots$$

حيث تؤخذ العلامات مثنى . هل تتقارب ؟

٣٦ - (ب) نفرض أن  $a_n \in \mathbb{R}$  عدد  $n \in \mathbb{N}$  ونفرض أن  $p < q$  . إذا كانت المتسلسلة  $\sum (a_n/n^p)$  تقاربية ، فإن المتسلسلة  $\sum (a_n/n^q)$  تكون أيضاً تقاربية .

٣٦ - (ج) إذا كانا  $p, q$  عددين موجبين مضبوطين ، فإن المتسلسلة

$$\sum (-1)^n \frac{(\log n)^p}{n^q}$$

تقاربية

٣٦ - (د) ناقص المتسلسلات الآتية إلى حدها النوني هو

$$\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \quad (\text{ب}) \quad (-1)^n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \quad (\text{أ})$$

$$\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \quad (\text{د}) \quad (-1)^n \frac{(n+1)^n}{n^n} \quad (\text{ج})$$

٣٦ - (هـ) بفرض أن  $\sum (a_n)$  متسلسلة تقاربية لأعداد حقيقية . أثبت أنه أما  $\sum (b_n)$

تتقارب أو أعط مثالا عكسياً ، عندما تعرف  $b_n$  بأنها

$$\sqrt{a_n}/n \quad (a_n \geq 0) \quad (\text{ب}) \quad a_n/n \quad (\text{أ})$$

$$\sqrt{a_n}/n \quad (a_n \geq 0) \quad (\text{د}) \quad a_n \sin n \quad (\text{ج})$$

$$a_n/(1+|a_n|) \quad (\text{و}) \quad n^{1/n} a_n \quad (\text{هـ})$$

٣٦ - (و) أثبت أن المتسلسلة

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + + - \dots$$

تباعدية .

(هـ) فرانز (س . ج) مرتنسى (١٨٤٠-١٩٢٧) تعلم في برلين ودوس في كراكوف وفيينا  
ساهم أساساً في الهندسة ونظرية العدد والجبر .

٣٦ - (ز) أسقط الفرض بأن  $(z_n)$  متناقصة أثبت أن اختيار المتسلسلة المتعاقبة  $(v - ٣٦)$  ربما يفشل .

٣٦ - (ح) إذا كانت  $n \in \mathbb{N}$  ، نفرض أن  $c_n$  معرفة بأنها

$$c_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$$

أثبت أن  $(c_n)$  متتابة متناقصة لأعداد موجبة . تسمى النهاية  $C$  هذه المتتابة بثابت أيلر ويساوى تقريباً 0.577 . أثبت أنه إذا وضعنا

$$b_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2n}$$

فإن المتتابة  $(b_n)$  تتقارب إلى  $\log 2$  ( ارشاد :  $b_n = c_{2n} - c_n + \log 2$  )

٣٦ - (ط) نفرض أن  $\sum (a_{mn})$  متسلسلة مزدوجة معطاة كما يل

$$\begin{array}{ll} m-n=1 & \text{إذا} \quad a_{mn}=+1 \\ m-n=-1 & \text{إذا} \quad =-1 \\ & \text{خلاف ذلك} \quad =0 \end{array}$$

أثبت أن كلا حاصلى الجمع المكررين موجودان ، لكنهما غير متساويين وأثبت أن حاصل الجمع المزدوج غير موجود . لكن ، إذا دلت  $(s_{mn})$  على حواصل الجمع الجزئية ، فإن  $\lim (s_{mn})$  موجودة .

٣٦ - (ي) أثبت أنه إذا كانت المتسلسلة المكررة والمتسلسلة المزدوجة المتسلسلة  $\sum (a_{mn})$  موجودتين فإنهما متساويان . أثبت أن وجود المتسلسلة المزدوجة لا يدل على وجود المتسلسلة المكررة ، في الحقيقة لا يدل وجود المتسلسلة المزدوجة حتى على أن  $\lim_n (a_{mn}) = 0$  لكل  $m$

٣٦ - (ك) أثبت أنه إذا كانت  $p > 1$  ،  $q > 1$  ، فإن المتسلسلة المزدوجة

$$\sum \left( \frac{1}{(m^2+n^2)^p} \right) \quad \text{و} \quad \sum \left( \frac{1}{m^p n^q} \right)$$

تكون تقاربية .

٣٦ - (ل) بتقسيم  $\sum (1/n^2)$  إلى متسلسلتين للأجزاء الفردية والزوجية أثبت أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

٣٦ - (م) إذا كانت  $|a| < 1$  و  $|b| < 1$  ، أثبت أن المتسلسلة

$$a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \dots$$

تقاربية . ماهى النهاية ؟

٣٦ - (ن) إذا كانت  $\sum (a_n^2)$  ،  $\sum (b_n^2)$  تقاربيتين ، فإن  $\sum (a_n b_n)$  تكون تقاربية مطلقة وأنه

$$\sum a_n b_n \leq \{ \sum a_n^2 \}^{1/2} \{ \sum b_n^2 \}^{1/2}$$

وبالإضافة إلى ذلك ، تتقارب  $\sum (a_n + b_n)^2$  ويكون

$$\{ \sum (a_n + b_n)^2 \}^{1/2} \leq \{ \sum a_n^2 \}^{1/2} + \{ \sum b_n^2 \}^{1/2}$$

٣٦ - (س) أثبتت نظرية مرتقس : إذا كانت  $\sum (a_n)$  تتقارب تقارباً مطلقاً إلى  $A$  كانت  $\sum (b_n)$  تتقارب إلى  $B$  ، فإن حاصل ضرب كوشي لها يتقارب إلى  $AB$  . (إرشاد : نفرض أنه يرمز لحواصل الجمع الجزئية بالرموز  $A_n, B_n, C_n$  على الترتيب أثبت أنه  $\lim (C_{2n+1} - A_n B_n) = 0$  و  $\lim (C_{2n} - A_n B_n) = 0$  )

٣٦ - (ع) أثبتت نظرية سيزارو : نفرض أن  $\sum (a_n)$  تتقارب إلى  $A$  وأن  $\sum (b_n)$  تتقارب إلى  $B$  . ونفرض أن  $\sum (c_n)$  حاصل ضرب كوشي لها . إذا كانت  $(C_n)$  هي المتتابعة لحواصل جمع جزئية من  $\sum (c_n)$  فإن .

$$\frac{1}{n} (C_1 + C_2 + \dots + C_n) \rightarrow AB$$

(إرشاد : اكتب  $C_1 + \dots + C_n = A_1 B_n + \dots + A_n B_1$  ، قسم هذا الجمع إلى ثلاثة أجزاء ، واستخدم الحقيقة التي تقول إن  $A_n \rightarrow A$  و  $B_n \rightarrow B$  )

## الباب السابع والثلاثون — متسلسلات دوال :

ستقوم الآن مناقشة المتسلسلات اللانهائية لدوال ، وذلك بسبب ظهورها المتكرر وأهميتها — بما أن التقارب لمتسلسلة لانهائية يعامل بفحص المتتابعة لحواصل جمع جزئية فإن الاستفسارات الخاصة بمتسلسلات الدوال تكون الإجابة عليها بفحص الاستفسارات المناظرة لمتتابعة دوال . ولهذا السبب ، يكون جزء من الباب الحاضر هو مجرد ترجمة لحقائق أثبتناها قبل ذلك لمتتابعات ودوال إلى مصطلحات ورموز للمتسلسلات . هذه هي الحالة ، مثال ذلك ، عند جزء الباب المتعلق بالمتسلسلات لدوال عامة . لكن تظهر فقط في الجزء الثاني من الباب ، حيث ننساقش متسلسلات القوى ، بعض صور جديدة بسبب الميزة الخاصة للدوال التي يحتويها .

٣٧ - ١ تعريف . إذا كانت  $(f_n)$  متتابعة لدوال معرفة في فئة جزئية  $D$  للفراغ  $R^p$  بقيم في الفراغ  $R^q$  ، وكانت المتتابعة لحواصل جمع جزئية  $(s_n)$  للمتسلسلة اللانهائية  $\sum (f_n)$  معرفة عند  $x$  في  $D$  بأنها



نصحه بمد ذلك إلى النظرية المناظرة المتعلقة بالتفاضل سنفترض هنا أن التقارب للمتسلسلة التي نحصل عليها بالتفاضل حداً فحداً للمتسلسلة المعطاة يكون منتظماً . هذه النتيجة هي نتيجة مباشرة لنظرية ٢٨ - ٥ .

٣٧ - ٥ نظرية . لكل  $n \in \mathbb{N}$  ، نفرض أن  $f_n$  دالة لقيم موجبة في الفترة  $J = [a, b]$  ولها مشتقة  $f'_n$  في  $J$  . نفرض أن المتسلسلة اللانهائية  $\sum (f_n)$  تقارب عند نقطة واحدة على الأقل من الفترة  $J$  وأن متسلسلة المشتقات  $\sum (f'_n)$  تقارب بانتظام في  $J$  . إذن توجد دالة حقيقية القيمة  $f$  في  $J$  بحيث أن  $\sum (f_n)$  تقارب بانتظام في  $J$  إلى  $f$  وبالإضافة إلى ذلك ، تكون  $f$  لها مشتقة في  $J$  وأن

$$f' = \sum f'_n \quad (37.3)$$

### اختبارات لتقارب منتظم :

بما أننا قد أثبتنا بعض نتائج لتقارب منتظم لمتسلسلات ، فسندعم الآن اختبارات قليلة يمكن استخدامها لإثبات تقارب منتظم .

٣٧ - ٦ معيار كوشي : نفرض أن  $(f_n)$  متتابعة لدوال في  $D \subseteq \mathbb{R}^p$  إلى  $\mathbb{R}^q$  . المتسلسلة النهائية  $\sum (f_n)$  تكون تقاربية منتظمة في  $D$  إذا وإذا فقط كان يوجد لكل  $\varepsilon > 0$  ،  $M(\varepsilon)$  بحيث أنه إذا كانت  $m \geq n \geq M(\varepsilon)$  فإن

$$\|f_n + f_{n+1} + \dots + f_m\|_D < \varepsilon \quad (37.4)$$

برهان هذه النتيجة ينتج في الحال من (١٧-١١) ، التي هي معيار كوشي المناظر للتقارب المنتظم لمتتابعات .

٣٧ - ٧ اختبار  $M$  لفيشرشواس . نفرض أن  $(M_n)$  متتابعة لأعداد حقيقية ليست سالبة بحيث أن  $\|f_n\|_D \leq M_n$  لكل  $n \in \mathbb{N}$  . إذا كانت المتسلسلة اللانهائية  $\sum (M_n)$  تقاربية ، فإن  $\sum (f_n)$  تكون تقاربية بانتظام في  $D$  .

البرهان . إذا كانت  $m > n$  ، فنحصل على العلاقة

$$\|f_n + \dots + f_m\|_D \leq \|f_n\|_D + \dots + \|f_m\|_D \leq M_n + \dots + M_m$$

ينتج النص من معيار كوشي (٣٤ - ٥) ، (٣٧ - ٦) والتقارب للمتسلسلة  $\sum (M_n)$  . وهو المطلوب إثباته .  
النتيجتان الآتيتان مفيدتان جداً لإثبات تقارب منتظم عندما يكون التقارب غير مطلق .  
نحصل على برهانها بتعديل برهاني (٣٦ - ٢) ، (٣٦ - ٤) وستوكان كثرين .

٣٧ - ٨ اختبار دوشلت . نفرض أن  $(f_n)$  متتابعة لدوال في  $D \subseteq \mathbb{R}^p$  إلى  $\mathbb{R}^q$

بحيث تكون جميع حواصل الجمع الجزئية

$$s_n = \sum_{j=1}^n f_j, \quad n \in \mathbb{N}$$

محدودة في نطاق  $D$  - عمودى . نفرض أن  $(\varphi_n)$  متتابعة متناقصة لدوال في  $D$  إلى  $R$  بحيث تتقارب بانتظام في  $D$  إلى صفر ، حينئذ تتقارب المتسلسلة  $\sum (\varphi_n f_n)$  بانتظام في  $D$  .

٣٧ - ٩ اختبار أبيل . نفرض أن  $\sum (f_n)$  متسلسلة دوال في  $D \subseteq R^p$  إلى  $R^q$  بحيث تتقارب بانتظام في  $D$  . نفرض أن  $(\varphi_n)$  متتابعة اطرادية لدوال حقيقية القيمة في  $D$  ومحدودة في النطاق  $D$  - العمودى . حينئذ تتقارب المتسلسلة  $\sum (\varphi_n f_n)$  بانتظام في  $D$  .

٣٧ - ١٠ أمثلة . (أ) اعتبر المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} (x^n/n^2)$  . إذا كانت  $|x| \leq 1$  ، فإن  $|x^n/n^2| \leq 1/n^2$  . بما أن المتسلسلة  $\sum (1/n^2)$  تقاربية ، فينتج من اختبار  $M$  لفيشر شتراس أن المتسلسلة المعطاة تقاربية منتظمة في الفترة  $[-1, 1]$  .

(ب) المتسلسلة التي حصلنا عليها بتفاضل المتسلسلة في (أ) حداً فحداً هي  $\sum_{n=1}^{\infty} (x^{n-1}/n)$  لا يستعمل الاختبار  $M$  لفيشر شتراس في الفترة  $[-1, 1]$  لذلك لا يمكننا استخدام نظرية (٣٧ - ٥) . في الحقيقة ، من الواضح أن هذه المتسلسلة للمشتقات لا تتقارب عند  $x = 1$  . لكن ، إذا كانت  $0 < r < 1$  ، فإن المتسلسلة الهندسية  $\sum (r^{n-1})$  تتقارب . بما أن

$$\left| \frac{x^{n-1}}{n} \right| \leq r^{n-1}$$

عند  $|x| \leq r$  ، فينتج من اختبار  $M$  أن المتسلسلة الناتجة من التفاضل تكون تقاربية منتظمة في الفترة  $[-r, r]$  .

(ج) تطبيق مباشر لاختبار  $M$  (حيث  $M_n = 1/n^2$ ) يثبت أن  $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) \sin nx$  تقاربية منتظمة لكل  $x$  في  $R$  .

(د) حيث أن المتسلسلة التوافقية  $\sum (1/n)$  تتباعد ، فلا يمكننا استخدام اختبار  $M$  إلى

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1/n) \sin nx \quad (37.5)$$

لكن ، ينتج من المناقشة في مثال (٣٦ - ٨ د) أنه إذا كانت الفترة  $J[a, b]$  محتواة في الفترة المفتوحة  $(0, 2\pi)$  ، فإن حواصل الجمع الجزئية  $s_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin kx$  تكون محدودة بانتظام في الفترة  $J$  . بما أن المتتابعة  $(1/n)$  تتناقص إلى صفر ، فيثبت اختبار درشلت (٣٧ - ٨) أن المتسلسلة (٣٧ - ٥) هي تقاربية منتظمة في  $J$  .

(هـ) اعتبر  $\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n/n) e^{-nx}$  في الفترة  $I = [0, 1]$  . بما أن العمود لحد النوف  $I$  هو  $1/n$  ، فلا يمكننا استخدام اختبار فيشر شتراس ، ويمكن استخدام اختبار درشلت



إذا أمكننا إثبات أن حواصل الجمع الجزئية  $\sum ((-1)^n e^{-nx})$  محدودة وبالتتابع يستخدم اختبار أبيل لأن  $\sum ((-1)^n/n)$  تقاربية والمتابعة المحدودة  $(e^{-nx})$  تتناقص باطراد في  $I$  ( لكن ليست تقاربية بانتظام إلى صفر ) .

### متسلسلات قوى :

سوف نتجه الآن لمناقشة متسلسلات قوى . هذا نوع هام من متسلسلات دوال ويتمتع بخواص ليست صحيحة في حالة متسلسلات عامة للدوال .

٣٧-١١ تعريف : يقال لمتسلسلة لدوال حقيقية  $\sum (f_n)$  إنها متسلسلة قوى حول  $x = c$  إذا كانت الدالة  $f_n$  في الصورة

$$f_n(x) = a_n(x-c)^n$$

حيث  $c$  و  $a_n$  تنتمي إلى  $R$  وحيث  $n = 0, 1, 2, \dots$  .

لغرض التبسيط لمفهومنا ، سنعتبر فقط الحالة عندما  $c = 0$  . هذا لا يفقد الحالة العامة ، مع ذلك ، لأن التمويض  $x' = x - c$  يحول متسلسلة قوى حول  $c$  إلى متسلسلة قوى حول  $0$  . أي أن عندما نذكر متسلسلة قوى ، فسوف نقصد متسلسلة في الصورة

$$(37.6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

وبالرغم من أن الدوال المذكورة في ( ٣٧ - ٦ ) معرفة على كل الفراغ  $R$  ، فليس من المتوقع أن تتقارب المتسلسلة ( ٣٧ - ٦ ) لجميع  $x$  في  $R$  . مثال ذلك ، يمكننا باستخدام اختبار النسبة ( ٣٥ - ٨ ) إثبات أن المتسلسلات

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$$

تتقارب عند  $x$  في الفئات

$$\{0\}, \quad \{x \in R : |x| < 1\}, \quad R$$

على الترتيب . أي أن الفئة التي فيها تتقارب متسلسلة قوى ربما تكون صغيرة ، متوسطة أو كبيرة . لكن ، لا يمكن لفئة جزئية اختيارية من  $R$  أن تكون الفئة الدقيقة التي فيها تتقارب متسلسلة قوى ، كما سنوضح .

إذا كانت  $(b_n)$  متتابعة محدودة لأعداد حقيقية غير سالبة ، فإننا نعرف النهاية الأعلى المتتابعة  $(b_n)$  بأن تكون الأدنى لأعداد مثل  $v$  بحيث أن  $b_n \leq v$  لكل  $n \in N$  كبيرة . كبيراً كافياً . يكون هذا الأدنى محددًا وحيداً . ويرمز له بالرمز

$$\limsup (b_n)$$

أعطيت بعض مميزات وخواص النهاية الأعلى لمتابعة في باب (١٨) ، لكن الشيء الذى نحتاج لمعرفته فقط هو (i) أنه إذا كانت  $v > \limsup (b_n)$  ، فإن  $b_n \leq v$  لكل  $n \in \mathbb{N}$  . كبيرة كبيراً كافياً ، (ii) أنه إذا كانت  $w < \limsup (b_n)$  فإن  $w \leq b_n$  قيم كثيرة عددها لانهاى  $n \in \mathbb{N}$

٣٧-١٢ تعريف . نفرض أن  $\sum (a_n x^n)$  متسلسلة قوى . إذا كانت المتابعة  $(|a_n|^{1/n})$  محدودة ، نضع  $\rho = \limsup (|a_n|^{1/n})$  ، إذا كانت هذه المتابعة ليست محدودة نضع  $\rho = +\infty$  . نعرف نصف قطر التقارب للمتسلسلة  $\sum (a_n x^n)$  كما يلي

$$\begin{array}{ll} \rho = +\infty & \text{إذا} \quad R = 0 \\ 0 < \rho < +\infty & \text{إذا} \quad = 1/\rho \\ \rho = 0 & \text{إذا} \quad = +\infty \end{array}$$

فترة التقارب هي الفترة المفتوحة  $(-R, R)$  .

سوف نبرر الآن التعبير « نصف قطر التقارب » .

٣٧-١٣ نظرية كوشي - هادامارد (\*) . إذا كان  $R$  نصف قطر التقارب للمتسلسلة القوى  $\sum (a_n x^n)$  ، فإن المتسلسلة تقاربية مطلقة إذا كانت  $|x| < R$  وتباعدية إذا كانت  $|x| > R$  .

البرهان . سوف نتناول فقط الحالة التى فيها  $0 < R < +\infty$  ، قارئين الحاليتين  $R = 0$  ،  $R = +\infty$  كتمرينين . إذا كانت  $|x| < R$  فإنه يوجد عدد موجب  $c < 1$  بحيث أن  $|x| < cR$  . إذن  $\rho < c/|x|$  ولذلك ينتج أنه إذا كانت  $n$  كبيرة كبيراً كافياً ، فإن  $|a_n|^{1/n} \leq c/|x|$  . هذا يكافئ النص

$$(37.7) \quad |a_n x^n| \leq c^n$$

لكل  $n$  كبيرة كبيراً كافياً . بما أن  $c < 1$  ، فينتج التقارب المطلق للمتسلسلة  $\sum (a_n x^n)$  من اختبار المقارنة (٣٥ - ١) .

إذا كانت  $|x| > R = 1/\rho$  ، فإنه توجد قيم كثيرة عددها لانهاى  $n \in \mathbb{N}$  التى عندها تكون  $|a_n|^{1/n} > 1/|x|$  . إذن  $|a_n x^n| > 1$  عند قيم  $n$  كثيرة عددها لانهاى ، ومن ثم لا تقرب المتتابعة  $(a_n x^n)$  إلى صفر . وهو المطلوب إثباته

(\*) چاكوز هادامارد (١٨٦٥-١٩٦٣) ، كان لوقت طويل عميداً للرياضيين الفرنسيين سمح له بالدخول لمدرسة التكنولوجيا حيث نال أعلى الدرجات خلال القرن الأول . كان خلفاً لهنرى بوينكار لأكاديمية العلوم وبرهن نظرية العدد الأولى فى عام ١٨٩٦ ، بالرغم من أن هذه النظرية قد أثبتتها جاوس قبله بسنين كثيرة ، له إسهامات أخرى فى نظرية العدد ، التحليل المركب ، المعادلات التفاضلية الجزئية وحتى علم النفس .

سلاحظ أن نظرية كوشي - هادامارد لاتنص عل ون متسلسلة القوى تتقارب عند  $|x| = R$  .  
في الحقيقة ، أى شئ يمكن يحدث كما يتضح من الأمثلة الآتية :

$$(37.8) \quad \sum x^n, \quad \sum \frac{1}{n} x^n, \quad \sum \frac{1}{n^2} x^n$$

بما أن  $\lim (n^{1/n}) = 1$  ( ١٤ - ٨ ) ، فإن كلا من متسلسلات القوى المذكورة لها نصف قطر التقارب مساو للواحد الصحيح . لا تتقارب متسلسلة القوى الأولى عند النقط  $x = +1$  و  $x = -1$  ، المتسلسلة الثانية تتقارب عند  $x = -1$  وتتباعد عند  $x = +1$  . ومتسلسلة القوى الثالثة تتقارب عند كل من  $x = -1$  ،  $x = +1$  . ( أوجد متسلسلة قوى فيها  $R = 1$  وتتقارب عند  $x = +1$  لكن تتباعد عند  $x = -1$  ) .

توضح كثيرين أن نصف قطر التقارب للمتسلسلة  $\sum (a_n x^n)$  هو

$$(37.9) \quad \lim \left( \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \right)$$

بشرط وجود هذه النهاية . مراً ، يكون من المناسب أكثر أن تستعمل ( ٣٧ - ٩ ) بدلا من تعريف ( ٣٧ - ١٢ ) .

يثبت النقاش المستعمل في برهان نظرية كوشي - هادامارد التقارب المنتظم لمتسلسلة قوى في أى فئة جزئية مدمجة ثابتة من فترة التقارب  $(-R, R)$

٣٧ - ١٤ نظرية . نفرض أن  $R$  نصف قطر التقارب للمتسلسلة  $\sum (a_n x^n)$  ونفرض أن  $K$  فئة جزئية مدمجة في فترة التقارب  $(-R, R)$  . إذن متسلسلة القوى تتقارب بانتظام في  $K$  .

البرهان : يثبت الدمج للمقدار  $K \subseteq (-R, R)$  أنه يوجد مقدار ثابت موجب  $c < 1$  بحيث أن  $|x| < cR$  لكل  $x \in K$  ، ( لماذا ؟ ) . نستنتج من النقاش الموجود في ( ٣٧ - ١٣ ) أنه عندما  $n$  تكون كبيرة كبراً كافياً ، فإن التقدير ( ٣٧ - ٧ ) يظل صحيحاً لجميع  $x \in K$  . بما أن  $c < 1$  ، فإن التقارب المنتظم للمتسلسلة  $\sum (a_n x^n)$  في  $K$  نتيجة مباشرة لاعتبار  $M =$  الفيرشتراس حيث  $M_n = c^n$  وهو المطلوب إثباته

٣٧ - ١٥ نظرية . نهاية متسلسلة القوى متصلة في فترة التقارب . متسلسلة قوى يمكن تكاملها حداً فحداً في أى فترة مدمجة محتواة في فترة التقارب .

البرهان . إذا كانت  $|x_0| < R$  ، فإن النتيجة السابقة تؤكد أن  $\sum (a_n x^n)$  تتقارب بانتظام في أى حوار مدمج عند  $x_0$  محتوى في  $(-R, R)$  . إذن ينتج الاتصال عند  $x_0$  من نظرية ( ٣٧ - ٢ ) ، والتكامل حداً فحداً يتحقق من نظرية ( ٣٧ - ٣ ) . وهو المطلوب إثباته .

نوضح الآن أن المتسلسلة قوى يمكن تفاضلها حدّاً فحدّاً . لا تحتاج كما هو الحال في حالة المتسلسلات العامة ، إلى فرض أن المتسلسلة الناتجة من التفاضل تقاربية منتظمة . ومن ثم هذه تكون النتيجة أقوى من النتيجة المناظرة لتفاضل المتسلسلات اللانهائية .

٣٧ - ١٦ نظرية تفاضل . يمكن تفاضل متسلسلة قوى يمكن حدّاً فحدّاً داخل فترة تقارب . في الحقيقة ، إذا كانت

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n) \quad \text{حيث} \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n a_n x^{n-1})$$

كلتا المتسلسلتين لها نفس نصف قطر التقارب .

البرهان . حيث أن  $\lim (n^{1/n}) = 1$  ، فإن المتتابة  $(|n a_n|^{1/n})$  تكون محدودة إذا وإذا فقط كانت المتتابة  $(|a_n|^{1/n})$  محدودة . وبالإضافة إلى ذلك ، يكون من السهل ملاحظة أن

$$\limsup (|n a_n|^{1/n}) = \limsup (|a_n|^{1/n})$$

وإذن ، يكون نصف قطر التقارب للمتسلسلتين واحداً ، لذلك تكون المتسلسلة السابقة الناتج من التفاضل تقاربية منتظمة في كل فئة جزئية مدمجة من فترة التقارب .

حيث يمكننا استخدام نظرية ( ٣٧ - ٥ ) لنستنتج أن المتسلسلة السابقة الناتجة من التفاضل تقارب إلى المشتقة للمتسلسلة المعطاة .

يجب ملاحظة أن النظرية لا تعطي تأكيداً عند النقطتين المحدودتين لفترة التقارب . إذا كانت المتسلسلة تقاربية عند نقطة حدودية ، فإن المتسلسلة الناتجة من التفاضل ربما تتقارب عند هذه النقطة . مثال ذلك ، المتسلسلة  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)$  تتقارب عند كل من النقطتين النهائيين  $x = -1$  ،  $x = +1$  . لكن ، المتسلسلة الناتجة من التفاضل

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m+1}$$

تقارب عند  $x = -1$  وتتباعد عند  $x = +1$  .

وبتكرار تطبيق النتيجة السابقة ، نستنتج أنه إذا كانت  $k$  أى عدد طبيعي فإن المتسلسلة القوى  $\sum_{n=0}^{\infty} (x^n/n^k)$  يمكن تفاضلها حدّاً فحدّاً  $k$  من المرات لنحصل على

$$(37.10) \quad \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$$

وبالإضافة إلى ذلك ، تتقارب هذه المتسلسلة تقارباً مطلقاً ومنتظماً إلى  $f^{(k)}$  عند  $|x| < R$  على أى فئة جزئية مدمجة من فترة التقارب .

إذا عرضنا  $x = 0$  في ( ٣٧ - ١٠ ) ، نحصل على القانون العام

$$(37.11) \quad f^{(k)}(0) = k! a_k.$$

٣٧-١٧ نظرية الانفرادية . إذا كانت  $\sum (a_n x^n)$  ،  $\sum (b_n x^n)$

تتقارب في فترة ما  $(-r, r)$  ،  $r > 0$  ، إلى نفس الدالة  $f$  ، فإن

$$n \in \mathbb{N} \quad \text{لجميع} \quad a_n = b_n$$

البرهان . توضح ملاحظتنا السابقة أن  $n! b_n = f^{(n)}(0) = n! a_n$  عند  $n \in \mathbb{N}$  . وهو المطلوب إثباته .

### بعض نتائج إضافية (\*) :

يوجد عدد من النتائج الخاصة بارتباطات جبرية مختلفة لمتسلسلات القوى . لكن يمكن برهنة هذه التي تحتوي على تعويض وتعاكس بسهولة أكثر باستخدام مناقشات من التحليل المركب . لهذا السبب سوف لا نعرض لهذه الأسئلة لكن نكتفي بنتيجة في هذا الاتجاه . وهي لحسن الحظ من أعظم النتائج المفيدة .

٣٧-١٨ نظرية حاصل ضرب . إذا كانت  $f$  و  $g$  معطيتين في الفترة  $(-r, r)$  ،  
بمتسلسلي القوى

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

فإن حاصل ضربهما يعطى في هذه الفترة بالمتسلسلة  $\sum (c_n x^n)$  ، حيث المعاملات  $(c_n)$  هي

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots$$

البرهان . قد رأينا في ( ٣٧ - ١٣ ) أنه إذا كانت  $|x| < r$  ، فإن المتسلسلتين المعطيتين  $f(x)$  و  $g(x)$  تقاربان مطلقان إذا استخدمنا نظرية ( ٣٦ - ١٣ ) ، نحصل على الاستنتاج المطلوب وهو المطلوب إثباته .

نؤكد نظرية حاصل الضرب أن نصف قطر التقارب لحاصل الضرب هو على الأقل يساوي  $r$  . لكن من الممكن أن يكون كبيراً كما يلاحظ بسهولة .

قد رأينا أنه ، لكي تمثل دالة  $f$  بمتسلسلة قوى في فترة  $(-r, r)$  ،  $r > 0$  ، يكون من الضروري أن كل مشتقات  $f$  موجودة في هذه الفترة . ربما يشتبه في أن هذا الشرط كافٍ أيضاً ، لكن

(\*) يمكن حذف بقية هذا الباب عند القراءة لأول مرة .

الأمور ليست بهذه البساطة . مثال ذلك ، الدالة  $f$  ، المعطاة بأنها

$$(37.12) \quad \begin{aligned} f(x) &= e^{-1/x^2}, & x &\neq 0 \\ &= 0, & x &= 0 \end{aligned}$$

يمكن إثبات ( انظر تمرين ٣٧ - ن ) أن لها مشتقات من كل الرتب وأن  $f^{(n)}(0) = 0$  عند  $n = 0, 1, 2, \dots$  . إذا مكن إعطاء  $f$  في فترة  $(-r, r)$  بمتسلسلة قوى حول  $x = 0$  ، فينتج من نظرية الانفردية (٣٧ - ١٧) أن المتسلسلة يجب أن تتلشى تطابقياً ، مما يخالف الحقيقة التي نقول إن  $f(x) \neq 0$  عندما  $x \neq 0$  .

توجد ، بالرغم من ذلك ، بعض شروط كافية مفيدة يمكن إعطاؤها لكي تضمن إمكانية تمثيل  $f$  بمتسلسلة قوى . كثال ، نلاحظ أنه ينتج من نظرية تايلور (٢٨ - ٦) أنه إذا كان يوجد مقدار ثابت  $B > 0$  بحيث أنه

$$(37.13) \quad |f^{(n)}(x)| \leq B$$

لجميع  $n = 0, 1, 2, \dots$  و  $|x| < r$  ، حينئذ  $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)x^n/n!$  تتقارب إلى  $f(x)$  عند  $|x| < r$  . يمكن إعطاء شروط مشابهة ( لكن أقل قوة ) على مقدار المشتقات بحيث تؤدي إلى نفس الاستنتاج .

نقدم كثال ، نتيجة مفيدة ودقيقة ترجع إلى سرجي برنشتين خاص بمفكوك طرف واحد . لدالة في صورة متسلسلة قوى .

٣٧ - ١٩ نظرية برنشتين . نفرض أن  $f$  معرفة ولها مشتقات من كل الرتب في الفترة  $[0, r]$  ونفرض أن  $f$  وجميع مشتقاتها موجبة في الفترة  $[0, r]$  .

إذا كانت  $0 \leq x < r$  ، فإن  $f(x)$  تعطى بالمفكوك .

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

البرهان . سوف نستفيد من صورة التكامل الباقي في نظرية تايلور المعطاة بالمعلقة (٣١ - ٣) . إذا كانت  $0 \leq x \leq r$  ، فإن

$$(37.14) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n$$

حيث نجد القانون

$$R_n = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^1 (1-s)^{n-1} f^{(n)}(sx) ds$$

بما أن كل الحدود في حاصل الجمع الموجود في (٣٧ - ١٤) موجبة فإن

$$(37.15) \quad f(r) \geq \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^1 (1-s)^{n-1} f^{(n)}(sr) ds$$

بما أن  $f^{(n+1)}$  موجبة ،  $f^{(n)}$  متزايدة في  $[0, r]$  ، لذلك إذا كانت  $x$  في هذه الفترة ، يكون

$$(37.16) \quad 0 \leq R_n \leq \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^1 (1-s)^{n-1} f^{(n)}(sr) ds$$

يربط ( ٣٧-١٥ ) ، ( ٣٧-١٦ ) ، نجد أن  $0 \leq R_n \leq (x/r)^{n-1} f(r)$  . ومن ثم إذا كانت  $0 \leq x < r$  فإن  $\lim (R_n) = 0$  وهو المطلوب إثباته .

قد رأينا في نظرية ( ٣٧ - ١٤ ) أن متسلسلة قوى تتقارب بانتظام في كل فئة جزئية مدمجة من فترة تقاربها . لكن ، لا يوجد شرط سابق يدعو للاعتقاد بأن هذه النتيجة يمكن امتدادها للنقط الطرفية لفترة التقارب . وبالرغم من ذلك ، توجد نظرية لأبل تقول إنه ، إذا كان تقارباً ممكنًا عند أي من النقطتين الطرفيتين ، فإن المتسلسلة تتقارب بانتظام خارجاً إلى هذه النقطة الطرفية .

لتبسيط التصور سوف نفرض أن نصف قطر التقارب للمتسلسلة يساوي الواحد الصحيح . وهذا لا يفقد الحالة العامة ويمكن دائماً إدراكها بجعل  $x' = x/R$  ، التي هي فقط تغيير المقياس .

٣٧ - ٢٠ نظرية آبل . نفرض أن متسلسلة القوى  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)$  تتقارب إلى  $f(x)$  عند  $|x| < 1$  وأن  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n)$  تتقارب إلى  $A$  . حينئذ ، متسلسلة القوى تتقارب بانتظام في الفترة  $I = [0, 1]$  ويكون

$$(37.17) \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = A$$

البرهان : يطبق اختبار آبل ( ٣٧ - ٩ ) ، حيث  $f_n(x) = a_n$  وحيث  $\varphi_n(x) = x^n$  لإثبات التقارب المنتظم للمتسلسلة  $\sum (a_n x^n)$  في  $I$  . ومن ثم فإن النهاية متصلة في  $I$  ، بما أنها تتفق مع  $f(x)$  عند  $0 \leq x < 1$  ، فنتج علاقة النهاية ( ٣٧ - ١٧ ) .  
وهو المطلوب إثباته .

أحد الأشياء المشوقة بدرجة كبيرة لهذه النتيجة هو إيمازها بطريقة ربط نهاية المتسلسلات ربما تكون تقاربية . أي أنه ، إذا كانت  $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n)$  متسلسلة لا نهاية ، فإنه يمكننا تكوين متسلسلة القوى المناظرة  $\sum (b_n x^n)$  . إذا كان المقدار  $b_n$  لايزداد بسرعة كبيرة ، فإن هذه متسلسلة القوى تتقارب إلى دالة  $B(x)$  عندما  $|x| < 1$  . إذا كانت  $B(x) \rightarrow \beta$  عندما  $x \rightarrow 1^-$  فنقول إن المتسلسلة  $\sum (b_n)$  هي قابلة لجمع آبل إلى  $\beta$  . هذا النموذج من الجمع يكون مشابهاً إلى ( لكن أكثر قوة عن ) طريقة سيزارو للمتوسط الحسابي المشار إليه في باب ١٩ وله نتائج عميقة ومشوقة . مضمون نظرية آبل ( ٣٧ - ٢٠ ) يشابه نظرية ( ١٩ - ٣ ) ، وهو يثبت أنه إذا

كانت متسلسلة تقاربية من قبل ، فإنها تكون قابلة لجمع آبل إلى نفس النهاية. العكس ليس صحيحاً ، لكن ، المتسلسلة  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$  ليست تقاربية لكن حيث أن

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

فينتج أن  $\sum (-1)^n$  قابل لجمع آبل إلى  $\frac{1}{2}$  .

يحدث أحياناً أنه إذا كانت متسلسلة معرفة بأنها قابلة لجمع آبل ، وإذا تحققت شروط أخرى معينة ، فإنه من الممكن البرهنة على أن المتسلسلة تقاربية بالفعل . تسمى نظريات من هذا النوع بنظريات توبريان وهي غالباً عميقة وصعبة البرهان . هذه النظريات مفيدة أيضاً لأنها تمكن الشخص من الانتقال من نموذج أضعف للتقارب إلى نموذج أقوى ، بشرط تحقق فروض إضافية معينة .

نظريتنا النهائية هي النتيجة الأولى من هذا النوع وقد برهنت بواسطة أ. توبر (\*) في ١٨٩٧ . وتمدنا بعكس جزئاً لنظرية آبل .

٣٧ - ٣١ نظرية توبر . نفرض أن متسلسلة القوى  $\sum (a_n x^n)$  تتقارب إلى  $f(x)$  عند  $|x| < 1$  ونفرض أن  $\lim (na_n) = 0$  . إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = A$  عند  $x \rightarrow 1$  فإن المتسلسلة  $\sum (a_n)$  تتقارب إلى  $A$  .

البرهان . من المرغوب فيه تقدير الاختلافات مثل  $\sum_{n=0}^N (a_n) - A$  . لإجراء هذا ، نكتب

$$(37.18) \quad \sum_{n=0}^N a_n - A = \left\{ \sum_{n=0}^N a_n - f(x) \right\} + \{f(x) - A\} \\ = \sum_{n=0}^N a_n (1 - x^n) - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n + \{f(x) - A\}$$

بما أن  $0 \leq x < 1$  ، فنحصل  $1 - x^n = (1-x)(1+x+\dots+x^{n-1}) < n(1-x)$  ، لذلك يمكننا سيطرة الحد الأول في الطرف الأيمن بالتعبير  $\sum_{n=0}^N na_n (1-x)$

من الفرض  $\lim (na_n) = 0$  ومن ثم تثبت نظرية (٣ - ١٩) أن

$$\lim \left( \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m na_n \right) = 0$$

وبالإضافة إلى ذلك ، نحصل على القانون  $A = \lim f(x)$

(\*) الفريد توبر ( ١٨٦٦ - تقريباً ١٩٤٧ ) كان استاذاً بفيينا . له مساهمات أساسية في التحليل .



نفرض الآن أن  $\varepsilon > 0$  معطاة ونختار عدداً طبيعياً ثابتاً  $N$  بحيث تكون كبيراً بدرجة تسمح بكون

$$(i) \left| \sum_{n=0}^N na_n \right| < (N+1)\varepsilon;$$

$$(ii) |a_n| < \frac{\varepsilon}{N+1} \quad \text{for all } n \geq N;$$

$$(iii) |f(x_0) - A| < \varepsilon \quad \text{for } x_0 = 1 - \frac{1}{N+1}$$

سوف نقدر مقدار  $(18-37)$  لهذه القيمة لعدد  $N$ ،  $x_0$  من (i) و (ii) و (iii) وحقيقة أن  $(1-x_0)(N+1) = 1$  نحصل على التقدير

$$\left| \sum_{n=0}^N a_n - A \right| \leq (1-x_0)(N+1)\varepsilon + \frac{\varepsilon}{N+1} \frac{x_0^{N+1}}{1-x_0} + \varepsilon < 3\varepsilon$$

بما أن هذه يمكن إجراؤها لكل  $\varepsilon > 0$  فهذا يثبت التقارب للمتسلسلة  $\sum (a_n)$  إلى  $A$ .

### تمرينات :

٣٧ - (أ) ناقش التقارب والتقارب المنتظم للمتسلسلة  $\sum (f_n)$ ، حيث  $f_n(x)$  معطاة كما يلي :

$$\begin{array}{lll} (i) & (x^2+n^2)^{-1}, & (ب) \quad (nx)^{-2}, x \neq 0 \\ (ج) & \sin(x/n^2), & (د) \quad (x^n+1)^{-1}, x \geq 0 \\ (أ) & x^n(x^n+1)^{-1}, x \geq 0 & (و) \quad (-1)^n(n+x)^{-1}, x \geq 0 \end{array}$$

٣٧ - (ب) إذا كانت  $\sum (a_n)$  متسلسلة تقاربية مطلقة، فإن المتسلسلة  $\sum (a_n \sin nx)$  تكون تقاربية مطلقة ومنتظمة.

٣٧ - (ج) نفرض أن  $(c_n)$  متتابة متناقصة لأعداد موجبة. إذا كانت المتسلسلة  $\sum (c_n \sin nx)$  تقاربية منتظمة، فإن  $\lim (nc_n) = 0$

٣٧ - (د) أعط التفاصيل لبرهان اختبار درشلت (٣٧-٨).

٣٧ - (هـ) أعط التفاصيل لبرهان اختبار آبل (٣٧-٩).

٣٧ - (و) ناقش الحالتين  $R=0$ ,  $R=+\infty$  في نظرية كوشي - هادامارد (٣٧-١٢).

٣٧ - (ز) أثبت أن نصف قطر التقارب  $R$  لمتسلسلة القوى  $\sum (a_n x^n)$  معطى بأنه  $\lim (|a_n|/|a_{n+1}|)$ ، طالما وجدت هذه النهاية. أعط مثالا لمتسلسلة قوى منها هذه النهاية غير موجودة.

٣٧ - (ح) حدد نصف قطر التقارب المتسلسلة  $\sum (a_n x^n)$  ، حيث  $a_n$  مطابقة كما يلي :

$n^n/n!$	(ب)	$1/n^n$	(أ)
$(\log n)^{-1}$ , $n \geq 2$	(د)	$n^n/n!$	(ج)
$n^{-n}$	(و)	$(n!)^2/(2n)!$	(هـ)

٣٧ - (ط) إذا كانت  $a_n = 1$  حيث  $n$  هي مربع عدد طبيعي وأن  $a_n = 0$  فيما عدا ذلك ، أوجد نصف قطر التقارب للمتسلسلة  $\sum (a_n x^n)$  . إذا كانت  $b_n = 1$  عندما  $n = m!$  حيث  $m \in \mathbb{N}$  وأن  $b_n = 0$  فيما عدا ذلك ، أوجد نصف قطر التقارب للمتسلسلة  $\sum (b_n x^n)$

٣٧ - (ي) أثبت بتفاصيل أن  $\limsup (|na_n|^{1/n}) = \limsup (|a_n|^{1/n})$

٣٧ - (ك) إذا كانت  $0 < p \leq |a_n| \leq q$  لكل  $n \in \mathbb{N}$  ، أوجد نصف قطر التقارب للمتسلسلة  $\sum (a_n x^n)$  .

٣٧ - (ل) - نفرض أن  $f(x) = \sum (a_n x^n)$  عند  $|x| < R$  . إذا كانت  $f(x) = f(-x)$  لجميع  $|x| < R$  ، أثبت أن  $a_n = 0$  لجميع قيم  $n$  الفردية .

٣٧ - (م) - أثبت أنه إذا كانت  $f$  معرفة عند  $|x| < r$  وإذا كان يوجد مقدار ثابت  $B$  بحيث أن  $|f^{(n)}(x)| \leq B$  لكل  $|x| < r$  وأن  $n \in \mathbb{N}$  ، فإن مفكوك متسلسلة تايلور .

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

تقارب إلى  $f(x)$  عندما  $|x| < r$  .

٣٧ - (ن) أثبت بالاستنتاج أن للدالة المعطاة في قانون (٣٧ - ١٢) مشتقات من كل الرتب عند كل نقطة وأن كلا من هذه المشتقات تنعدم عند  $x = 0$  . حينئذ لا تغطي هذه الدالة مفكوك تايلور عند  $x = 0$  .

٣٧ - (س) أعط مثالا لدالة تكون مساوية إلى مفكوك متسلسلتها تايلور حول  $x = 0$  عند  $x \geq 0$  ، لكنها ليست مساوية لهذه المفكوك عند  $x < 0$  .

٣٧ - (ع) توضح المناقشة المبينة في تمرين ٢٨ - م أن قانون لاجرانج للباقي يمكن استخدامه لإثبات مفكوك ذات الحدين العام

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n$$

حيث  $x$  هي في الفترة  $0 \leq x < 1$  . بالمثل يثبت تمرين (٢٨ - ن) . صحة هذا المفكوك عندما  $0 \leq x < 1$  ، لكن الاستدلال يكون مبنياً على صورة كوشي للباقي وأحياناً أكثر تورطاً . يطبق نظرية برنشتين على  $g(x) = (1-x)^m$  عند  $0 \leq x < 1$  للحصول على برهان تبادل لهذه الحالة الثانية .

٣٧ - (ف) اعتبر مفكوك ذات الحدين عند النقطتين الطرفيتين  $x = \pm 1$  . أثبت أنه إذا كانت  $x = -1$  ، فإن المتسلسلة تتقارب مطلقاً عندما  $m \geq 0$  وتتباع عندما  $m < 0$  . إذا كانت  $x = +1$  ، فإن المتسلسلة تتقارب مطلقاً عندما  $m \geq 0$  ، وتتقارب شرطياً عندما  $-1 < m < 0$  ، وتتباع عندما  $m \leq -1$  .

٣٧ - (ص) يفرض أن  $f(x) = \tan x$  عندما  $|x| < \pi/2$  . استخدم الحقيقة التي تقول أن  $f$  فردية ونظرية برنشتين لإثبات أن  $f$  مطاة في هذه الفترة بمفكوك متسلسلة تايلور لها حول  $x = 0$  .

٣٧ - (ق) استخدم نظرية آبل لإثبات أنه إذا كانت  $f(x) = \sum (a_n x^n)$  عند  $|x| < R$  فإن

$$\int_0^R f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$$

بشرط كون المتسلسلة الموجودة في الطرف الأيمن تقاربية حتى ولو أن المتسلسلة الأصلية ربما لا تكون تقاربية عند  $x = R$  . ومن ذلك ينتج أن

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

٣٧ - (ر) باستخدام نظرية آبل ، أثبت أنه إذا كانت المتسلسلتان  $\sum (a_n)$  و  $\sum (b_n)$  تقاربيتين وإذا كان حاصل ضرب كوشي لهما  $\sum (c_n)$  تتقارب ، فنجد أن  $\sum (c_n) = \sum (a_n) \cdot \sum (b_n)$  .  
٣٧ (ش) - نفرض أن  $a_n \geq 0$  وأن نصف قطر التقارب للمتسلسلة  $f(x) = \sum (a_n x^n)$  هو ١ . إذا كانت  $\sum (a_n)$  تتباع ، أثبت أن  $f(x) \rightarrow +\infty$  عند  $x \rightarrow 1^-$  . استخدم هذه النتيجة لإثبات نظرية توبريان الأولية : أي إذا كانت  $a_n \geq 0$  وإذا كانت

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum a_n x^n$$

فإن  $\sum (a_n)$  تتقارب إلى  $A$  .

٣٧ - (ت) نفرض أن  $\sum_{n=0}^{\infty} (p_n)$  متسلسلة تباعدية لأعداد موجبة بحيث أن نصف قطر التقارب للمتسلسلة  $\sum (p_n x^n)$  يساوى واحداً . أثبت نظرية آبل (\*) : إذا كانت  $s = \lim (a_n/p_n)$  فإن نصف قطر التقارب للمتسلسلة  $\sum (a_n x^n)$  يساوى أيضاً واحداً ويكون

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sum a_n x^n}{\sum p_n x^n} = s$$

(\*) بول آبل ( ١٨٥٥ - ١٩٣٠ ) كان تلميذا لهرميت في السربون . قدم أبحاثاً في التحليل المركب .

( إرشاد : يمكن اعتبار الحالة التي فيها  $s = 0$  أيضاً استخدم حقيقة أن  $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sum (p_n x^n)]^{-1} = 0$  )

٣٧ - (ث) استخدم نظرية آبل عندما  $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)$  للحصول على نظرية آبل .

٣٧ - (خ) إذا كانت  $(a_n)$  متتابعة لأعداد حقيقية وكانت  $a_0 = 0$  ، نفرض أن  $s_n = a_1 + \dots + a_n$  وبفرض أن  $\sigma_n = (s_1 + \dots + s_n)/n$  . أثبت نظرية فروبينوس (\*\*)

إذا كانت  $s = \lim (\sigma_n)$  فإن

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

ملاحظة . بلغة المصطلحات الرياضية لنظرية القابلية لجمع ، تقول هذه النتيجة أنه إذا كانت متتابعة  $(a_n)$  قابلة لجمع سيزارو إلى  $s$  ، فتكون أيضاً قابلة لجمع آبل إلى  $s$  . ( إرشاد : طبق نظرية آبل على  $p(x) = (1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$  ) . لاحظ أن  $\sum (n \cdot \sigma_n x^n) = p(x) \sum (a_n x^n)$  .

### مشروعات :

٣٧ (أ) - تمتد نظرية متسلسلات القوى المذكورة في الكتاب إلى متسلسلات قوى مركبة .

(أ) حسب الملاحظات الموجودة في باب (١٣) ، تكون كل التعريفات والنظريات ذات الدلالة والصحيحة للمتسلسلات في  $R^2$  صحيحة أيضاً للمتسلسلات بعناصر في  $C$  . بوجه خاص تمتد النتائج المتعلقة بالتقارب المطلق حالاً .

(ب) افحص النتائج المتعلقة بإعادة نظام الترتيب وحاصل ضرب كوشي للفتة لرؤية امتدادها إلى  $C$  .

(ج) أثبت أن اختبارات المقارنة والجلور والنسبة تمتد إلى  $C$  .

(د) تفرض أن  $R$  هو نصف قطر التقارب لتسلسلة القوى المركبة .

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

أثبت أن المتسلسلة تتقارب مطلقاً إذا كان  $|z| < R$  . وتتقارب بانتظام في أي فتة جزئية مدمجة للفتة  $\{z \in C : |z| < R\}$  .

(أ) نفرض أن  $g$  و  $f$  دالتان معرفتان عند  $D = \{z \in C : |z| < r\}$  بقيم في  $C$  ونفرض أن الدالتين نهايتان في  $D$  لمتسلسلتين قوى . وضع أنه إذا كانت  $g$  و  $f$  تتفقان مع  $D \cap R$  فإنهما يتفقان مع كل  $D$  .

(و) أثبت أن متسلسلي قوى في  $C$  يمكن ضربهما معاً داخل دائرة التقارب المشتركة لهما .

٣٧ - (ب) نعرف في هذا المشروع الدالة الأسية بدلالة متسلسلة قوى ولإجراء هذا ، سنعرضها لأعداد مركبة وكذلك لأعداد حقيقية .

(\*\*) جورج فروبينوس ( ١٨٤٩ - ١٩١٧ ) كان أستاذاً في برلين وهو معروف بأبحاثه في الجبر والتحليل .

(أ) نفرض أن  $E$  معرفة عند  $z \in C$  بالمتسلسلة

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

أثبت أن المتسلسلة تقاربية مطلقة لكل  $z \in C$  وتقاربية منتظمة في أي فئة جزئية محدودة من  $C$ .

(ب) أثبت أن  $E$  دالة متصلة في  $C$  إلى  $C$ ، أن  $E(0) = 1$ ، وأن

$$E(z+w) = E(z)E(w)$$

لقيم  $z, w$  في  $C$ . (إرشاد: نظرية ذات الجدين لأجل  $(z+w)^n$  تظل صحيحة عندما  $z, w \in C$  و  $n \in N$ )

(ج) إذا كان  $x, y$  عددين حقيقيين، فنعرف  $E_1$  و  $E_2$  بأنها  $E_1(x) = E(x)$

و  $E_2(y) = E(iy)$  ومن ثم  $E(x+iy) = E_1(x)E_2(y)$ . أثبت أن  $E_1$  تأخذ فقط قيما حقيقية

لكن  $E_2$  لها بعض قيم غير حقيقية. تعرف  $C$  و  $S$  في  $R$  إلى  $R$  بما يلي

$$C(y) = \operatorname{Re} E_2(y), \quad S(y) = \operatorname{Im} E_2(y)$$

عند  $y \in R$  أثبت أن

$$C(y_1+y_2) = C(y_1)C(y_2) - S(y_1)S(y_2),$$

$$S(y_1+y_2) = S(y_1)C(y_2) + C(y_1)S(y_2)$$

(د) أثبت أن للمتسلسلتين  $C$  و  $S$  المعرفتين في (ج)، مفكوكي المتسلسلة الآتيتين

$$C(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!}, \quad S(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(هـ) أثبت أن  $C' = -S$  و  $S' = C$ . ومن ثم أثبت أن  $(C^2 + S^2)' = 2CC' + 2SS' = 0$

التي تدل على أن  $C^2 + S^2$  تساوي الواحد الصحيح تطابقاً. تدل هذه في الحالة الخاصة على أن كلا من  $C$  و  $S$  محدود لقيمتهم المطلقة بالواحد الصحيح.

(و) استنبط أن الدالة  $E_2$  في  $R$  إلى  $C$  تحقق  $E_2(0) = 1$ ,  $E_2(y_1+y_2) = E_2(y_1)E_2(y_2)$

ومن ثم أثبت أن  $|E_2(y)| = 1$  و  $E_2(-y) = 1/E_2(y)$  لجميع  $y$  في  $R$ .

## الباب الثاني والثلاثون — متسلسلة فوريير :

سنعطي الآن تعريف متسلسلة فوريير (\*) لدالة قطعية متصلة دورتها  $2\pi$ . مع أن مناقشتنا

(\*) (ج - ب) جوزيف فوريير (1768 - 1830) كان الابن لخيالط فرنسي. تعلم في دير. تركه ليرتبط في حركات ثورية ورياضية. رافق نابليون إلى مصر في عام 1798 وتعين فيها بعد كأكبر ضابط لقسم أبزيري في جنوب فرنسا. عمل أثناء هذا الوقت في أعظم موهبته المشهورة: وهي النظرية الرياضية للحرارة. كان بحثه نقطة بارزة في رياضيات الطبيعة وكان لعمله تأثير يفوق تأثير معاصريه على المعتمدين حتى وقتنا الحاضر.

ستكون مختصرة ، فسوف نقدم نظريات التقارب الرئيسية والمرتبطة بمتسلسلة فوريير . لهذه النظريات أهمية ستحق الاعتبار في التحقيق وتطبيقات في الفيزياء .

سنفترض فيما يلي أن الدالة  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  دورة  $2\pi$  ، أى أن  $f(x+2\pi)=f(x)$  لكل  $x \in \mathbf{R}$  . سنفترض أيضاً أن الدالة  $f$  قطعية متصلة ، بمعنى أن  $f$  متصلة ماعدا إمكانية وجود عدد محدود من نقط  $x_1, \dots, x_r$  في أى فترة طولها  $2\pi$  ، والتي عندها تكون للدالة  $f$  نهايتها طرف أيسر وأيمن .

$$f(x_i -) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_i - h), \quad f(x_i +) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_i + h).$$

يرمز لفئة كل الدوال  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  ذات دورة تساوى  $2\pi$  وقطعية متصلة بالرمز  $PC(2\pi)$  لاحظنا حالاً أن هذه الفئة هي متجه فراغ تحت العمليات :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (cf)(x) = cf(x), \quad x \in \mathbf{R}$$

بسبب دورية الدالة ( $f \in PC(2\pi)$ ) يكون من الضروري فقط فحص  $f$  في فترة طولها  $2\pi$  ، فثلاً نجد أن

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_c^{c+2\pi} f(x) dx$$

لأى  $c \in \mathbf{R}$  .

في الفراغ  $PC(2\pi)$  سوف نهم بالعمودين

$$\|f\|_{\infty} = \sup \{ |f(x)| : x \in [-\pi, \pi] \}, \quad \|f\|_2 = \left( \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx \right)^{1/2}$$

المعرفين جيداً لأن دالة في  $PC(2\pi)$  تكون محدودة وقابلة لتكامل ريمان يمكن توضيح كثرين أولى إنه إذا كانت  $f \in PC(2\pi)$  ، فإن

$$(38.1) \quad \|f\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \|f\|_{\infty}$$

ينتج من هذه المتباينة أن تقارباً في العمود  $\|\cdot\|_{\infty}$  ( أى تقارب منتظم ) يثبت تقارباً في العمود  $\|\cdot\|_2$  . ( أى تقارب متوسط المربع ) . لكن ، العكس ليس صحيحاً . ( انظر تمرين ( ٣١ - ح ، ٢٨ - ل ) .

٣٨ - ١ تعريف . إذا كانت  $f \in PC(2\pi)$  ، فإن معاملات فوريير للدالة  $f$  هي الأعداد  $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$  المعرفة كما يلي

$$(38.2) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt$$

فقص بمتسلسلة فوريير للدالة  $f$  المتسلسلة

$$(38.3) \quad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

لكي نشير إلى ربط متسلسلة فوريير ( ٣٨ - ٣ ) بالدالة  $f$  ، نكتب غالباً

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

لكن يجب التأكيد على أن هذه الكتابة لا يقصد بها الإيحاء بأن متسلسلة فوريير تتقارب إلى  $f(x)$  عند أى نقطة خاصة  $x$  . توجد في الحقيقة دوال متصلة بدورة  $2\pi$  والتي تكون متسلسلات فوريير لها تباعدية عند نقط كثيرة عددها لانهاى . ( انظر برك هيل ، صفحة ٣١٧ ، هويت / وروس ، صفحة ٣٠٠ ) .

٣٨ - ٢ أمثلة . ( أ ) نفرض أن  $f_1 \in PC(2\pi)$  معرفة في  $[-\pi, \pi]$  بأنها  $f_1(x) = -1$  عند  $-\pi < x < 0$  و  $f_1(x) = +1$  عند  $0 \leq x \leq \pi$  . توضيح كتمرين أن متسلسلة فوريير عند  $f_1$  هي

$$\frac{4}{\pi} \left[ \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right]$$

سيبرهن فيما بعد أن هذه المتسلسلة لفوريير تتقارب في الحقيقة إلى  $f_1$  عندما  $0 < |x| < \pi$  ، لكن لا تتقارب إلى  $f_1$  عندما  $x = 0, \pm \pi$  ( لماذا ؟ ) . لاحظ أن  $f_1$  قطعية متصلة ، لكنها ليست متصلة عند نقط الفئة  $\{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$

( ب ) نفرض أن  $f_2 \in PC(2\pi)$  معرفة في  $[-\pi, \pi]$  بأنها  $f_2(x) = |x|$  . توضيح كتمرين أن متسلسلة فوريير عند  $f_2$  هي

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[ \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right]$$

من الواضح أن هذه المتسلسلة تتقارب بانتظام في  $\mathbb{R}$  وسنثبت أسفل أنها تتقارب إلى  $f_2$  .

( ج ) بفرض أن  $f \in PC(2\pi)$  زوجية ، أى أن  $f(-x) = f(x)$  لكل  $x \in \mathbb{R}$  . مثل هذه الدالة تكون معاملات فوريير  $b_n = 0$  عند  $n = 1, 2, \dots$  بينما

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

( لاحظ أن الدالة الموجودة في ( ب ) زوجية ) .

( د ) نفرض أن  $g \in PC(2\pi)$  فردية ، أى أن  $g(-x) = -g(x)$  لكل  $x \in \mathbb{R}$  . مثل هذه الدالة تكون معاملات فوريير  $a_n = 0$  عند  $n = 0, 1, 2, \dots$  بينما

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(t) \sin nt \, dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

( لاحظ أن الدالة الموجودة في (أ) فردية ) .

( ب ) نفرض أن  $f$  متصلة في  $R$  ودورتها هي  $2\pi$  ونفرض أن مشتقتها  $f'$  هي قطعة متصلة في  $R$  ( بدورة  $2\pi$  ) . سوف نربط معاملات فوريير  $a_n, b_n$  للدالة  $f$  مع معاملات فوريير  $a'_n, b'_n$  للدالة  $f'$  عند  $n = 1, 2, \dots$  في الحقيقة ، من التكامل بالتجزئ نجد أن

$$\begin{aligned} a'_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos nt \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ f(t) \cos nt \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (-n) \sin nt \, dt \right]. \end{aligned}$$

إذا استعملنا الحقيقة التي تقول إن  $f(t) \cos nt \rightarrow f(t) \cos nt$  لها دورة  $2\pi$  نجد أن الحد الأول يتقدم وكذلك  $a'_n = nb_n$  عند  $n = 1, 2, \dots$  . بالمثل يتضح أن  $b'_n = -na_n$  عند  $n = 1, 2, \dots$  ( نلاحظ أنه إذا كانت  $f_1, f_2$  هي الدالتان الموجودتان في (أ) ، (ب) فإن  $f_1(x) = f_2(x)$  عند  $x \notin \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$  ، وأن معاملات فوريير للدالتين  $f_1$  و  $f_2$  عند  $n = 1, 2, \dots$  تحقق العلاقات الموجودة أعلاه ) .

سوف نحسب في المفترض الآتي مربع المسافة بالنسبة للمود  $\| \cdot \|_2$  من  $f$  في  $PC(2\pi)$  إلى دالة اختيارية  $T_n$  تكون على الصورة

$$(38.4) \quad T_n(x) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

تسمى مثل هذه الدالة أحياناً بكثيرة الحدود المثلثية من درجة  $n$  . لإجراء هذه الحسابات يكون من المفيد وجود هذه العلاقات

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos kx)^2 \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} (\sin kx)^2 \, dx = \pi, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, dx = 0, \quad k, n \in \mathbb{N}, k \neq n, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mx \, dx &= 0, \quad k, m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

٢٨-٣ مفترض . إذا كانت  $f \in PC(2\pi)$  وكانت  $T_n$  كثيرة حدود مثلثية من درجة  $n$  [ أي أن  $T_n$  تكون في الصورة (٣٨-٤) ] ، فإن

$$\begin{aligned} (38.5) \quad \|f - T_n\|_2^2 &= \|f\|_2^2 - \pi \left\{ \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right\} \\ &\quad + \pi \left\{ \frac{1}{2}(\alpha_0 - a_0)^2 + \sum_{k=1}^n [(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2] \right\} \end{aligned}$$

حيث  $a_k, b_k$  تشير إلى أن معاملات فوريير للدالة  $f$  .



البرهان . لدينا

$$\begin{aligned}\|f - T_n\|_2^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - T_n(t)]^2 dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(t)]^2 dt - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(t) T_n(t) dt + \int_{-\pi}^{\pi} [T_n(t)]^2 dt.\end{aligned}$$

من السهل الآن ملاحظة أن

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) T_n(t) dt &= \frac{1}{2} \alpha_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \beta_k \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt\end{aligned}$$

$$= \pi \left\{ \frac{1}{2} \alpha_0 a_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k a_k + \beta_k b_k) \right\}$$

وبالإضافة إلى ذلك ، باستخدام العلاقات المذكورة أعلى يتضح أن

$$\int_{-\pi}^{\pi} [T_n(t)]^2 dt = \pi \left\{ \frac{1}{2} \alpha_0^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \right\}$$

إذا أدمجنا هاتين العلاقتين مع القانون الأول وجمعنا وطرحنا  $\pi \left\{ \frac{1}{2} \alpha_0^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \right\}$  نحصل على القانون ( ٣٨ - ٥ ) . وهو المطلوب إثباته .

ويفسر مفترض ( ٣٨ - ٣ ) « هندسياً » بالتفسير الهام الآتى : بين كل كثيرات الحدود المثلثية  $T_n$  من درجة  $n$  ، تكون كثيرة الحدود المثلثية التى تجعل التعبير  $\|f - T_n\|_2^2$  فى نهاية صفرى محدودة وحيدة ويحصل عليها باختيار المعاملات  $\alpha_k, \beta_k$  كمعاملات فوريير  $a_k, b_k$  للدالة  $f$  ،  $k = 0, 1, \dots, n$  . إذا رمزنا إلى هذه كثيرة الحدود المثلثية التى تجعل التعبير السابق فى نهاية صفرى بالرمز  $S_n(f)$  ، فإن

$$(38.6) \quad S_n(f)(x) = \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

هو حاصل الجمع الجزئى التوفى لمتسلسلة فوريير للدالة  $f$  ويثبت قانون ( ٣٨ - ٥ ) أن

$$(38.7) \quad \|f - S_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \pi \left\{ \frac{1}{2} \alpha_0^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \right\}$$

بالاستفادة من تمرين ( ٢٦ - و ) يمكننا أن نوضح أن

$$(38.8) \quad \lim_n \|f - S_n(f)\|_2 = 0$$

لكل دالة متصلة دورتها  $2\pi$  . لكن ، بما أن ذلك التمرين هو نتيجة لتحليل يسترعى الاعتبار ونفضل استنتاج هذه النتيجة مباشرة . سوف نحتاج لإجراء هذا للنتيجتين الآتيتين .

٣٨ - ٤ متباينة بسل . إذا كانت  $f \in PC(2\pi)$  ، فإن

$$(38.9) \quad \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \|f\|_2^2.$$

البرهان . إذا كانت  $n \in \mathbb{N}$  اختيارية ، فينتج من ( ٣٨ - ٧ ) أن

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \|f\|_2^2.$$

ومن ثم تكون حواصل الجمع الجزئية لمتسلسلة الموجودة في الطرف الأيسر من ( ٣٨ - ٩ ) محدودة من أعلى . بما أن الحدود كلها موجبة ، فإن هذه المتسلسلة تقاربية وأن ( ٣٨ - ٩ ) تظل صحيحة . وهو المطلوب إثباته .

النتيجة الآتية هي حالة خاصة من التي تسمى عادة مفترض ريمان - ليرج

٣٨ - ٥ مفترض ريمان - ليرج . إذا كانت  $g \in PC(2\pi)$  ، فإن

$$\lim_n \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(n + \frac{1}{2})t dt = 0$$

البرهان . بما أن  $\sin(n + \frac{1}{2})t = \sin nt \cos \frac{1}{2}t + \cos nt \sin \frac{1}{2}t$  فنحصل على

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(n + \frac{1}{2})t dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\pi g(t) \cos \frac{1}{2}t] \sin nt dt \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\pi g(t) \sin \frac{1}{2}t] \cos nt dt \end{aligned}$$

بما أن  $g \in PC(2\pi)$  ، فينتج أن للدوال المعرفة عند  $t \in (-\pi, \pi)$  ، بأنها

$$g_1(t) = \pi g(t) \cos \frac{1}{2}t, \quad g_2(t) = \pi g(t) \sin \frac{1}{2}t.$$

امتدادات إلى  $\mathbb{R}$  التي تنتمي إلى  $PC(2\pi)$  . لذلك تغطي التكاملات الموجودة في الطرف الأيمن للقانون السابق بمعاملات فوريير للدالتين  $g_1$  و  $g_2$  ، ومن ثم ، حسب متباينة بسل ، تتقارب هذه التكاملات إلى صفر عندما  $n \rightarrow \infty$  . وهو المطلوب إثباته .

٣٨ - ٩ مفترض . إذا كانت  $f \in PC(2\pi)$  ، فإن حاصل الجمع الجزئي  $S_n(f)$

لمتسلسلة فوريير لها هو

$$(38.10) \quad S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt$$

حيث  $D_n$  هو لب تكامل درشلت النوف والمعرف بأنه .

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt = \begin{cases} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t}, & 0 < |t| \leq \pi, \\ n + \frac{1}{2}, & t = 0 \end{cases}$$

البرهان . ينتج من قانون ( ٢ - ٣٨ ) ، ( ١ - ٣٨ ) أن

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^n f(t) \{ \cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt \} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x-t) \right\} dt \end{aligned}$$

إذا فرضنا أن  $t = x + s$  واستخدمنا حقيقة كون جيب تمام دالة زوجية وأن الدالة المراد تكاملها لها دورة  $2\pi$  ، نجد أن .

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+s) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ks \right\} ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ks \right\} ds \end{aligned}$$

الآن نستخدم قانون ( ١ - ٣٦ ) للحصول على ( ١٠ - ٣٨ ) . وهو المطلوب إثباته

قبل الاستمرار ، نذكر ( انظر مثال ٢٧ - ف ) أننا نقصد ، بمشتقة الطرف الأيمن لدالة  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  عند نقطة  $c \in \mathbb{R}$  حيث  $f$  لها نهاية طرف أيمن  $f(c+)$  ، النهاية .

$$f'_+(c) = \lim_{t \rightarrow 0 \atop t > 0} \frac{f(c+t) - f(c+)}{t}$$

طالما وجدت هذه النهاية . بالمثل ، مشتقة الطرف الأيسر للدالة  $f$  عند  $c$  هي النهاية

$$f'_-(c) = \lim_{t \rightarrow 0 \atop t < 0} \frac{f(c+t) - f(c-)}{t}$$

٣٨ - ٧ نظرية تقارب نقطية . نفرض أن  $f \in PC(2\pi)$  وأن الدالة  $f$  مشتقة طرف أيمن ومشتقة طرف أيسر عند  $c$  . إذن تتقارب متسلسلة فوريير للدالة  $f$  إلى  $\frac{1}{2}\{f(c-) + f(c+)\}$  عند النقطة  $c$  . بالرموز .

$$(38.11) \quad \frac{1}{2}\{f(c-) + f(c+)\} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nc + b_n \sin nc)$$

البرهان . ينتج من ( ١ - ٣٦ ) أنه إذا كانت  $\sin \frac{1}{2}t \neq 0$  ، فإن

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t}$$

وبالضرب في  $f(c+) (1/\pi)$  ثم بإجراء التكامل بالنسبة إلى  $t$  في  $[0, \pi]$  وبملاحظة  $\int_0^{\pi} \cos kt dt = 0$  عند  $k \in \mathbb{N}$  ، نحصل على

$$\frac{1}{2}f(c-) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(c+) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt$$

بالمثل ، إذا ضربنا التعبير السابق بالمقدار  $f(c - \frac{1}{\pi})$  وكاملنا بالنسبة إلى  $t$  في  $(-\pi, 0]$  ، نحصل على

$$\frac{1}{2}f(c+) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(c-) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt.$$

إذا طرحنا هذين التعبيرين من القانون ( ٣٨ - ١٠ ) ، نحصل على

$$(*) S_n(f)(c) - \frac{1}{2}\{f(c-) + f(c+)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(c+t) - f(c-)}{2 \sin \frac{1}{2}t} \sin(n+\frac{1}{2})t dt \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(c+t) - f(c+)}{2 \sin \frac{1}{2}t} \sin(n+\frac{1}{2})t dt$$

وبما أنه يوجد الآن

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{f(c+t) - f(c+)}{2 \sin \frac{1}{2}t} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \left\{ \frac{f(c+t) - f(c+)}{t} \cdot \frac{t}{2 \sin \frac{1}{2}t} \right\} \\ = f'_+(c) \cdot 1 = f'_+(c)$$

فينتج أن الدالة

$$F_+(t) = \frac{f(c+t) - f(c+)}{2 \sin \frac{1}{2}t} \quad \text{for } t \in (0, \pi], \\ = f'_+(c) \quad \text{for } t = 0, \\ = 0 \quad \text{for } t \in (-\pi, 0)$$

هي متصلة قطعية في  $[-\pi, \pi]$  . ومن ثم يتقارب التكامل الثاني في (\*) إلى صفر عندما  $n \rightarrow \infty$  .  
بالمثل ، بتقارب التكامل الأول في (\*) إلى صفر عندما  $n \rightarrow \infty$  . ينتج الاستنتاج المنصوص .  
وهو المطلوب إثباته

٣٨ - أمثلة . (أ) الدالة  $f_1$  في مثال ( ٣٨ - ٢ ) (أ) موجودة في  $PC(2\pi)$

عند  $c \in [-\pi, \pi]$  ،  $c \neq -\pi, 0, +\pi$  عند  $f(c-) = f(c) = f(c+)$  حيث  
 $f(-\pi-) = +1$  ،  $f(-\pi+) = -1$  ،  $f(0-) = -1$  ،  $f(0+) = 1$  ،  $f(\pi-) = 1$

$f(\pi+) = -1$  بما أن مشتقات طرف واحد موجودة في كل مكان (وتساوى صفراً)  
فينتج من نظرية تقارب نقاط قطعية ( ٣٨ - ٧ ) أن متسلسلة فوريير  $f_1$  تتقارب إلى  $f_1(c)$   
بشرط  $c \in [-\pi, \pi]$  ،  $c \neq -\pi, 0, \pi$  وأنه عند هذه النقاط الثلاث تتقارب متسلسلة فوريير  
للدالة  $f_1$  إلى صفر .

(ب) الدالة  $f_2$  في مثال ( ٣٨ - ٢ ) (ب) متصلة ، ولها دورة  $2\pi$  ولها مشتقات من جهة  
واحدة في كل مكان . لذلك تتقارب متسلسلة فوريير للدالة  $f_2$  عند كل نقطة للدالة  $f_2$  وأن  
التقارب كما رأينا ، منتظم .

نلاحظ أن مشتقة ( الجانين ) الدالة  $f_2$  موجودة في الفترة  $[-\pi, \pi]$  ماعدا عند النقط  $0, \pm \pi$  وأن  $f_2'$  تتفق مع الدالة القطعية المتصلة  $f_1$  عند  $x \in \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$

نلاحظ أنه ينتج من نظرية القيمة المتوسطة (انظر مثال ٢٧-٢) أنه إذا كانت  $f' \in PC(2\pi)$  فإن مشتق الدالة  $f$  للطرف الأيسر والطرف الأيمن موجودتان عند فقط عدم اتصال الدالة  $f'$ . نوضح الآن أنه لدالة  $f$  بدورة  $2\pi$  وبحيث أن  $f' \in PC(2\pi)$  ، تكون متسلسلة فوريير للدالة  $f$  تقاربية بانتظام إلى  $f$ .

٣٨-٩ نظرية تقارب منتظمة . نفرض أن  $f$  متصلة ، ولها دورة  $2\pi$  ونفرض أن  $f' \in PC(2\pi)$  . حينئذ تقارب متسلسلة فوريير للدالة  $f$  بانتظام إلى  $f$  في  $\mathbb{R}$ .

البرهان . بما أن  $f$  متصلة ومشتقات الدالة  $f$  لطرف واحد موجودة عند كل نقطة ، فينتج من نظرية تقارب نقطية ( ٣٨ - ٧ ) أن متسلسلة فوريير للدالة  $f$  تقارب إلى  $f$  عند كل نقطة . يتبقى إثبات أن التقارب يكون منتظماً . حسب المتباينة .

$$\left| \sum_{k=1}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \leq \sum_{k=1}^m (|a_k| + |b_k|)$$

فيكنى إثبات تقارب المتسلسلة الأخيرة . في الحقيقة ، إذا طبقنا متباينة بسل على  $f'$  ، نعرف أن المتسلسلة  $\sum (|a_k|^2 + |b_k|^2)$  تقاربية لكن ، كما قد رأينا في مثال (٣٨ - ٢) (٨) ،  $b_k = a_k/k$  و  $a_k = -b_k/k$  . إذا استخدمنا متباينة شفارتز نجد أن

$$\sum_{k=1}^m |a_k| = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} |b_k| \leq \left( \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^m |b_k|^2 \right)^{1/2}$$

بما أن متباينة مشابهة تظل صحيحة للمتسلسلة  $\sum |b_k|$  ، فينتج النص المطلوب .

وهو المطلوب إثباته .

نوضح الآن أن حواصل الجمع الجزئية لمتسلسلة فوريير لأي دالة  $f$  في  $PC(2\pi)$  تقارب إلى  $f$  في المود  $\| \cdot \|_2$  . بينما هذا لا يضمن إمكانية استرداد القيمة للدالة  $f$  عند أي نقطة خاصة معينة من قبل ، من الممكن تفسيرها بكون  $f$  مغطاة بمعنى معين (إحصائي) . لبعض تطبيقات يكون هذا النموذج من التقارب مفيداً مثل التقارب النقطي ، ويمتاز بأنه لا يحتاج إلى فرض على قابليته للتفاضل .

٣٨-١٠ نظرية تفاضل عودية . إذا كانت  $f \in PC(2\pi)$  وإذا كانت  $(S_n(f))$

هي المتتابعة لحواصل جمع جزئية لمتسلسلة فوريير للدالة  $f$  ، فإن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n(f)\|_2 = 0$$

البرهان . نفرض أن  $f \in PC(2\pi)$  ونفرض أن  $\varepsilon > 0$  مغطاة . نوضح كمبرين أنه

توجد دالة  $f_1$  متصلة بدورة  $2\pi$  بحيث أن  $\|f - f_1\|_2 < \varepsilon/7$  وحسب نظرية ( ٢٤ - ٥ )

توجد دالة  $f_2$  خطية قطعية متصلة يمكن اختيارها بدورة  $2\pi$  ، بحيث أن  $\|f_1 - f_2\|_\infty < \varepsilon/7$  .  
 ينتج من نظرية التقارب المنتظم ( ٣٨ - ٩ ) أنه إذا كانت  $n$  كبيرة كبراً كافياً ، فإن  $\|g\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \|g\|_\infty \leq 3 \|g\|_\infty$  أن ( ٣٨ - ١ ) نجد من قانون  $\|f_2 - S_n(f_2)\|_\infty < \varepsilon/7$   
 لأي  $g \in PC(2\pi)$  ، إذن نستنتج أن

$$\|f - S_n(f_2)\|_2 < \|f - f_1\|_2 + \|f_1 - f_2\|_2 + \|f_2 - S_n(f_2)\|_2$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{7} + \frac{3\varepsilon}{7} + \frac{3\varepsilon}{7} = \varepsilon$$

الآن  $S_n(f_2)$  كثيرة حدود مثلثية من درجة  $n$  تقارب  $f$  خلال  $\varepsilon$  ( بالنسبة إلى  $\| \cdot \|_2$  ) .  
 بما أننا أثبتنا في مفترض ( ٣٨ - ٣ ) أن حاصل الجمع الجزئي  $S_n(f)$  هو كثيرة الحدود  
 المثلثية من درجة  $n$  التي تعطي الأحسن لمثل هذا التقريب . فنستنتج أن  $\|f - S_n(f)\|_2 < \varepsilon$   
 بما أن  $\varepsilon > 0$  اختيارية ، فنستنتج أن  $\lim \|f - S_n(f)\|_2 = 0$

كنتيجة لهذه النتيجة ومفترض ٣٨ - ٣ نحصل على التعزيز الآتي لمتباينة بسل للدالة

$$f \in PC(2\pi)$$

٣٨ - ١١ متباينة بارسيفال . إذا كانت  $f \in PC(2\pi)$  ، فإن

$$(38.12) \quad \frac{1}{\pi} \|f\|_2^2 = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

حيث  $a_k, b_k$  هي معاملات فوريير للدالة  $f$  .

سنهي هذا الباب ببرهان لنظرية فيجر (\*) على قابلية الجمع لسيزارو لجمع لتسلسلة فوريير  
 لدالة متصلة . إذا كانت  $S_n(f)$  ،  $n = 0, 1, 2, \dots$  تدل على حواصل الجمع الجزئية لتسلسلة  
 فوريير المناظرة للدالة  $f$  ، فنفرض أن  $\Gamma_n(f)$  تدل على متوسطات سيزارو

$$\Gamma_n(f) = \frac{1}{n} [S_0(f) + S_1(f) + \dots + S_{n-1}(f)]$$

نفرض الآن  $D_n, n = 0, 1, 2, \dots$  كما في مفترض ( ٣٨ - ٦ ) . إذا استبدلنا من

القانون المبدئي

$$2 \sin(k - \frac{1}{2})t \sin \frac{1}{2}t = \cos(k-1)t - \cos kt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

يمكننا توضيح أن

$$(38.13) \quad \frac{1}{n} [D_0(t) + D_1(t) + \dots + D_{n-1}(t)] = \begin{cases} \frac{1}{2n} \left( \frac{\sin \frac{1}{2}nt}{\sin \frac{1}{2}t} \right)^2, & 0 < |t| \leq \pi, \\ \frac{1}{2}n, & t = 0 \end{cases}$$

(\*) ليوبولد فيجر ( ١٨٨٠ - ١٩٥٩ ) تعلم ودرس في بودابست . له اسهامات كثيرة مهمة  
 في قطاعات متعددة للتحليل الحقيقي والركب .

ونفرض أن  $K_n$  هي هذه الدالة التي تسمى لب فيجر التوفي . واضح ان  $K_n(t) \geq 0$  وبما أن

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(t) dt = 1$$

عند  $k = 0, 1, 2, \dots$  ، فينتج أن

$$(38.14) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = 1.$$

إذا كانت  $0 < \delta < \pi$ ، فينتج أيضاً من حقيقة كون  $\theta \geq 2\theta/\pi$  عند  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  أن

$$(38.15) \quad 0 \leq K_n(t) \leq \frac{1}{2n} \left( \frac{\pi}{2\delta} \right)^2 \quad \text{for} \quad \delta \leq |t| \leq \pi.$$

نلاحظ أخيراً أنه ينتج من مفترض ( ٣٨ - ٦ ) أنه يمكننا التعبير عن متوسطات سيزارو بالقانون .

$$(38.16) \quad \Gamma_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_n(t) dt$$

نحن الآن مستعدون لبرهنة نظرية فيجر

٣٨ - ١٢ نظرية فيجر . إذا كانت  $f$  متصلة ولها دورة  $2\pi$  ، فإن المتوسطات لسيزارو لمتسلسلة فوريير الدالة  $f$  تتقارب بانتظام إلى  $f$  في  $\mathbb{R}$  .

البرهان . ينتج من ( ٣٨ - ١٤ ) أن

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) K_n(t) dt$$

بطرح هذا من ( ٣٨ - ١٦ ) نحصل على

$$\Gamma_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x+t) - f(x)\} K_n(t) dt$$

بما أن  $K_n(t) \geq 0$  لكل  $t$  ، نجد ان

$$|\Gamma_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| K_n(t) dt$$

بفرض  $\varepsilon > 0$  معطاة . وبما أن  $f$  متصلة بانتظام في  $\mathbb{R}$  ، فيوجد عدد  $\delta$  حيث  $0 < \delta < \pi$  بحيث إنه إذا كانت  $|t| \leq \delta$  ، فإن

$$x \in [-\pi, \pi] \quad \text{لكل} \quad |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$$

ومن ثم نحصل على

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)| K_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = \frac{\varepsilon}{\pi}$$

ومن جهة أخرى نجد حسب ( ٣٨ - ١٥ ) أن

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| K_n(t) dt \leq \frac{\pi - \delta}{\pi} (2 \|f\|_{\infty}) \left( \frac{1}{8n} \frac{\pi^2}{\delta^2} \right) \leq \frac{1}{n} \left( \frac{\pi^2 \|f\|_{\infty}}{4\delta^2} \right)$$

التي يمكن جعلها أقل من  $\varepsilon$  بأخذ  $n$  كبيرة كبراً كافياً . بما أن تقديراً مشابهاً يظل صحيحاً للتكامل على  $[-\pi, -\delta]$  ، فينتج أن

$$\|\Gamma_n(f) - f\|_{\infty} < \left(2 + \frac{1}{\pi}\right) \varepsilon$$

عند  $n$  كبيرة كبراً كافياً . وهو المطلوب إثباته .

بما أنه يلاحظ بسهولة أن الدالة  $\Gamma_n(f)$  كثيرة حدود مثلثية ( من درجة  $n-1$  ) فنحصل برهان آخر للنظرية الآتية لفيرشتراس .

٣٨ - ١٣ نظرية تقريب لثيرون اقتراس . إذا كانت  $f$  متصلة بدورة  $2\pi$  ، فإنه يمكن تقريبها بانتظام بكثرة حدود مثلثية .

### تعريفات :

٣٨ - (أ) نفرض أن  $g$  دالة حقيقية القيمة معرفة في خلية  $J$  للفراغ  $R$  بنقط طرفية  $a < b$  نقول إن  $g$  قطعية متصلة في  $J$  إذا كان (i) للدالة  $g$  نهاية طرف أيمن عند  $a$  ، (ii)  $g$  لها نهاية طرف أيسر عند  $b$  ، (iii)  $g$  متصلة عند كل النقط الداخلية لخلية  $J$  ماعداً ، ربما عند عدد محدود من نقط التي عندها يكون للدالة  $g$  نهايتا طرف أيمن وطرف أيسر .

(أ) أثبت أنه إذا كانت  $g$  قطعية متصلة في  $[-\pi, \pi]$  فإنه يوجد دالة وحيدة  $G$  في  $PC(2\pi)$  بحيث إن  $G(x) = g(x)$  لكل  $x \in (-\pi, \pi)$  .

(ب) الدالة  $g$  لها مشتقة طرف أيسر ( وطرف أيمن ومشتقة طرفين على الترتيب ) عند  $c \in (-\pi, \pi)$  إذا وإذا فقط كانت الدالة  $G$  هذه المشتقات .

(ج) الدالة  $g$  لها مشتقة طرف أيمن عند  $\pi$  — ( مشتقة طرف أيسر عند  $\pi$  على الترتيب ) إذا وإذا فقط كان الدالة  $G$  هاتان المشتقتان .

(د) المشتقتان لطرف واحد  $g'_-(\pi), g'_+(-\pi)$  موجودتان ومتساويتان إذا وإذا فقط كان الدالة  $G$  مشتقة عند  $\pi \pm$  .



٣٨ - (ب) (أ) إذا كانت  $f \in PC(2\pi)$  وكانت المشتقة  $f'(x)$  موجودة لكل  $x \in \mathbb{R}$  فإن  $f'$  لها دورة  $2\pi$ .

(ب) إذا كانت  $f \in PC(2\pi)$  وكانت  $c \in \mathbb{R}$  ، عرف  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  بأنها  $F(x) = \int_c^x f(t) dt$  ، بحيث إن  $F$  متصلة . أثبت أن  $F$  لها دورة  $2\pi$  إذا وإذا فقط كان متوسط  $f$  هو صفر ، أى إن

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0$$

٣٨ - (ج) (أ) نفرض أن  $f \in PC(2\pi)$  فردية . إذن  $f(\pm\pi) = 0$  . إذا كانت  $f$  متصلة عند صفر ، فإن  $f(0) = 0$  .

(ب) نفرض أن  $g \in PC(2\pi)$  زوجية ، إذن  $g(0+) = g(0-)$  . إذا كانت المشتقة  $g'(x)$  موجودة لكل  $x \in \mathbb{R}$  ، فإن ( انظر مثال (٢٧-ب) )  $g'$  فردية ، ولها دورة  $2\pi$  ،  $g'(0) = g'(\pm\pi) = 0$  .

٣٨ - (د) نفرض أن  $f$  و  $F$  تنتميان إلى  $PC(2\pi)$  ولها معاملات فوريير  $A_n, B_n$  و  $a_n$  و  $b_n$  على الترتيب . إذا كانت  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  وإذا كانت  $h = \alpha F + \beta f$  أثبت أن  $h$  تنتمي إلى  $PC(2\pi)$  ولها معاملات فوريير  $\alpha A_n + \beta a_n, \alpha B_n + \beta b_n$  . ( ومن ثم أثبت أن معاملات فوريير لدالة تتوقف خطياً على الدالة ) .

٣٨ - (هـ) (أ) نفرض أن  $f_1$  هي الدالة في مثال (٣٨-٢) (أ) . احسب متسلسلة فوريير للدالة  $f_1$  ، وأثبت أن هذه المتسلسلة لفوريير لا تقترب بانتظام في  $[-\pi, \pi]$  .

(ب) نفرض أن  $f_2$  هي الدالة في مثال (٣٨-٢) (ب) . احسب متسلسلة فوريير للدالة  $f_2$  ، وأثبت أن المشتقة حداً فحدداً لمتسلسلة فوريير الدالة  $f_2$  تطابق متسلسلة فوريير للدالة  $f_1$  (ج) باستخدام حقيقة أن متسلسلة فوريير الدالة  $f_2$  تتقارب إلى  $f_2$  استنتج أن

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

(د) نفرض أن  $f_3(x) = \frac{1}{2}\pi - f_2(x)$  بحيث إن  $f_3(x) = \frac{1}{2}\pi - |x|$  عند  $x \in (-\pi, \pi)$  استخدم تمرين (٣٨-د) لإثبات أن متسلسلة فوريير للدالة  $f_3$  هي

$$f_3(x) \sim \frac{4}{\pi} \left[ \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right]$$

٣٨ - (هـ) (أ) نفرض أن  $g_1 \in PC(2\pi)$  معرفة بحيث إن  $g_1(x) = x$  عند  $x \in (-\pi, \pi]$  وأن  $g_1(\pi) = 0$  . أثبت أن  $g_1$  دالة فردية وأن متسلسلة فوريير لها هي

$$2 \left[ \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right]$$

لاحظ أن متسلسلة فوريير هذه تتقارب إلى صفر عند  $x = \pm\pi$  . استخدم نظرية التقارب النقطية

(٣٨-٧) لإثبات أن متسلسلة فوريير هذه تتقارب إلى  $g_1(x)$  عند كل نقطة  $x \in [-\pi, \pi]$  .

(ب) نفرض أن  $g_2 \in PC(2\pi)$  بحيث أن  $g_2(x) = x^2$  عند  $x \in (-\pi, \pi]$  . أثبت أن  $g_2$  دالة زوجية وأن متسلسلة فوريير لها هي

$$\frac{\pi^2}{3} - 4 \left[ \frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right].$$

وضح أن متسلسلة فوريير هذه تقرب إلى  $g_2$  عن  $[-\pi, \pi]$  ، وأن مشتقتها حدًا فحدًا تكون لمتسلسلة فوريير للدالة  $g_1$  .

(ج) أثبت أن

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots$$

(د) نفرض أن  $h(x) = \frac{1}{2}\pi^2 - g_2(x)$  بحيث إن  $h(x) = \frac{1}{2}\pi^2 - x^2$  عند  $x \in (-\pi, \pi]$  . حيث أن  $h$  دالة زوجية

$$4 \left[ \frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right]$$

٣٨ (ز) - (أ) نفرض أن  $k(x) = x^3$  لكل  $x \in \mathbb{R}$  . أثبت أن  $k$  متصلة وفردية في  $\mathbb{R}$  . لكن ، الدالة  $k_1$  في  $PC(2\pi)$  التي تطابق على  $k$  في  $[-\pi, \pi]$  ليست متصلة .

(ب) نفرض أن  $h(x) = x^3 - \pi^2 x$  بحيث إن  $h$  متصلة وفردية في الفراغ  $\mathbb{R}$  . ونفرض أن  $h_1$  هي الدالة في  $PC(2\pi)$  التي تطابق  $h$  في  $(-\pi, \pi)$  . أثبت أن  $h_1$  متصلة في الفراغ  $\mathbb{R}$  وأن  $h'_1(x) = 3x^2 - \pi^2$  عند  $x \in (-\pi, \pi]$  .

(ج) استخدم تمرين (٢٧-ب) ، مثال (٣٨-٢) (أ) ، وتمرين (٣٨-ج) (د) لإثبات أن متسلسلة فوريير للدالة  $h_1$  هي

$$-12 \left[ \frac{\sin x}{1^3} - \frac{\sin 2x}{2^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} - \dots \right].$$

٣٨ - (ح) نفرض أن  $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  دالة قطعية متصلة ونفرض أن  $f \in PC(2\pi)$  معرفة بأنها

$$\begin{aligned} f_e(x) &= f(x) & \text{عند } x \in [0, \pi], \\ &= f(-x) & \text{عند } x \in [-\pi, 0). \end{aligned}$$

- (أ) أثبت أن  $f$  هي دالة زوجية ، تسمى امتداداً زوجياً للدالة  $f$  بدوره  $2\pi$  .  
 (ب) متسلسلة فوريير للدالة  $f$  تسمى متسلسلة جيب تمام ( فوريير ) للدالة  $f$  . أثبت أنها معطاة بالصورة

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

حيث

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- (ج) أثبت أنه إذا كانت  $c \in (0, \pi)$  وكان للدالة  $f$  مشتقة طرف أيسر ومشتقة طرف أيمن عند  $c$  ، فإن متسلسلة جيب تمام للدالة  $f$  تتقارب إلى  $\frac{1}{2}[f(c-) + f(c+)]$  أيضاً إذا كان للدالة  $f$  مشتقة طرف أيمن عند صفر ، فإن متسلسلة جيب تمام للدالة  $f$  تتقارب إلى  $f(0+)$  .  
 إذا كانت للدالة  $f$  مشتقة طرف أيسر عند  $\pi$  ، فإن متسلسلة جيب تمام للدالة  $f$  تتقارب إلى  $f(\pi-)$  .

٣٨ - (ط) لكل من الدوال الآتية المعرفة في  $[0, \pi]$  ، احسب متسلسلة جيب تمام وحدد النهاية لهذه المتسلسلة عند كل نقطة .

- (أ)  $f(x) = x$  (ب)  $f(x) = \sin x$   
 (ج)  $f(x) = 1$  عند  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$  (د)  $f(x) = \frac{1}{2}\pi - x$  عند  $\frac{1}{2}\pi < x \leq \pi$   
 عند  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$   $= 0$  عند  $\frac{1}{2}\pi < x \leq \pi$   $= 0$   
 (هـ)  $f(x) = x(\pi - x)$  .

٣٨ - (ي) نفرض أن  $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  قطعية متصلة ونفرض أن  $f_0 \in PC(2\pi)$  معرفة بأنها

$$\begin{aligned} x \in (0, \pi] \quad \text{عند} \quad f_0 &= f(x) \\ x = 0, \quad \text{عند} \quad &= 0 \\ x \in (-\pi, 0) \quad \text{عند} \quad &= -f(-x) \end{aligned}$$

- (أ) أثبت أن  $f$  دالة فردية ، تسمى امتداداً فردياً للدالة  $f$  بدورة  $2\pi$  .  
 (ب) متسلسلة فوريير للدالة تسمى متسلسلة جيب ( فوريير ) للدالة  $f$  أثبت أنها معطاة بالصورة

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

حيث

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

(ج) أثبت أنه إذا كانت  $c \in (0, \pi)$  وإذا كانت  $f$  لها مشتقة طرف أيسر ومشتقة طرف أيمن عند  $c$  ، فإن متسلسلة الجيب للدالة  $f$  تتقارب إلى  $\frac{1}{2}[f(c-) + f(c+)]$  وفي أى حالة ، تتقارب متسلسلة الجيب للدالة  $f$  إلى صفر عند  $x = 0, \pi$  .

٣٨ - (ك) لكل البوال الآتية المعرفة في  $[0, \pi]$  ، احسب متسلسلات الجيب وحدد النهاية لهذه المتسلسلات عند كل نقطة .

$$f(x) = 1 \quad (أ) \quad f(x) = \cos x \quad (ب)$$

$$f(x) = 1 \quad \text{عند } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi \quad (ج) \quad f(x) = \pi - x \quad (د)$$

$$= 0 \quad \text{عند } \frac{1}{2}\pi < x \leq \pi$$

$$f(x) = x(\pi - x) \quad (هـ)$$

٣٨ - (ل) نفرض أن  $f_n \in PC(2\pi)$  دالة بحيث إن  $f_n(x) = n^{1/4}$  عند  $0 \leq x \leq 1/n$  وتساوى صفرًا عند قيم أخرى  $x \in (-\pi, \pi]$  . أثبت أن  $\|f_n\|_2 = 1/n^{1/4}$  أى إن المتتالية  $(f_n)$  تتقارب إلى الدالة صفر في العمود  $\|\cdot\|_2$  لكن ، بما أنها غير محدودة ، فإن التقارب ليس منتظمًا .

٣٨ - (م) إذا كانت  $f \in PC(2\pi)$  وإذا كانت  $\varepsilon > 0$  ، أثبت أنه يوجد دالة متصلة  $f_\varepsilon$  بدورة  $2\pi$  بحيث أن  $\|f - f_\varepsilon\|_2 < \varepsilon$

٣٨ - (ن) استخدم متساوية بارسيفال (٣٨ - ١١) لإثبات القوانين الآتية :

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \quad (ب) \quad \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (أ)$$

$$\frac{\pi^6}{945} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} \quad (د) \quad \frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad (ج)$$

٣٨ - (س) إذا كانت  $F$  و  $f$  تنتميان إلى  $PC(2\pi)$  ولهما معاملات فوريير  $b_n, a_n$  و  $A_n, B_n$  ، حل الترتيب ، أثبت أن

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)F(t) dt = \frac{1}{2}a_0A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_nA_n + b_nB_n)$$

(إرشاد : طبق متساوية بارسيفال على  $(f + F)$  .)

٣٨ (ع) - استخدم اختبار درشلت (٣٦-٢) ومثال (٣٦-٨) لإثبات أن المتسلسلة المثلثية

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{1/2}}$$

تتقارب لكل  $x$  وضح ، كيفما كان ، أن هذه المتسلسلة لا يمكن أن تكون متسلسلة فوريير لأي دالة في  $PC(2\pi)$  .

٣٨ - ( ف ) نفرض أن  $L > 0$  ونفرض أن  $PC(2L)$  متجه فراغ لكل دوال  $f: R \rightarrow R$  للقطعية المتصلة والتي دورتها هي  $2L$ .

( أ ) إذا عرفنا  $f \cdot g = \int_{-L}^L f(t)g(t) dt$  عند  $f, g \in PC(2L)$  ، أثبت أن الراسم  $f \cdot g \rightarrow (f, g)$  هو حاصل الضرب القياسي ( بمفهوم تعريف ( ٨ - ٣ ) في  $PC(2L)$  . وبالإضافة إلى ذلك يكون العمود المستنتج بحاصل الضرب القياسي ( انظر ٨ - ٧ ) هو

$$\|f\|_2 = \left[ \int_{-L}^L |f(t)|^2 dt \right]^{1/2}$$

( ب ) نفرض أن  $C_0, C_n, S_n, n \in N$  هي الدوال في  $PC(2L)$  المعرفة بأنها

$$C_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}}, \quad C_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad S_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

أثبت أن هذه الفئة للدوال متعامدة بالمعنى الآتي :

$$C_n \cdot S_m = 0, \quad C_n \cdot C_m = \delta_{nm}, \quad S_n \cdot S_m = \delta_{nm}$$

حيث  $\delta_{nm} = 1$  إذا كانت  $n = m$  وأن  $\delta_{nm} = 0$  إذا كانت  $n \neq m$  . ( إرشاد : إذا كانت  $L = \pi$  ، فإن هذه هي العلاقات المعطاة قبل ( ٣٨ - ٣ ) .

( ج ) إذا كانت  $f \in PC(2L)$  ، ونعرف متسلسلة فوريير للدالة  $f$  في  $[-L, L]$  بأنها المتسلسلة

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

حيث نجد أن

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt$$

عند  $n = 1, 2, \dots$

( د ) أعد صياغة نظريات التقارب ( ٣٨ - ٧ ) ، ( ٣٨ - ٩ ) ، ( ٣٨ - ١٠ ) لمتسلسلات فوريير لدوال في  $PC(2L)$  . ( إرشاد : استخدم تغيير المتغير ) .

( هـ ) إذا كانت  $f \in PC(2L)$  ، فإن متساوية بارسيفال تصبح

$$\frac{1}{L} \|f\|_2^2 = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

حيث العمود للدالة  $f$  مثل العمود في جزء ( أ ) وحيث معاملات فوريير هي مثل المعاملات في جزء ( ج ) .

٣٨ - (ص) لكل من الدوال الآتية في الفترة المبنية ، احسب متسلسلة فوريير في هذه الفترة وحدد النهاية لهذه المتسلسلة عند كل نقطة .

$$(أ) \quad f(x) = x \text{ على } [-2, 2]$$

$$(ب) \quad f(x) = 0 \text{ عند } -4 < x < 0$$

$$= x \text{ عند } 0 \leq x \leq 4$$

$$(ج) \quad f(x) = 0 \text{ عند } -3 < x < 0$$

$$= 1 \text{ عند } 0 \leq x \leq 1$$

$$= 0 \text{ عند } 1 < x \leq 3$$

٣٨ - (ق) نفرض أن  $f$  متصلة ودورتها  $2\pi$  . أثبت أنه إذا كانت متسلسلة فوريير للدالة  $f$  تتقارب عند  $c \in [-\pi, \pi]$  إلى عدد ما ، فإنها تتقارب إلى  $f(c)$  .

٣٨ - (ر) نفرض أن  $f$  تنتمي إلى  $PC(2\pi)$  ونفرض أن  $\Gamma_n(f)$  ،  $c \in [-\pi, \pi]$  . إذا كانت  $\Gamma_n(f)$  تدل على متوسط فيجر النوني ، المعرف في (٣٨ - ١٦) أثبت أن

$$\lim \Gamma_n(f)(c) = \frac{1}{2} [f(c-) + f(c+)]$$

٣٨ - (ش) نفرض أن  $f'$  و  $f$  متصلتان بدورة  $2\pi$  وأن  $f'' \in PC(2\pi)$  .

(أ) أثبت أن معاملات فوريير  $a_n, b_n$  للدالة  $f$  تكون بحيث إن المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|a_n| + |b_n|)$$

تقاربية . ومن ثم ، يوجد مقدار ثابت  $M > 0$  بحيث إن  $|a_n| \leq M/n^2$  وأن  $|b_n| \leq M/n^2$  لكل  $n \in \mathbb{N}$  .

(ب) أثبت أن متسلسلة فوريير للمشتقة  $f'$  هي التفاضل حداً فحداً لمتسلسلة فوريير للدالة  $f$  .

٣٨ - (ت) (أ) إذا كانت  $k \in PC(2\pi)$  وكانت  $x_0, x \in [-\pi, \pi]$  ، استخدم متباينة شفارتز لإثبات أن

$$\left| \int_{x_0}^x k(t) dt \right| \leq \|k\|_2 |x - x_0|^{1/2} \leq \|k\|_2 \sqrt{2\pi}$$

(ب) استخدم جزء (أ) ونظرية تقارب المود (٣٨ - ١٠) لتوضيح أنه إذا كانت  $f \in PC(2\pi)$  وأن  $x_0 \in [-\pi, \pi]$  ، فإن متسلسلة فوريير للدالة  $f$  يمكن تكاملها حداً فحداً .

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \frac{1}{2} a_0 (x - x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt) dt$$

والمسلسلة الناتجة تقاربية بانتظام عند  $x \in [-\pi, \pi]$

٣٨ - (ث) (أ) نفرض أن  $\alpha > 0$  ليست عدداً صحيحاً . أثبت أن

$$\cos \alpha x = \frac{2\alpha \sin \alpha \pi}{\pi} \left[ \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\cos x}{\alpha^2 - 1^2} + \frac{\cos 2x}{\alpha^2 - 2^2} - \frac{\cos 3x}{\alpha^2 - 3^2} + \dots \right]$$

لكل  $x \in [-\pi, \pi]$

(ب) استخدم جزء (أ) لإثبات أنه إذا كانت  $x \notin \mathbb{Z}$  فإن

$$\cot \pi x = \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2}$$

$$\csc \pi x = \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 - n^2}$$

(ج) فاضل المسلسلة الأولى في (ب) حداً فحداً (برر هذا) لإثبات أنه إذا كانت

$x \notin \mathbb{Z}$  فإن

$$\frac{\pi^2}{(\sin \pi x)^2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=-m}^m \frac{1}{(x-n)^2}$$

(د) كامل المسلسلة الأولى في (ب) حداً فحداً (برر هذا) لإثبات أنه إذا كانت  $x \in \mathbb{Z}$

فإن

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right) \right]$$

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة

مكتبتي الخاصة

على موقع ارشيف الانترنت

الرابط

[https://archive.org/details/@hassan\\_ibrahem](https://archive.org/details/@hassan_ibrahem)

## تفاضل في $R^p$

سنقدم في هذا الفصل النظرية لدوال قابلة للتفاضل في الفراغ  $R^p$  حيث  $p > 1$ . وبالرغم من أن النظرية توازي تلك التي قدمت في بابي ٢٧ ، ٢٨ ، فإنه يوجد تعقيدات عديدة وتظهر صفات جديدة ترجع بعض هذه التعقيدات محضاً إلى الاختلاط الحتمي للرموز لكن يظهر معظمها بسبب كون إمكانية الاقتراب من نقطة  $c \in R^p$  من « اتجاهات كثيرة » لذلك يمكن أن تحدث بعض ظواهر جديدة .

عرفنا في باب ٢٧ المشتقة لدالة  $f: R \rightarrow R$  عند نقطة  $c \in R$  بالطريقة التقليدية ، أي ، عند العدد  $L \in R$  بحيث إن

$$L = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

طالما وجدت هذه النهاية . بطريقة مكافئة ، يمكننا تعريف هذه المشتقة بأنها العدد  $L$  حيث

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{|f(x) - f(c) - L(x - c)|}{|x - c|} = 0$$

يمكن اعتبار هذه العلاقة النهائية بأنها تعطي بالضبط الاتجاه الذي فيه يقرب قيم الدالة  $f(x)$  عندما تكون  $x$  قريبة قريباً كافياً من  $c$  ، بـقيم الراسم المألوف (\*)  

$$x \mapsto f(c) + L(x - c)$$

الذي يعطي المنحنى البياني له المستقيم المماس لمنحنى الدالة  $f$  عند النقطة  $(c, f(c))$  .

سوف نستخدم هذا الاقتراب للمشتقة التي سوف نسميها لدوال في  $R^p$  إلى  $R^q$  . أي إن المشتقة لدالة  $f$  معرفة في جوار نقطة  $c \in R^p$  بـقيم في  $R^q$  ستكون راسماً خطياً  $L: R^p \rightarrow R^q$  إذا كان

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{\|f(x) - f(c) - L(x - c)\|}{\|x - c\|} = 0$$

(\*) في مقررات أساسية ، يسمى مثل هذا الراسم « خطي » لكن ، للمتطابقة مع الاستعمال الأكثر تعقيداً للمصطلح « خطي » المعطى في باب ٢١ ، سنستعمل الاصطلاح « مألوفة » للإشارة إلى دالة حصلنا عليها بإضافة ثابت لدالة خطية .



ومن ثم نقرب الدالة  $f(x)$  ، عندما  $x$  تكون قريبة قريباً كافياً من  $c$  ، بالراسم المألوف

$$x \mapsto f(c) + L(x - c)$$

من  $R^p$  إلى  $R^q$  . [ يجب على القارئ ملاحظة أنه إذا كانت  $p = 1$  ، فإن الرمز  $L(x - c)$  يدل على حاصل ضرب العددين الحقيقيين  $x - c$  و  $L$  ؛ لكن ، إذا كانت  $p > 1$  ، فإن  $L(x - c)$  تدل على قيمة الراسم الخطي  $L$  عند المتجه  $x - c$  .

يعطى باب ٣٩ التعريف ويربط المشتقة بالمشتقات « الجزئية » المختلفة . حصلنا في باب ٤٠ على قاعدة السلسلة ونظرية القيمة المتوسطة اللتين لهما أهمية رئيسية يعطى باب ٤١ تحليلاً نافذاً إلى خواص الرواسم للدوال القابلة للتفاضل ومؤدياً إلى النظرية الهامة للدوال العكسية والضمنية ، ونهاية إلى نظريات البارامترية والرتبة . يدرس الباب الأخير الخواص النهائية للدوال الحقيقية القيمة في  $R^p$  .

## الباب التاسع والثلاثون — المشتقة في $R^p$ :

اعتبر باب ٢٧ المشتقة لدالة نطاقها ومداها في الفراغ  $R$  . في هذا الباب سنعتبر من وجهة نظر مشابهة دالة معرفة في فئة جزئية من الفراغ  $R^p$  وقيم في  $R^q$

إذا استعرض القارئ تعريف ( ٢٧ - ١ ) ، فإنه سيلاحظ أنه يستخدم بدرجة مطابقة تماماً لدالة معرفة في فترة  $J$  من الفراغ  $R$  وقيم في الفراغ الكارتيزي  $R^q$  . وطبعاً ، تكون في هذه الحالة متجهة في  $R^q$  . التغير الوحيد المطلوب لهذا الامتداد هو إحلال القيمة المطلقة في معادلة ( ٢٧ - ١ ) بالعمود في الفراغ  $R^q$  . فيما عدا ذلك ، يطبق تعريف ( ٢٧ - ١ ) حرفياً على هذه الحالة الأكثر عمومية . ويتضح أن هذه الحالة تستحق الدراسة عندما نتحقق أنه يمكن اعتبار دالة  $f$  في  $J$  إلى  $R^q$  منحنيًا في الفراغ  $R^q$  وأن المشتقة عند وجودها لهذه الدالة عن النقطة  $x = c$  تعطى متجهاً مماساً للمنحنى عند النقطة  $f(c)$  وبالتماق ، إذا كانت  $x$  تدل على الوقت ، فإن الدالة  $f$  هي المسير لنقطة في الفراغ  $R^q$  وتدل المشتقة  $f'(c)$  على متجه السرعة للنقطة عند زمن  $x = c$  .

فحص كامل لهذه السطور من التفكير سيقودنا بعيداً إلى الهندسة التفاضلية والديناميكية بأكثر مما نرغب الآن . أغراضنا أكثر تواضعاً : نرغب لتنظيم الطريقة التحليلية التي يمكننا من فحص كامل ونزيل التقيد الذي ينص على أن النطاق يكون في فراغ ذي بعد واحد وتسمح بانتهاء النطاق إلى الفراغ الكارتيزي سوف نستمر الآن لإجراء هذا .

يوضح تحليل لتعريف ( ٢٧ - ١ ) أن المكان الوحيد الذي فيه يكون من الضروري تكوين النطاق من فئة جزئية من الفراغ  $R$  هو في معادلة ( ٢٧ - ١ ) حيث يظهر خارج قسمة . حيث أنه لا يوجد معنى لخارج قسمة متجه في الفراغ  $R^q$  على متجه في الفراغ  $R^p$  ، فإنه لا يمكننا تفسير

معادلة ( ٢٧ - ١ ) بصورتها الحالية . لذلك ، سنتقدم لإعادة صياغة هذه المعادلة . إحدى الإمكانات الممتعة والمستحقة الاعتبار هي أخذ « شرائح » في البعد الواحد مارة بالنقطة  $c$  في النطاق . سيفرض البساطة أن  $c$  هي نقطة داخلية للنطاق  $D$  للدالة ، حينئذ لأي  $u$  في  $R^p$  ، تنتمي النقطة  $c + tu$  إلى  $D$  لأعداد  $t$  حقيقية وصغيرة بكفاية .

٣٩ - ١ تعريف . نفرض أن  $f$  معرفة في فئة جزئية  $A$  من الفراغ  $R^p$  ولها قيم في  $R^q$  . نفرض أن  $c$  نقطة داخلية من  $A$  ، ونفرض أن  $u$  أي نقطة في  $R^p$  . يسمى المنتج  $L_u \in R^q$  بالمشتقة الجزئية للدالة  $f$  عند  $c$  بالنسبة إلى  $u$  إذا كان يوجد لكل عدد  $\varepsilon > 0$   $\delta(\varepsilon) > 0$  بحيث إنه لكل  $t \in R$  ويحقق  $0 < |t| < \delta(\varepsilon)$  نحصل على

$$(39.1) \quad \left\| \frac{1}{t} \{f(c+tu) - f(c)\} - L_u \right\| < \varepsilon$$

قد رأينا حالا أن المشتقة الجزئية  $L_u$  المعرفة في ( ٣٩ - ١ ) تكون محددة وحيدة عند وجودها وبالتعاقب ، يمكننا تعريف بأنها النهاية

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{f(c+tu) - f(c)\}$$

أو المشتقة عند  $t = 0$  للدالة  $F$  المعرفة بأنها  $F(t) = f(c + tu)$  عند  $|t|$  صغيرة صغراً كافياً ، ولها قيم في  $R^q$  .

سنكتب  $D_u f(c)$  أو  $f_u(c)$  للتفاضل الجزئي  $L_u$  للدالة  $f$  عند  $c$  بالنسبة إلى  $u$  . يفضل الرمز الأول بكثرة عندما ، كما في أكثر الحالات ، تكون الرمز الدال على الدالة دليل سفلي . نرمز إلى الدالة  $c \mapsto D_u f(c) = f_u(c)$  بأنها  $D_u f$  أو  $f_u$  ، تعرف الدالة عند نقطها الداخلية  $c$  من  $A$  التي عندها توجد النهاية المطلوبة ، ولها قيم في الفراغ  $R^q$  .

من الواضح أنه إذا كانت  $f$  حقيقية القيمة ( بحيث إن  $q = 1$  ) وكان  $u$  هو المتجه  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$  في الفراغ  $R^p$  . حينئذ تنطبق المشتقة الجزئية للدالة  $f$  بالنسبة إلى  $e_1$  على مايسمى عادة بالمشتقة الجزئية للدالة  $f$  بالنسبة لمتغيرها الأول ، والتي غالباً يرمز لها بالرمز

$$D_1 f, \quad f_{x_1} \quad \text{أو} \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

بنفس الطريقة ، يأخذ  $e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_p = (0, 0, \dots, 1)$  ، نحصل على التفاضلات الجزئية للدالة  $f$  بالنسبة إلى متغيرات أخرى :

$$D_2 f = f_{x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, D_p f = f_{x_p} = \frac{\partial f}{\partial x_p}$$

في حالة وجود دليل الرمز الذي يدل على الدالة فنكتب ، أحياناً ، فاصلة للإشارة إلى المشتقة الجزئية أى  $D_{f2} = f_{2,i}$

يجب ملاحظة أن المشتقة الجزئية لدالة عند نقطة بالنسبة لمتجه واحد ربما تكون موجودة، مع أن المشتقة الجزئية بالنسبة إلى متجه آخر لا تحتاج إلى وجودها (انظر تمرين ٣٩ - أ) . وواضح أيضاً ، أنه تحت شروط مناسبة ، توجد علاقات جبرية بين مشتقات جزئية لحواصل جمع وحواصل ضرب لدوال ، الخ . سوف لانتصايق للحصول على هذه العلاقات حيث إنها إما حالات خاصة من التي سنجرها أسفل ، أو يمكن برهنتها بالمثل .

كلمة عن المصطلحات العلمية هي في نظام . إذا كانت  $u$  وحدة متجه في  $R^p$  ، حينئذ تسمى المشتقة الجزئية  $D_u f(c) = f_u(c)$  غالباً بالمشتقة الاتجاهية للدالة  $f$  عند  $c$  في الاتجاه لوحدة المتجه  $u$  .

### المشتقة :

العيب الرئيسى للمشتقة الجزئية لدالة  $f$  عند نقطة  $c$  بالنسبة إلى متجه  $u$  هو أنه يعطى فقط صورة لسلوك الدالة  $f$  قرب  $c$  في فئة ذات بعد واحد  $\{c + tu : t \in R\}$  . للحصول على معلومات كاملة بدرجة أكثر عن الدالة  $f$  في جوار  $c \in R^p$  ، سوف ندخل الرمز لمشتقة الدالة  $f$  عند  $c$  ، التي هي راسم خطى من  $R^p$  إلى  $R^q$  .

٣٩ - ٢ تعريف . نفرض أن الدالة  $f$  لها نطاق  $A$  في الفراغ  $R^p$  ومدى في  $R^q$  ، ونفرض أن  $c$  نقطة داخلية للنطاق  $A$  . نقول إن الدالة  $f$  قابلة للتفاضل عند  $c$  إذا كان يوجد دالة خطية  $L: R^p \rightarrow R^q$  بحيث إنه لكل  $\varepsilon > 0$  يوجد  $\delta(\varepsilon) > 0$  بحيث إنه إذا كانت  $x \in R^p$  أى متجه يحقق  $\|x - c\| \leq \delta(\varepsilon)$  فإن  $x \in A$  ويكون

$$(39.2) \quad \|f(x) - f(c) - L(x - c)\| \leq \varepsilon \|x - c\|$$

وبالتعاقب يمكن إعادة صياغة (٣٩ - ٢) بكتابة أنه لأى  $\varepsilon > 0$  فإنه يوجد  $\delta(\varepsilon) > 0$  بحيث إنه إذا كانت  $u \in R^p$  وكانت  $\|u\| \leq \delta(\varepsilon)$  ، فإن

$$(39.3) \quad \|f(c + u) - f(c) - L(u)\| \leq \varepsilon \|u\|$$

التي ، بدورها ، يمكن التعبير عنها أكثر أحكاماً بكتابة

$$(39.4) \quad \lim_{\|u\| \rightarrow 0} \frac{\|f(c + u) - f(c) - L(u)\|}{\|u\|} = 0$$

سنرى فيما يلي أن مثل هذه الدالة الخطية  $L$  محددة وحيدة إذا وجدت . تسمى (\*) مشتقة  $f$

(\*) فنيه القارىء أن  $L$  تسمى أحياناً مشتقة فريشت أو التفاضل الدالة  $f$  عند  $c$  ، يرمز لها أحياناً بالرموز  $df(c)$  أو  $f'(c)$  ، الخ .

عند  $c$  سنرمز لها غالباً بالرمز  $Df(c)$  بدلا من  $L$  . سوف نكتب غالباً  $Df(c)(u)$  للدالة الخطية  $L(u)$  ،  $Df(c)(x-c)$  ، للدالة الخطية  $L(x-c)$  .

من وجهة النظر التحليلية ، يمكن وجود المشتقة للدالة  $f$  عند النقطة  $c$  إمكانية تقريب الراسم  $x \mapsto f(x)$  بالراسم  $x \mapsto f(c) + L(x-c)$  . تعطي متباينة ( ٣٩ - ٢ ) مقياساً لتلاصق هذا التقريب عندما تكون  $x$  قريبة من  $c$  . نجد بسبب الخطية للدالة  $L$  ، أن

$$f(c) + L(x-c) = (f(c) - L(c)) + L(x)$$

حينئذ نكون قربنا  $x \mapsto f(x)$  بدالة على الصورة  $x \mapsto y_0 + L(x)$  ، حيث  $y_0$  ثابتة . مثل هذه الدوال تسمى رواسم مألوفة من  $\mathbb{R}^p$  إلى  $\mathbb{R}^q$  ؛ هذه الرواسم مجرد ترجمة فقط لرواسم خطية وإذن يكون لها خاصية بسيطة جداً .

من وجهة النظر الهندسية ، تعكس وجود المشتقة الدالة  $f$  عند  $c$  وجود مستوى مماس للسطح  $\{(x, f(x)) : x \in A\}$  في  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  عند النقطة  $(c, f(c))$  ، أى المستوى المعطى بالشكل

$$(39.5) \quad \{(x, f(c) + L(x-c)) : x \in \mathbb{R}^p\}$$

سنثبت الآن انفرادية المشتقة

٣٩ - ٣ مفترض . للدالة  $f$  مشتقة واحدة من نقطة على الأكثر :

البرهان . نفرض أن  $L_1, L_2$  دالتان خطيتان من  $\mathbb{R}^p$  إلى  $\mathbb{R}^q$  وتحققان (٣٩-٣) عند  $\|u\| \leq \delta(\varepsilon)$  . حينئذ نجد أن

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|L_1(u) - L_2(u)\| \\ &\leq \|f(c+u) - f(c) - L_1(u)\| + \|f(c+u) - f(c) - L_2(u)\| \\ &\leq 2\varepsilon \|u\| \end{aligned}$$

لذلك نحصل على  $\|u\| \leq \delta(\varepsilon)$  حيث  $0 \leq \|L_1(u) - L_2(u)\| \leq 2\varepsilon \|u\|$  لكل  $u \in \mathbb{R}^p$  ، إذا كانت  $L_1 \neq L_2$  ، فإنه يوجد  $z \in \mathbb{R}^p$  حيث  $L_1(z) \neq L_2(z)$  لذلك  $z \neq 0$  . الآن نفرض أن  $z_0 = (\delta(\varepsilon)/\|z\|)z$  وإذن نجد أن  $\|z_0\| = \delta(\varepsilon)$  ومن ثم  $\|L_1(z_0) - L_2(z_0)\| \leq 2\varepsilon \|z_0\|$  . إذن  $\|L_1(z) - L_2(z)\| \leq 2\varepsilon \|z\|$  لكل  $\varepsilon > 0$  لذلك تكون  $L_1(z) = L_2(z)$  ما يخالف الفرض . إذن  $L_1 = L_2$  . وهو المطلوب إثباته

٣٩ - ٤ أمثلة . (أ) نفرض أن  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  ،  $y_0 \in \mathbb{R}^q$  ، ونفرض أن  $f_0: A \rightarrow \mathbb{R}^q$  هي « دالة ثابتة » معرفة بأنها  $f_0(x) = y_0$  عند  $x \in A$  . إذا كانت  $c$  نقطة داخلية من  $A$  وكانت  $x \in A$  ، فإن  $f_0(x) - f_0(c) = 0$  . ينتج أن  $f_0$  قابلة للتفاضل عند  $c$  وأن المشتقة  $Df_0(c) = 0$  ، أى « الدالة الخطية الصغيرة » التى ترسم كل عنصر في  $\mathbb{R}^p$  إلى عنصر الصفر في  $\mathbb{R}^q$  . ومن ثم المشتقة عند أى نقطة من الدالة الثابتة هي الدالة الخطية الصفرية .

(ب) نفرض أن  $A = \mathbb{R}^p$  وأن  $f_1: A \rightarrow \mathbb{R}^q$  هي دالة خطية . إذا كانت  $c \in A$  وكانت  $x \in A$  فإن  $f_1(x) - f_1(c) - f_1(x-c) = 0$  . ينتج من هذا أن  $f_1$  قابلة للتفاضل عند  $c$  وأن  $Df_1(c) = f_1$  ومن ثم تكون المشتقة عند أى نقطة للدالة الخطية هي الدالة الخطية نفسها .

٣٩-٥ مقرر . إذا كانت  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^q$  قابلة للتفاضل عند  $c \in A$  ، فإنه يوجد عدنان موجبان دقيقان  $K, \delta$  بحيث إنه إذا كانت  $\|x - c\| \leq \delta$  ، فإن

$$\|f(x) - f(c)\| \leq K \|x - c\| \quad (39.6)$$

بروجه خاص ينتج أن  $f$  متصلة عند  $x = c$  .

البرهان . ينتج من تعريف (٣٩-٢) أنه يوجد  $\delta > 0$  بحيث إنه إذا كانت  $0 < \|x - c\| \leq \delta$  فإن (٣٩-٢) تظل صحيحة عندما  $\varepsilon = 1$  . إذا استخدمنا متباينة المثلث نجد أن

$$\|f(x) - f(c)\| \leq \|L(x - c)\| + \|x - c\|$$

عندما  $0 < \|x - c\| \leq \delta$  . من نظرية (٣١-٢) توجد  $B > 0$  بحيث إن

$$\|L(x - c)\| \leq B \|x - c\|$$

لجميع  $x \in \mathbb{R}^p$  . لذلك ، إذا كانت  $\|x - c\| \leq \delta$  نحصل على

$$\|f(x) - f(c)\| \leq (B + 1) \|x - c\|$$

وهذه المتباينة تظل أيضاً صحيحة عندما  $x = c$  . وهو المطلوب إثباته

نوضح الآن أن الوجود للدالة المشتقة عند نقطة يدل على الوجود لكل المشتقات الجزئية عند هذه النقطة .

٣٩-٦ نظرية . إذا كانت  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  ، وإذا كانت  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^q$  قابلة للتفاضل عند نقطة  $c \in A$  ، وإذا كانت  $u$  أى عنصر من الفراغ  $\mathbb{R}^p$  ، فإن المشتقة الجزئية  $D_u f(c)$  للدالة  $f$  عند  $c$  بالنسبة إلى  $u$  تكون موجودة وبالإضافة إلى ذلك

$$D_u f(c) = Df(c)(u) \quad (39.7)$$

البرهان . بما أن  $f$  قابلة للتفاضل عند  $c$  ، فنجد بأخذ  $\varepsilon > 0$  ، أنه يوجد  $\delta(\varepsilon) > 0$  بحيث إن

$$\|f(c + tu) - f(c) - Df(c)(tu)\| \leq \varepsilon \|tu\|$$

بشرط  $\|tu\| \leq \delta(\varepsilon)$  . إذا كانت  $u = 0$  ، فقد لاحظنا حالا المشتقة الجزئية بالنسبة

إلى صفر يرى هي  $0 = Df(c)(0)$  . ومن ثم نفرض  $u \neq 0$  . أى إنه إذا كانت  $0 < |t| \leq \delta(\varepsilon)/\|u\|$  فإن

$$\left\| \frac{f(c+tu) - f(c)}{t} - Df(c)(u) \right\| \leq \varepsilon \|u\|$$

ما يوضح أن  $Df(c)(u)$  هي المشتقة الجزئية للدالة  $f$  عند  $c$  بالنسبة إلى  $u$  ، كالمطلوب . وهو المطلوب إثباته .

٢٩-٧ نتيجة . نفرض أن  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  ، ونفرض أن  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  ونفرض أن  $c$  هي نقطة داخلية من  $A$  . إذا كانت المشتقة  $Df(c)$  موجودة ، فإن كل المشتقات الجزئية  $D_1f(c), \dots, D_pf(c)$  موجودة في  $\mathbb{R}$  وإذا كانت  $u = (u_1, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^p$  فإن

$$(39.8) \quad Df(c)(u) = u_1 D_1f(c) + \dots + u_p D_pf(c)$$

البرهان . تدل النظرية على أنه لكل من المتجهات  $e_1, \dots, e_p$  تكون المشتقات الجزئية  $D_1f(c), \dots, D_pf(c)$  موجودة وتساوي  $Df(c)(e_1), \dots, Df(c)(e_p)$  لكن ، حيث إن  $Df(c)$  خطية وأن  $u = u_1 e_1 + \dots + u_p e_p$  ، فستنتج أن

$$Df(c)(u) = \sum_{i=1}^p u_i Df(c)(e_i) = \sum_{i=1}^p u_i D_i f(c)$$

وهو المطلوب إثباته

### ملاحظات :

(أ) عكس نتيجة (٢٩-٧) ليس دائماً صحيحاً ، لأن المشتقات الجزئية للدالة  $f$  ربما تكون موجودة بدون وجود المشتقة . مثال ذلك ، نفرض أن  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  معرفة بأنها

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0 \quad \text{for } (x, y) = (0, 0) \\ &= \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad \text{for } (x, y) \neq (0, 0) \end{aligned}$$

نوضح كتمرين أن المشتقة الجزئية للدالة  $f$  بالنسبة لمتجه  $(a, b)$  عند  $(0, 0)$  هي

$$(39.9) \quad D_{(a,b)}f(0, 0) = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \quad (a, b) \neq (0, 0)$$

وفي الحالة الخاصة نجد أن  $D_1f(0, 0) = 0$  و  $D_2f(0, 0) = 0$  إذا كانت المشتقة  $Df$  موجودة عند النقطة  $(0, 0)$  فتثبت نتيجة (٢٩-٧) أن

$$D_{(a,b)}f(0, 0) = Df(0, 0)(a, b) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$$

ما يخالف (٢٩-٧) .

(ب) سنوضح فيما يلي أنه إذا كانت  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  وإذا كانت المشتقات الجزئية للدالة  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^q$  متصلة عند  $c$  ، فإن  $Df(c)$  موجودة .

٣٩-٨ أمثلة . (أ) نفرض أن  $A \subseteq \mathbb{R}$  ونفرض أن  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  حينئذ  $f$  قابلة للتفاضل عند نقطة داخلية  $c$  من  $A$  بمفهوم تعريف (٣٩-٢) إذا وإذا فقط كانت المشتقة العادية

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(c+t) - f(c)}{t} = f'(c)$$

موجودة . في هذه الحالة تكون المشتقة  $Df(c)$  هي دالة خطية للفراغ  $\mathbb{R}$  إلى الفراغ  $\mathbb{R}$  ومعرفة بالتعريف

$$u \mapsto f'(c)u$$

أى إن  $Df(c)$  ترسم  $u \in \mathbb{R}$  إلى حاصل ضرب  $u$  و  $f'(c)$  . ( باستخدام المصطلحات العلمية للمصفوفة ، تكون المشتقة  $Df(c)$  هي الراسم الخطى الممثل بالمصفوفة  $1 \times 1$  ذات عنصر واحد فقط هو  $(f'(c))$  .

تقليدياً ، بدلا من كتابة  $u$  لرمز إلى العدد الحقيقي الذى تؤثر عليه الدالة الخطية للمشتقة  $Df(c)$  ، يكتب الشخص أحيانا الرمز العجيب  $dx$  ( هنا الحرف «d» تلعب دوراً كبادئة في أول الكلمة وليس لها معنى آخر ) . بعد إجراء هذا واستخدام رموز . نظرية لينز (\*) للمشتقة يستعمل ، تصبح الصيغة

$$Df(c)(u) = f'(c)u$$

$$Df(c)(dx) = \frac{df}{dx}(c) dx$$

(ب) نفرض أن  $A \subseteq \mathbb{R}$  ونفرض أن  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^q$  ( $q > 1$ ) . إذن يمكن تمثيل  $f$  بالدوال الإحداثية «

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_q(x)), \quad x \in A$$

يجب على القارئ . كثرين أن يبرهن على أن  $f$  قابلة للتفاضل عند نقطة داخلية  $c$  من  $A$  إذا وإذا فقط كان لكل من الدوال حقيقة القيمة  $f_1, \dots, f_q$  مشتقة عند  $c$  . في هذه الحالة ، تكون المشتقة  $Df(c)$  هي دالة خطية للفراغ  $\mathbb{R}$  إلى  $\mathbb{R}^q$  وتكون مطاة بالملافة .

$$u \mapsto u(f'_1(c), \dots, f'_q(c)), \quad u \in \mathbb{R}$$

(\*) جوتفريد فيلهلم لينز (١٦٤٦ - ١٧١٦) ، وإسمحاق نيوتن (١٦٤٢ - ١٧٢٧) هما المخترعان المتعاونان لعلم التفاضل والتكامل . قضى لينز معظم حياته خاماً للوق هانوفر وكان عبقرية عالمياً وساهم بكثرة في الرياضيات والقانون والفلسفة وعلم اللاهوت وعلم اللغات والتاريخ .

إذن  $Df(c)$  ترسم عدداً حقيقياً  $u$  إلى حاصل ضرب  $u$  والمتجه الثابت .

$$f'(c) = (f'_1(c), \dots, f'_n(c))$$

إذا فكرنا فإن  $f$  هي « منحني » فإن هذا المتجه يسمى « متجهاً مماسياً » للدالة  $f$  عند النقطة  $f(c)$ .

(ج) نفرض أن  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  ( $p > 1$ ) ونفرض أن  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  حينئذ ينتج من نتيجة (٣٩ - ٧) أنه إذا كانت المشتقة  $Df(c)$  موجودة عند نقطة  $c$  داخلية في  $A$ ، فإن كلا من المشتقات الجزئية  $D_1f(c), \dots, D_p f(c)$  يجب أن تكون موجودة ويكون  $Df(c)$  هو الراسم الخطي للنقطة  $c \in \mathbb{R}^p$  إلى  $\mathbb{R}$  ويعطى بما يلي

$$Df(c)(u) = u_1 D_1f(c) + \dots + u_p D_p f(c).$$

وبالرغم من أن مجرد وجود هذه المشتقات الجزئية لا يدل على وجود المشتقة ، فسرى فيما بعد أن اتصالهم عند النقطة  $c$  لا يضمن وجود المشتقة .

بدلاً من  $u = (u_1, \dots, u_p)$  نكتب أحياناً  $dx = (dx_1, \dots, dx_p)$  للنقطة في  $\mathbf{R}^p$  التي تؤخذ المشتقة عندها بكتابة هذا وباستخدام رمز نظرية ليبنز التفاضلات الجزئية ، يصبح القانون السابق

$$Df(\vec{c})(dx) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c) dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(c) dx_n$$

(د) نفرض الآن أن  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  وأن  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^q$  حيث  $p > 1, q > 1$ .  
يمكن في هذه الحالة تمثيل  $y = f(x)$

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_p) \\ &\vdots \\ y_q &= f_q(x_1, \dots, x_p) \end{aligned}$$

من  $q$  دالة المتغيرات عددها  $p$  . إذا كانت  $f$  قابلة للتفاضل عند نقطة  $c = (c_1, \dots, c_p)$  في  $A$  ، فنثبت كمتزبن أن كلا من المشتقات الجزئية  $D_i f(c) = (f_{,i}(c))$  يجب أن تكون موجودة عند  $c$  . ( وفي الحالة العامة يكون أيضاً هذا الشرط الأخير غير كاف لقابليته التفاضل للدالة  $f$  عند  $c$  ) . عند وجود  $Df(c)$  ، فإن الدالة الخطية التي ترسم النقطة  $u = (u_1, \dots, u_p)$  للفراغ  $\mathbf{R}^p$  إلى النقطة  $w = (w_1, \dots, w_q)$  للفراغ  $\mathbf{R}^q$  مطعاة بأنها

[illegible]

المشتقة  $Df(c)$  هي الراسم الخطي للفراغ  $\mathbf{R}^p$  إلى الفراغ  $\mathbf{R}^q$  المعين بالمصفوفة  $q \times p$  التي عناصرها هي



$$(39.11) \quad \begin{bmatrix} D_1 f_1(c) & D_2 f_1(c) & \cdots & D_p f_1(c) \\ D_1 f_2(c) & D_2 f_2(c) & \cdots & D_p f_2(c) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_q(c) & D_2 f_q(c) & \cdots & D_p f_q(c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1,1}(c) & f_{1,2}(c) & \cdots & f_{1,p}(c) \\ f_{2,1}(c) & f_{2,2}(c) & \cdots & f_{2,p}(c) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{q,1}(c) & f_{q,2}(c) & \cdots & f_{q,p}(c) \end{bmatrix}$$

لاحظنا من قبل ( انظر نظرية ٢١ - ٢ ) أن مثل هذا النظام المرتب لأعداد حقيقية يعين دالة خطية في  $R^p$  إلى  $R^q$  . تسمى المصفوفة ( ١١ - ٣٩ ) بمصفوفة جاكوبيان للمجموعة ( ٩ - ٣٩ ) عند النقطة  $c$  . إذا كانت  $p=q$  فإن محدد المصفوفة ( ١١ - ٣٩ ) يسمى بمحدد جاكوبيان ، أو ببساطة الجاكوبيان للمجموعة ( ١٠ - ٣٩ ) عند النقطة  $c$  . يرمز إلى محدد جاكوبيان مراراً (\*) بالرمز

$$\left. \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_p)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_p)} \right|_{x=c} \quad \text{أو} \quad J_f(c)$$

### وجود المشتقة :

برهنا في نظرية ( ٩ - ٣٩ ) عل أن وجود المشتقة عند نقطة يثبت الوجود لكل المشتقات الجزئية عند تلك النقطة . رأينا في الملاحظة الموجودة بعد نتيجة ( ٧ - ٣٩ ) أن مجرد الوجود للمشتقات الجزئية لا يضمن وجود المشتقة حتى عندما  $p=2, q=1$  . سنوضح الآن أن الاتصال للمشتقة الجزئية عند النقطة  $c$  يكون كافياً لوجود المشتقة عند  $c$  .

٣٩ - ٩ نظرية . نفرض أن  $A \subseteq R^p$  ، نفرض أن  $f: A \rightarrow R^q$  ، ونفرض أن  $c$  نقطة داخلية من  $A$  . إذا كانت المشتقات الجزئية  $D_i f_j$  ( $i=1, \dots, q, j=1, \dots, p$ ) موجودة في جوار النقطة  $c$  ومتصلة عند  $c$  ، فإن  $f$  تكون قابلة للتفاضل عند  $c$  . وبالإضافة إلى ذلك تمثل  $Df(c)$  بالمصفوفة  $q \times p$  ( ١١ - ٣٩ ) .

البرهان . سنثبت الحالة التي فيها  $q=1$  بالتفصيل . إذا كانت  $\varepsilon > 0$  فنفرض أن  $\delta(\varepsilon) > 0$  بحيث إنه إذا كانت  $j=1, 2, \dots, p$  و  $\|y-c\| \leq \delta(\varepsilon)$  ، فإن

$$(39.12) \quad |Df(y) - Df(c)| < \varepsilon$$

(\*) كارل ( ج . ي ) يعقوب ( ١٨٠٤ - ١٨٥١ ) كان أستاذاً في كينجزبرج وبرلين وكانت أبحاثه الأساسية في « الدوال الناقصة » ولكنه معروف أيضاً بمساهماته في المحددات والديناميكا .

إذا كانت  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  و  $c = (c_1, c_2, \dots, c_p)$  ففرض  $z_1, z_2, \dots, z_{p-1}$  ترمز إلى النقط

$$z_1 = (c_1, x_2, \dots, x_p), \quad z_2 = (c_1, c_2, x_3, \dots, x_p) \\ \dots, z_{p-1} = (c_1, c_2, \dots, c_{p-1}, x_p)$$

ونفرض أن  $z_p = c$  و  $z_0 = x$  إذا كانت  $\|x - c\| \leq \delta(\varepsilon)$  ، فإنه من السهل ملاحظة أن  $\|z_j - c\| \leq \delta(\varepsilon)$  عند  $j = 0, 1, \dots, p$  . نكتب الفرق  $f(x) - f(c)$  كحاصل جمع تلسكوبي .

$$f(x) - f(c) = \sum_{i=1}^p \{f(z_{i-1}) - f(z_i)\}$$

إذا استخدمنا نظرية القيمة المتوسطة (٢٧ - ٢٦) لمحد الذي ترتبيه  $j$  th من هذا المجموع ، نحصل على نقطة  $\bar{z}_j$  ، واقمة على جزء الخط الواصل بين النقطتين  $z_{j-1}$  و  $z_j$  بحيث إن

$$f(z_{i-1}) - f(z_i) = (x_i - c_i) D_i f(\bar{z}_i)$$

إذن ، نحصل على

$$f(x) - f(c) - \sum_{i=1}^p (x_i - c_i) D_i f(c) = \sum_{i=1}^p (x_i - c_i) \{D_i f(\bar{z}_i) - D_i f(c)\}$$

وحسب المتباينة (٣٩ - ١٢) تسيطر القيمة  $\varepsilon$  على كل كمية موجودة داخل قوسين في الصيغة الأخيرة هي سائدة القانون الأخير . باستخدام متباينة شفارتز لحاصل الجمع الأخير ، نحصل على التقدير

$$\left\| f(x) - f(c) - \sum_{i=1}^p (x_i - c_i) D_i f(c) \right\| \leq (\varepsilon \sqrt{p}) \|x - c\|$$

$$\|x - c\| \leq \delta(\varepsilon)$$

قد برهننا أن  $f$  قابلة للتفاضل عند  $c$  وأن مشتقتها  $Df(c)$  هي دالة خطية من  $\mathbb{R}^p$  إلى  $\mathbb{R}$  وتعمل بالقانون

$$u = (u_1, \dots, u_p) \mapsto Df(c)(u) = \sum_{i=1}^p u_i D_i f(c)$$

في الحالة حيث التي تأخذ  $f$  فيها القيم في الفراغ  $\mathbb{R}^q$  حيث  $q > 1$  نستخدم نفس الاستدلال لكل من الدوال حقيقية القيمة  $f_i$  ،  $i = 1, 2, \dots, q$  ، التي تحدث في التمثيل الإحداثي للراسم  $f$  . سنترك تفاصيل هذا الاستدلال كتمرين . وهو المطلوب إثباته

## تمريعات :

٣٩ - (أ) نفرض أن  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  معرفة بأنها

$$f(x, y) = \frac{x}{y} \quad \text{عند } y \neq 0, \\ = 0 \quad \text{عند } y = 0$$

أثبت أن المشتقات الجزئية  $D_1 f(0, 0), D_2 f(0, 0)$  موجودة ومساوية إلى صفر .  
لكن ، المشتقة للدالة  $f$  عند النقطة  $(0, 0)$  بالنسبة لمتجه  $u = (a, b)$  غير موجودة إذا كانت  $ab \neq 0$  أثبت أن  $f$  غير متصلة عند  $(0, 0)$  ؛ في الحقيقة ،  $f$  ليست حتى محدودة في جوار  $(0, 0)$  .

٣٩ - (ب) نفرض أن  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  معرفة بأنها

$$g(x, y) = 0 \quad \text{عند } xy = 0, \\ = 1 \quad \text{عند } xy \neq 0$$

أثبت أن المشتقات الجزئية  $D_1 g(0, 0), D_2 g(0, 0)$  موجودة ومساوية إلى صفر . لكن ، المشتقة للدالة  $g$  عند  $(0, 0)$  بالنسبة إلى متجه  $u = (a, b)$  غير موجودة إذا كان  $ab \neq 0$  أثبت أن  $g$  غير متصلة عند  $(0, 0)$  ؛ لكن ،  $g$  محدودة في جوار من  $(0, 0)$  .

٣٩ - (ج) نفرض أن  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  معرفة بأنها

$$h(x, y) = 0 \quad \text{عند } (x, y) = (0, 0), \\ = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{عند } (x, y) \neq (0, 0)$$

أثبت أن المشتقات الجزئية  $D_1 h(0, 0), D_2 h(0, 0)$  موجودة ومساوية إلى صفر . لكن ، المشتقة للدالة  $h$  عند النقطة  $(0, 0)$  بالنسبة إلى متجه  $u = (a, b)$  غير موجودة إذا كان  $ab \neq 0$  أثبت أن  $h$  غير متصلة عند النقطة  $(0, 0)$  .

٣٩ - (د) نفرض أن  $k: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  معرفة بأنها

$$k(x, y) = 0 \quad \text{عند } (x, y) = (0, 0), \\ = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad \text{عند } (x, y) \neq (0, 0)$$

أثبت أن المشتقة الجزئية للدالة  $k$  عند النقطة  $(0, 0)$  بالنسبة إلى أي متجه  $u = (a, b)$  موجودة وأن

$$D_a k(0, 0) = \frac{b^2}{a} \quad \text{إذا } a \neq 0$$

أثبت أن  $k$  غير متصلة ومن ثم فهي غير قابلة للتفاضل عند  $(0, 0)$ .

$$\begin{aligned} \text{٣٩ - (أ)} \quad & \text{نفرض أن } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ معرفة بأنها} \\ & f(x, y) = 0 \quad \text{عند } (x, y) = (0, 0) \\ & = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad \text{عند } (x, y) \neq (0, 0) \end{aligned}$$

أثبت أن المشتقة الجزئية للدالة  $f$  عند النقطة  $(0, 0)$  بالنسبة إلى أى متجه  $u = (a, b)$  موجودة وأن

$$D_u f(0, 0) = \frac{ab^2}{a^2 + b^2} \quad \text{إذا } (a, b) \neq (0, 0).$$

أثبت أن  $f$  تكون متصلة لكن ليست قابلة للتفاضل عند النقطة  $(0, 0)$ .

$$\begin{aligned} \text{٣٩ - (و)} \quad & \text{نفرض أن } F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ معرفة بأنها} \\ & F(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{إذا كانت } x, y \text{ قياسيين} \\ & -0 \quad \text{خلاف ذلك} \end{aligned}$$

أثبت أن  $F$  تكون متصلة فقط عند النقطة  $(0, 0)$  وقابلة للتفاضل هناك.

$$\text{٣٩ - (ز)} \quad \text{نفرض أن } G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ معرفة بأنها}$$

$$\begin{aligned} G(x, y) &= (x^2 + y^2) \sin 1/(x^2 + y^2) \quad \text{عند } (x, y) \neq (0, 0), \\ &= 0 \quad \text{عند } (x, y) = (0, 0) \end{aligned}$$

أثبت أن  $G$  قابلة للتفاضل عند كل نقطة للفراغ  $\mathbb{R}^2$  لكن المشتقتين الجزئيتين  $D_1 G$  و  $D_2 G$  غير محدودتين (ومن ثم غير متصلتين) في جوار النقطة  $(0, 0)$ .

$$\text{٣٩ - (ح)} \quad \text{نفرض أن } H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ معرفة بأنها}$$

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \left( x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x}, y \right) \quad \text{عند } x \neq 0, \\ &= (0, y) \quad \text{عند } x = 0 \end{aligned}$$

أثبت أن  $D_1 H$  متصلة عند كل نقطة وأن  $D_2 H$  موجودة ومتصلة في جوار النقطة  $(0, 0)$ .  
أثبت أن  $H$  قابلة للتفاضل عند  $(0, 0)$ .

٣٩ - (ط) نفرض أن  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  ، ونفرض أن  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^q$  قابلة للتفاضل عند نقطة  $c$  داخلية في  $A$  ، ونفرض أن  $v \in \mathbb{R}^q$  . إذا عرفنا  $g: A \rightarrow \mathbb{R}$  بأنها  $g(x) = f(x) \cdot v$  لجميع  $x \in A$  ، أثبت أن  $g$  قابلة للتفاضل عند  $c$  وأن

$$Dg(c)(u) = (Df(c)(u)) \cdot v \quad \text{عند } u \in \mathbb{R}^p$$

٣٩ - (ي) نفرض أن  $c$  نقطة داخلية من  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  ونفرض أن  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  (أ) إذا كانت  $f$  قابلة للتفاضل عند  $c$  ، أثبت أنه يوجد متجه وحيد  $v_c \in \mathbb{R}^p$  بحيث إن

يسمى المتجه  $v_c$  بالميل للدالة  $f$  عند النقطة  $c$  ، ويرمز له بالرمز  $\nabla f$  أو  $\text{grad } f(c)$  .  
وضح أن

$$\nabla f = (D_1 f(c), \dots, D_p f(c))$$

(ب) استخدم متباينة شفارتز لإثبات أنه إذا كانت  $\|u\|=1$  و  $u \in \mathbb{R}^p$  فإن الدالة  $u \mapsto D_u f(c)$  لها نهاية عظمى عندما تكون  $u$  مضاعفاً موجباً للدالة  $f$  . ومن ثم يكون الاتجاه الذى فيه تكون المشتقة الاتجاهية للدالة  $f$  عند النقطة  $c$  في نهاية عظمى هو ميل الدالة  $f$  عند النقطة  $c$  .

٣٩ - (ك) نفرض أن  $c$  نقطة داخلية من  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  ، ونفرض أن  $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$  قابلة للتفاضل عند  $c$  وأن  $\alpha \in \mathbb{R}$  . أثبت أن

$$\nabla_c(\alpha f) = \alpha \nabla_c f, \quad \nabla_c(f+g) = \nabla_c f + \nabla_c g,$$

$$\nabla_c(fg) = f(c) \nabla_c g + g(c) \nabla_c f$$

٣٩ - (ل) أوجد الميل للدوال الآتية عند نقطة اختيارية في الفراغ  $\mathbb{R}^3$  .

$$f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (أ)$$

$$f_2(x, y, z) = x^2 - yz + z^2 \quad (ب)$$

$$f_3(x, y, z) = xyz \quad (ج)$$

٣٩ - (م) أوجد المشتقات الاتجاهية لكل من الدوال المذكورة في (٣٩ - ل) عند النقطة  $(0, 1, 2)$  في الاتجاه إلى النقطة  $(0, 2, 3)$  .

٣٩ - (ن) نفرض أن  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  ونفرض أن دالة  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  تمثل سطحاً  $S_f$  في  $\mathbb{R}^3$  بشكلها صراحة :

$$S_f = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in A\}$$

إذا كانت الدالة  $f$  قابلة للتفاضل عند نقطة داخلية  $(x_0, y_0)$  من  $A$  فإن المستوى المماس للسطح  $S_f$  عند النقطة  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  يمتلئ بشكل الراسم المألوف  $A_{(x_0, y_0)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  والمعروف بأنه

$$A_{(x_0, y_0)}(x, y) = f(x_0, y_0) + Df(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$$

أثبت أن المستوى المماس للسطح  $S_f$  عند هذه النقطة

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x_0, y_0) + D_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + D_2 f(x_0, y_0)(y - y_0)\}$$

٣٩ - (س) أوجد المستويات المماسية للسطوح في  $\mathbb{R}^3$  المثلة بأشكال الدوال الآتية للنقط المعينة . ارسم شكلاً تخظيئياً .

(أ)  $f_1(x, y) = x^2 + y^2$  عند النقطة  $(0, 0)$  وعند النقطة  $(1, 2)$  .

(ب)  $f_2(x, y) = xy$  عند النقطة  $(0, 0)$  وعند النقطة  $(1, 2)$  .

(ج)  $f_3(x, y) = (4 - (x^2 + y^2))^{1/2}$  عند النقطة  $(0, 0)$  وعند النقطة  $(1, 1)$  .

٣٩ - (ع) نفرض أن  $J \subseteq \mathbb{R}$  فترة ونفرض أن  $g: J \rightarrow \mathbb{R}^3$  تمثل بارامترياً منحنياً  $C_g$  في الفراغ  $\mathbb{R}^3$  :

$$C_g = \{(g_1(t), g_2(t), g_3(t)) : t \in J\}$$

إذا كانت  $g$  قابلة للتفاضل عند نقطة داخلية  $t_0$  للفترة  $J$  ، فإن الفراغ المماسي للمنحنى  $C_g$  عند النقطة  $A_{t_0}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  يعطى بارامترياً بالراسم المألوف  $A_{t_0}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  والمعروف بأنه

$$A_{t_0}(t) = g(t_0) + Dg(t_0)(t - t_0)$$

أثبت أن الفراغ المماسي للمنحنى  $C_g$  عند هذه النقطة هو

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = g_1(t_0) + g'_1(t_0)(t - t_0),$$

$$y = g_2(t_0) + g'_2(t_0)(t - t_0), \quad z = g_3(t_0) + g'_3(t_0)(t - t_0)\}$$

إذا كانت  $g'_1(t_0), g'_2(t_0), g'_3(t_0)$  ليست كلها أصفاراً ، فإن هذا الفراغ المماسي هو مستقيم في  $\mathbb{R}^3$  ويسمى الخط المماسي .

٣٩ - (ف) أوجد المعادلات البارامتريّة للمنحنيات المماسية للمنحنيات الآتية في الفراغ  $\mathbb{R}^3$  عند النقط المعينة :

(أ)  $g: t \rightarrow (x, y, z) = (t, t^2, t^3)$

عند النقاط المناظرة إلى  $t = 0$  ،  $t = 1$  .

(ب)  $g: t \rightarrow (x, y, z) = (t - 1, t^2, 2)$

عند النقاط المناظرة إلى  $t = 0$  ،  $t = 1$  .

(ج)  $g: t \rightarrow (x, y, z) = (2 \cos t, 2 \sin t, t)$

عند النقط المناظرة إلى  $t = \pi/2$  ،  $t = \pi$  .

٣٩ - (ص) نفرض أن  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  ونفرض أن  $h: A \rightarrow \mathbb{R}^3$  تمثل سطحاً  $S_h$  في  $\mathbb{R}^3$  بارامترياً :

$$S_h = \{(h_1(s, t), h_2(s, t), h_3(s, t)) : (s, t) \in A\}$$

إذا كانت  $h$  قابلة للتفاضل عند النقطة الداخلية  $(s_0, t_0)$  من  $A$  ، حينئذ يكون الفراغ

المماسي للسطح  $S_h$  عند النقطة  $h(s_0, t_0) = (h_1(s_0, t_0), h_2(s_0, t_0), h_3(s_0, t_0)) \in \mathbb{R}^3$

معطياً بارامترياً بالراسم المألوف  $A_{(s_0, t_0)}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  والمعروف بأنه

$$A_{(s_0, t_0)}(s, t) = h(s_0, t_0) + Dh(s_0, t_0)(s - s_0, t - t_0)$$

أثبت أن الفراغ المماسى إلى  $S_h$  عند هذه النقطة هو

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = h_1(s_0, t_0) + D_1 h_1(s_0, t_0)(s - s_0) + D_2 h_1(s_0, t_0)(t - t_0),$$

$$y = h_2(s_0, t_0) + D_1 h_2(s_0, t_0)(s - s_0) + D_2 h_2(s_0, t_0)(t - t_0),$$

$$z = h_3(s_0, t_0) + D_1 h_3(s_0, t_0)(s - s_0) + D_2 h_3(s_0, t_0)(t - t_0)\}$$

إذا كانت الاتجاهات  $(D_1 h_1(s_0, t_0), D_1 h_2(s_0, t_0), D_1 h_3(s_0, t_0))$  و  $(D_2 h_1(s_0, t_0), D_2 h_2(s_0, t_0), D_2 h_3(s_0, t_0))$  ليست مضاعفات لـ  $\mathbb{R}^3$  لكل منها للاخر فإن هذا الفراغ المماسى هو مستوى في  $\mathbb{R}^3$  ويسمى بالمستوى المماسى .

٣٩ - (ق) أوجد معادلات بارامترية للمستويات المماسية للسطوح الآتية في  $\mathbb{R}^3$  عند النقط المعينة .

(أ)  $h : (s, t) \rightarrow (x, y, z) = (s, t, s^2 + t^2)$  عند النقط المناظرة إلى  $(1, 1)$  و  $(s, t) = (0, 0)$  .

(ب)  $h : (s, t) \rightarrow (x, y, z) = (s + t, s - t, s^2 - t^2)$  عند النقط المناظرة إلى  $(1, 2)$  و  $(s, t) = (0, 0)$  .

(ج)  $h : (t, t) \rightarrow (x, y, z) = (s \cos t, s \sin t, t)$  عند النقط المناظرة إلى  $(2, \pi/2)$  و  $(s, t) = (1, 0)$  .

(د)  $h : (s, t) \rightarrow (x, y, z) = (\cos s \sin t, \sin s \sin t, \cos t)$  عند النقط المناظرة إلى  $(\pi/4, \pi/4)$  و  $(0, \pi/2)$  و  $(s, t) = (0, 0)$  .

٣٩ - (ر) إذا كانت  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  ، وكانت  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  بحيث إن المشتقات الجزئية  $D_1 f, \dots, D_p f$  موجودة ومحدودة في جوار ما من  $c \in A$  ، حينئذ  $f$  تكون متصلة عند  $c$  . (إرشاد : ناقش كما في البرهان لنظرية ٣٩ - ٩) .

٣٩ - (س) نفرض أن  $f$  معرفة في جوار نقطة  $c \in \mathbb{R}^2$  بقيم في  $\mathbb{R}$  . نفرض أن  $D_1 f$  موجودة ومتصلة في جوار النقطة  $c$  وأن  $D_2 f$  موجودة عند  $c$  . أثبت أن  $f$  قابلة للتفاضل عند  $c$  .

٣٩ - (ت) نفرض أن  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  وأن  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^q$  و  $g : A \rightarrow \mathbb{R}^r$  مطاة . وإذا كانت  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r = \mathbb{R}^{q+r}$  معرفة بأنها  $F(x) = (f(x), g(x))$  عند  $x \in A$  ، أثبت أن  $F$  قابلة للتفاضل عند النقطة الداخلية  $c \in A$  إذاً فقط كانت  $g$  .  $f$  قابلتين للتفاضل عند  $c$  . في هذه الحالة نجد أن

$$DF(c)(u) = (Df(c)(u), Dg(c)(u)) \quad \text{عند } u \in \mathbb{R}^p$$

٢٩ - (ث) نفرض أن  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  ،  $B \subseteq \mathbb{R}^q$  ونفرض أن  $G: A \times B \rightarrow \mathbb{R}^r$  قابلة للتفاضل عند النقطة  $(a, b)$  في  $A \times B$  . نعرف  $g_1: A \rightarrow \mathbb{R}^r$  و  $g_2: B \rightarrow \mathbb{R}^r$  بأنه « الراسم الجزئي » عند  $(a, b)$  والمطلوب بما يلي

$$g_1(x) = G(x, b), \quad g_2(y) = G(a, y)$$

لجميع  $x \in A, y \in B$  . أثبت أن  $g_1$  و  $g_2$  قابلتان للتفاضل عند  $a$  و  $b$  ، على الترتيب ، وأن

$$Dg_1(a)(u) = DG(a, b)(u, 0), \quad Dg_2(b)(v) = DG(a, b)(0, v)$$

لجميع  $u \in \mathbb{R}^p, v \in \mathbb{R}^q$  وبالإضافة إلى ذلك ، نجد أن

$$DG(a, b)(u, v) = Dg_1(a)(u) + Dg_2(b)(v)$$

تسمى  $Dg_1(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^r)$  و  $Dg_2(b) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^r)$  أحياناً « قالب تفاضلات جزئية » للدالة  $G$  عند  $(a, b)$  ويرمز لها بالرمز  $D_{(1)}G(a, b)$  و  $D_{(2)}G(a, b)$

## الباب الأربعون — نظريتنا قاعدة السلسلة والقيمة المتوسطة :

سوف نثبت أولاً العلاقات الجبرية الأساسية المرتبطة بالمشتقات . سنستخدم هذه الخواص ، إلى هي نفس الخواص لدوال حقيقية القيمة لمغير واحد ، بكثيرة فيما يلي .

٤٠ - ١ نظرية . نفرض أن  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  وأن  $c$  نقطة داخلية من  $A$  .

(أ) إذا كانت  $g$  و  $f$  معرفتين في  $A$  إلى  $\mathbb{R}^q$  وقابلتين للتفاضل عند  $c$  ، وإذا كانت  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ، حينئذ تكون الدالة  $h = \alpha f + \beta g$  قابلة للتفاضل عند  $c$  ، يكون

$$Dh(c) = \alpha Df(c) + \beta Dg(c)$$

(ب) إذا كانت  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^q$  و  $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}$  قابلتين للتفاضل عند  $c$  ، فإن دالة حاصل ضرب  $k = \varphi f: A \rightarrow \mathbb{R}^q$  تكون قابلة للتفاضل عند  $c$  ويكون

$$Dk(c)(u) = \{D\varphi(c)(u)\}f(c) + \varphi(c)\{Df(c)(u)\} \quad \text{عند } u \in \mathbb{R}^p$$

البرهان . (أ) إذا كانت  $\varepsilon > 0$  ، فتوجد  $\delta_1(\varepsilon) > 0$  و  $\delta_2(\varepsilon) > 0$  بحيث  
إنه إذا كانت  $\|x - c\| \leq \inf \{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$  ، فإن  
 $\|f(x) - f(c) - Df(c)(x - c)\| \leq \varepsilon \|x - c\|$  ،  
 $\|g(x) - g(c) - Dg(c)(x - c)\| \leq \varepsilon \|x - c\|$   
أي أنه ، إذا كانت  $\|x - c\| \leq \inf \{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$  فإن

$$\|h(x) - h(c) - \{\alpha Df(c)(x - c) + \beta Dg(c)(x - c)\}\| \leq (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon \|x - c\|$$



بما أن  $\alpha Df(c) + \beta Dg(c)$  دالة خطية للفراغ  $R^p$  إلى الفراغ  $R^q$  ، فينتج أن  $h$  قابلة للتفاضل عند  $c$  وأن  $Dh(c) = \alpha Df(c) + \beta Dg(c)$  .

(ب) يوضح حساب بسيط أن

$$\begin{aligned} k(x) - k(c) - \{D\varphi(c)(x-c)f(c) + \varphi(c)Df(c)(x-c)\} \\ = \{\varphi(x) - \varphi(c) - D\varphi(c)(x-c)\}f(x) \\ + D\varphi(c)(x-c)\{f(x) - f(c)\} + \varphi(c)\{f(x) - f(c) - Df(c)(x-c)\} \end{aligned}$$

بما أن  $Df(c)$  موجودة ، فلستنتج من مفترض ( ٣٩ - ٥ ) أن  $f$  متصلة عند  $c$  ، ومن ثم يوجد مقدار ثابت  $M$  بحيث إن  $\|f(x)\| < M$  عند  $\|x - c\| \leq \delta$  . يمكن أن يتضح من هذا أن كل الحدود الموجودة في الطرف الأيمن من المعادلة الأخيرة يمكن جعلها صغيرة بدرجة اختيارية باختيار  $\|x - c\|$  صغيراً صغيراً كافياً . هذا يثبت (ب) . وهو المطلوب إثباته

تؤكد النتيجة الآتية الهامة جداً أن المشتقة لتركيب دالتين قابلتين للتفاضل هي التركيب لمشتقاتهما .

٤٠ - قاعدة السلسلة . نفرض أن  $f$  لها نطاق  $A \subseteq R^p$  ومدى في الفراغ  $R^q$  ، ونفرض أن  $g$  لها نطاق  $B \subseteq R^q$  ومدى في الفراغ  $R^r$  . نفرض أن  $f$  قابلة للتفاضل عند  $c$  وأن  $g$  قابلة للتفاضل عند  $b = f(c)$  . حينئذ يكون التركيب  $h = g \circ f$  قابلاً للتفاضل عند  $c$  ويكون

$$(40.1) \quad Dh(c) = Dg(b) \circ Df(c)$$

وبالتعاقب نكتب

$$(40.2) \quad D(g \circ f)(c) = Dg(f(c)) \circ Df(c)$$

البرهان . يدل الفرض على أن  $c$  نقطة داخلية من التطاق للتركيب  $h = g \circ f$  . ( لماذا ؟ ) نفرض أن  $\varepsilon > 0$  ونفرض أن  $\delta(\varepsilon, f)$  و  $\delta(\varepsilon, g)$  هي كما في تعريف ( ٣٩ - ٢ ) . فينتج من مفترض ( ٣٩ - ٥ ) أنه يوجد عدنان موجبان دقيقان  $K$  و  $\gamma$  بحيث إنه إذا كانت  $\|x - c\| \leq \gamma$  ، فإن  $f(x) \in B$  وأن

$$(40.3) \quad \|f(x) - f(c)\| \leq K \|x - c\|$$

نكتب للبساطة ،  $L_f = Df(c)$  و  $L_g = Dg(b)$  . من نظرية ( ٢١ - ٣ ) يوجد مقدار ثابت  $M$  بحيث إنه

$$(40.4) \quad \|L_g(u)\| \leq M \|u\|, \quad \text{for } u \in R^q$$

إذا كانت  $\|x - c\| \leq \inf \{ \gamma, (1/K) \delta(\varepsilon, g) \}$  ، فدل ( ٤٠ - ٣ ) على أن

التي تعني أن  $\|f(x) - f(c)\| \leq \delta(\varepsilon, g)$

$$(40.5) \quad \|g(f(x)) - g(f(c)) - L_g(f(x) - f(c))\| \leq \varepsilon \|f(x) - f(c)\| \leq \varepsilon K \|x - c\|$$

إذا احتجنا أيضاً إلى أن  $\|x - c\| \leq \delta(\varepsilon, f)$  ، فنستنتج من (٤٠ - ٤١) أن

$$\|L_g\{f(x) - f(c) - L_f(x - c)\}\| \leq \varepsilon M \|x - c\|$$

إذا ربطنا هذه العلاقة الأخيرة مع (٤٠ - ٤١) ، نستنتج أنه إذا كانت

$$x \in A \text{ و } \|x - c\| \leq \delta_1 \text{ كانت } \delta_1 = \inf \{ \gamma, (1/K) \delta(\varepsilon, g), \delta(\varepsilon, f) \}$$

فإن

$$\|g(f(x)) - g(f(c)) - L_g(L_f(x - c))\| \leq \varepsilon(K + M) \|x - c\|$$

التي تعني أن

$$\|g \circ f(x) - g \circ f(c) - L_{g \circ f}(x - c)\| \leq \varepsilon(K + M) \|x - c\|$$

وهو المطلوب إثباته

نستنتج أن  $Dh(c) = L_g \circ L_f$

بالحفاظ على الرموز المستخدمة في برهان النظرية ، تكون  $L_f = Df(c)$  دالة خطية من  $R^p$  إلى  $R^q$  وتكون  $L_g = Dg(b)$  دالة خطية للفراغ  $R^q$  إلى الفراغ  $R^r$  . فيكون التركيب  $L_g \circ L_f$  دالة خطية للفراغ  $R^p$  إلى  $R^r$  ، كالمطلوب ، لأن  $h = g \circ f$  دالة معرفة في جزء من الفراغ  $R^p$  بقيم في  $R^r$  . سنعبر الآن بمض أمثلة لهذه النتيجة .

٤٠ - ٣ أمثلة . (أ) نفرض أن  $p = q = r = 1$  ، إذن المشتقة  $Df(c)$  هي الدالة الخطية التي ترسل العدد الحقيقي  $u$  إلى  $f'(c)u$  ، وبالمثل في حالة  $Dg(b)$  . ينتج أن المشتقة للتركيب  $g \circ f$  ترسل العدد الحقيقي  $u$  إلى  $g'(b)f'(c)u$  .

(ب) نفرض أن  $p > 1, q = r = 1$  . طبقاً لمثال (٨ - ٣٩) (ج) ، نأخذ المشتقة للدالة  $f$  عند النقطة  $c$  النقطة  $w = (w_1, \dots, w_p)$  للفراغ  $R^p$  إلى العدد الحقيقي

$$D_1f(c)w_1 + \dots + D_pf(c)w_p$$

وإذن ترسل مشتقة  $g \circ f$  عند النقطة  $c$  هذه النقطة للفراغ  $R^p$  إلى العدد الحقيقي

$$g'(b)[D_1f(c)w_1 + \dots + D_pf(c)w_p]$$

(ج) نفرض أن  $p = r = 1, q > 1$  . حسب مثال (٨ - ٣٩) (ب) ، (ج) ،

نأخذ المشتقة  $Df(c)$  نأخذ العدد الحقيقي  $u$  إلى النقطة

$$Df(c)(u) = uf'(c) = (f'_1(c)u, \dots, f'_q(c)u) \quad \text{in } R^q$$

والمشتقة  $Dg(b)$  ترسل النقطة  $w = (w_1, \dots, w_q)$  في الفراغ  $R^q$  إلى العدد الحقيقي

$$D_1g(b)w_1 + \dots + D_qg(b)w_q$$

ينتج أن مشتقة  $h = g \circ f$  ترسل العدد الحقيقي  $u$  إلى العدد الحقيقي

$$Dh(c)u = \{D_1g(b)f'_1(c) + \dots + D_qg(b)f'_q(c)\}u = u\{Dg(b)(f'(c))\}$$

يرمز للكية داخل القوسين ، التي هي  $h'(c) = (g \circ f)'(c)$  أحياناً بالرمز الأقل دقة

$$\frac{\partial g}{\partial y_1} \frac{df_1}{dx} + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_q} \frac{df_q}{dx}$$

يجب أن يكون مفهوماً في هذه الحالة أن المشتقات تحسب عند نقطة مناسبة .

(د) تعتبر الحالة التي فيها  $p = q = 2$  ،  $r = 3$  . لتبسيط الرموز ، نرمز

للأحداثيات المتغيرة في  $R^p$  بأنها  $(x, y)$  ، في الفراغ  $R^q$  بأنها  $(w, z)$  وفي الفراغ  $R^r$

بأنها  $(r, s, t)$  . إذن يمكن التعبير عن دالة  $f$  في  $R^p$  إلى  $R^q$  في الصورة

$$w = W(x, y), \quad z = Z(x, y)$$

ودالة  $g$  في  $R^q$  إلى  $R^r$  يمكن التعبير عنها في الصورة

$$r = R(w, z), \quad s = S(w, z), \quad t = T(w, z)$$

المشتقة  $Df(c)$  ترسل  $(\xi, \eta)$  إلى  $(\omega, \zeta)$  طبقاً للقانونين

$$\begin{aligned} \omega &= W_x(c)\xi + W_y(c)\eta, \\ \zeta &= Z_x(c)\xi + Z_y(c)\eta \end{aligned} \quad (40.6)$$

نكتب هنا  $W_x$  لتدل على  $D_x W = D_1 W$  الخ . أيضاً المشتقة  $Dg(b)$  ترسل  $(\omega, \zeta)$  إلى  $(\rho, \sigma, \tau)$  طبقاً للعلاقات

$$\begin{aligned} \rho &= R_w(b)\omega + R_z(b)\zeta, \\ \sigma &= S_w(b)\omega + S_z(b)\zeta, \\ \tau &= T_w(b)\omega + T_z(b)\zeta \end{aligned} \quad (40.7)$$

يوضح حساب روتيني أن المشتقة  $g \circ f$  ترسل  $(\xi, \eta)$  إلى  $(\rho, \sigma, \tau)$  بواسطة

$$\begin{aligned} \rho &= \{R_w(b)W_x(c) + R_z(b)Z_x(c)\}\xi + \{R_w(b)W_y(c) + R_z(b)Z_y(c)\}\eta, \\ \sigma &= \{S_w(b)W_x(c) + S_z(b)Z_x(c)\}\xi + \{S_w(b)W_y(c) + S_z(b)Z_y(c)\}\eta, \\ \tau &= \{T_w(b)W_x(c) + T_z(b)Z_x(c)\}\xi + \{T_w(b)W_y(c) + T_z(b)Z_y(c)\}\eta \end{aligned} \quad (40.8)$$

ونكتب رموزاً أكثر بلاغة  $dx, dy$  بدلا من  $d\omega, dz$  ،  $\xi, \eta$  بدلا من  $\omega, \zeta$  ،  $dr, ds, dt$  ،

بدلا من  $\rho, \sigma, \tau$  . إذا رمزنا لقيم المشتقة الجزئية  $W_x$  ، عند النقطة  $c$  بأنها  $\partial w / \partial x$  ، الخ ، فإن  $(40-6)$  تصبح

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

بالمثل ، ( ٤٠ - ٧ ) تصيح

$$dr = \frac{\partial r}{\partial w} dw + \frac{\partial r}{\partial z} dz,$$

$$ds = \frac{\partial s}{\partial w} dw + \frac{\partial s}{\partial z} dz,$$

$$dt = \frac{\partial t}{\partial w} dw + \frac{\partial t}{\partial z} dz$$

ونكتب ( ٤٠ - ٨ ) على الصورة

$$dr = \left( \frac{\partial r}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial r}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy,$$

$$ds = \left( \frac{\partial s}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial s}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy,$$

$$dt = \left( \frac{\partial t}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial t}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy$$

في هذه المجموعات الثلاث من القوانين السابقة يكون من المهم التحقق من أن كل المشتقات الجزئية المشار إليها محسوبة عند نقط مناسبة . إذا معاملات  $dx$  ,  $dy$  ... الخ تتحول إلى أعداد حقيقية .

يمكننا التعبير عن معادلة ( ٤٠ - ٦ ) بمصطلحات المصفوفة بقولنا أن الراسم  $Df(c)$

من  $(\xi, \eta)$  إلى  $(\omega, \zeta)$  يعطى بالمصفوفة  $2 \times 2$

$$(40.9) \quad \begin{bmatrix} W_x(c) & W_y(c) \\ Z_x(c) & Z_y(c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x}(c) & \frac{\partial w}{\partial y}(c) \\ \frac{\partial z}{\partial x}(c) & \frac{\partial z}{\partial y}(c) \end{bmatrix}$$

بالمثل ( ٤٠ - ٧ ) تؤكد أن الراسم  $Dg(b)$  من  $(\omega, \zeta)$  إلى  $(\rho, \sigma, \tau)$  يعطى بالمصفوفة  $3 \times 2$  .

$$(40.10) \quad \begin{bmatrix} R_w(b) & R_z(b) \\ S_w(b) & S_z(b) \\ T_w(b) & T_z(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial w}(b) & \frac{\partial r}{\partial z}(b) \\ \frac{\partial s}{\partial w}(b) & \frac{\partial s}{\partial z}(b) \\ \frac{\partial t}{\partial w}(b) & \frac{\partial t}{\partial z}(b) \end{bmatrix}$$

أخيراً ، نؤكد علاقة ( ٤٠ - ٨ ) أن الراسم  $D(g \circ f)(c)$  من  $(\xi, \eta)$  إلى  $(\rho, \sigma, \tau)$  يكون معطياً بالمصفوفة  $3 \times 2$

$$\begin{bmatrix} R_w(b)W_x(c) + R_z(b)Z_x(c) & R_w(b)W_y(c) + R_z(b)Z_y(c) \\ S_w(b)W_x(c) + S_z(b)Z_x(c) & S_w(b)W_y(c) + S_z(b)Z_y(c) \\ T_w(b)W_x(c) + T_z(b)Z_x(c) & T_w(b)W_y(c) + T_z(b)Z_y(c) \end{bmatrix}$$

التي هي حاصل ضرب المصفوفة الموجودة في ( ٤٠ - ١٠ ) في المصفوفة الموجودة في ( ٤٠ - ٩ ) بنفس الترتيب

### نظرية القيمة المتوسطة :

نتجه الآن إلى المسألة الخاصة بالحصول على الحالة العامة لنظرية القيمة المتوسطة ( ٢٧ - ٦ ) لدوال قابلة للتفاضل في  $R^p$  إلى  $R^q$ . سيتضح أن تشابهاً مباشراً لنظرية ( ٢٧ - ٦ ) لا يكون صحيحاً عندما  $q > 1$ . من الممكن أن نتوقع أنه إذا كانت الدالة  $f$  قابلة للتفاضل عند كل نقطة من الفراغ  $R^p$  بقيم في الفراغ  $R^q$  ، وإذا كانت  $a, b$  تنتمي إلى  $R^p$  ، حينئذ توجد نقطة  $c$  ( تقع بين  $a, b$  ) بحيث أن

$$(40.11) \quad f(b) - f(a) = Df(c)(b - a)$$

هذا الاستنتاج يفشل حتى عند  $p = 1, q = 2$  كما يتضح من الدالة  $f$  المعرفة في  $R$  إلى  $R^2$  بالقانون

$$f(x) = (x - x^2, x - x^3)$$

$Df(c)$  هنا دالة خطية في  $R$  إلى  $R^2$  التي ترسل عدداً حقيقياً  $u$  إلى العنصر

$$Df(c)(u) = ((1 - 2c)u, (1 - 3c^2)u)$$

الآن  $f(0) = (0, 0)$  و  $f(1) = (0, 0)$  ، لكن لا توجد نقطة  $c$  بحيث أن

$$Df(c)(u) = (0, 0)$$

لأي قيمة للعدد  $u$  غير صفر في الفراغ  $R$ . إذن لا يمكن للقانون ( ٤٠ - ١١ ) أن يظل صحيحاً في الحالة العامة عندما  $q > 1$  ، حتى عند  $p = 1$ . لكن ، يكفي لتطبيقات كثيرة اعتبار الحالة التي عندها  $q = 1$  وهنا يكون امتداد نظرية القيمة المتوسطة سهلاً .

٤ - ٤٠ نظرية القيمة المتوسطة . نفرض أن  $f$  معرفة في فئة جزئية مفتوحة  $\Omega$  من الفراغ  $R^p$  ولها قيم في  $R$ . نفرض أن الفئة  $\Omega$  تحتوي النقطتين  $a, b$  وجزء الخط المستقيم  $S$  الذي يصلهما ، وأن  $f$  قابلة للتفاضل عند كل نقطة من هذا الجزء . حينئذ توجد نقطة  $c$  في  $S$  بحيث أن

$$(40.11) \quad f(b) - f(a) = Df(c)(b - a)$$

البرهان . نفرض أن  $\varphi: R \rightarrow R^p$  معرفة بأنها

$$\varphi(t) = (1-t)a + tb = a + t(b-a)$$

بحيث أن  $\varphi(0) = a$ ,  $\varphi(1) = b$  و  $\varphi(t) \in S \subseteq \Omega$  عند  $t \in [0, 1]$ . بما أن الفترة الجزئية  $\Omega$  مفتوحة والدالة  $\varphi$  متصلة، فيوجد عدد  $\gamma > 0$  بحيث أن  $\varphi$  ترسم الفترة  $(-\gamma, 1+\gamma)$  إلى  $\Omega$ . نفرض الآن أن  $F: (-\gamma, 1+\gamma) \rightarrow \mathbf{R}$  معرفة بأنها

$$F(t) = f \circ \varphi(t) = f((1-t)a + tb)$$

باستخدام قاعدة السلسلة (أنظر ٤٠ - ٣ (ج) وأيضاً ٤٠ - ٤ (ع) ينتج أن

$$\begin{aligned} F'(t) &= Df((1-t)a + tb)(\varphi'(t)) \\ &= Df((1-t)a + tb)(b-a) \end{aligned}$$

إذا استخدمنا نظرية القيمة المتوسطة (٢٧ - ٦) إلى  $F$ ، نستنتج أنه يوجد  $t_0 \in (0, 1)$  بحيث أن  $F(1) - F(0) = F'(t_0)$ . بفرض  $c = \varphi(t_0) \in S$ ، نحصل على

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= F(1) - F(0) \\ &= F'(t_0) = Df(c)(b-a) \end{aligned}$$

وهو المطلوب إثباته

مع أن معظم الامتداد الطبيعي لنظرية القيمة المتوسطة لا يكون صحيحاً عندما يكون مدى الفراغ هو  $\mathbf{R}^q$ ,  $q > 1$ ، يمكن وجود بعض امتدادات. وأحد هذه الامتدادات الأكثر فائدة يعتمد على متباينة بالأحرى عن متساوية.

٤٠ - ٥ نظرية القيمة المتوسطة. نفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbf{R}^p$  فئة مفتوحة ونفرض أن  $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^q$  نفرض أن  $\Omega$  تحتوى النقطتين  $a, b$  وجزء خط مستقيم  $S$  يصل بين هاتين النقطتين، وأن  $f$  قابلة للتفاضل عند كل نقطة من  $S$ . حينئذ توجد نقطة  $c$  في  $S$  بحيث أن

$$(40.12) \quad \|f(b) - f(a)\| \leq \|Df(c)(b-a)\|$$

البرهان إذا كان  $y_0 = f(b) - f(a)$  المتجه الصفري  $\mathbf{R}^q$ ، فإن النتيجة بسيطة. إذا كانت  $y_0 \neq 0$  نفرض أن  $y_1 = y_0 / \|y_0\|$  ونستخدم حاصل الضرب القياسى في  $\mathbf{R}^q$  لتعريف  $H: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  بأنها

$$H(x) = f(x) \cdot y_1 \quad \text{عند } x \in \Omega$$

من الواضح أن

$$H(b) - H(a) = \{f(b) - f(a)\} \cdot y_1 = \|f(b) - f(a)\|$$

ومن السهل اقتضاح (تمرين ٤٠ - ح) أن

$$DH(x)(u) = \{Df(x)(u)\} \cdot y_1$$

عند  $x \in S, u \in \mathbb{R}^p$  . ينتج من نظرية القيمة المتوسطة ٤٠ - ٤١ أنه توجد نقطة  $c$  في  $S$  بحيث أن

$$\begin{aligned} H(b) - H(a) &= DH(c)(b-a) \\ &= \{Df(c)(b-a)\} \cdot y_1 \end{aligned}$$

إذا استخدمنا متباينة شفارتز وحقيقة كون  $\|y_1\| = 1$  ، نجد أن

$$\|f(b) - f(a)\| = \{Df(c)(b-a)\} \cdot y_1 \leq \|Df(c)(b-a)\|$$

وهو النتيجة المطلوبة وهو المطلوب إثباته

بما أن القيمة المضبوطة للنقطة  $c$  تكون عادة غير معلومة ، فإن النظرية تستخدم غالباً باستعمال النتيجة الآتية ، التي يستخدم نصها مفهوم العمود لراسم خطي  $L$  من  $\mathbb{R}^p$  إلى  $\mathbb{R}^q$  المذكور في تمرين ٢١ - ل . من الضروري فقط أن نتذكر أن  $\|L(u)\| \leq M \|u\|$  لكل  $u \in \mathbb{R}^p$  ، إذا وإذا فقط كان العمود  $\|L\|_{pq} \leq M$  .

٤٠ - ٤١ نتيجة . نفرض صحة فروض نظرية ٤٠ - ٤١ ونفرض أنه يوجد  $M > 0$  بحيث أن  $\|Df(x)\|_{pq} \leq M$  لجميع  $x \in S$  . حينئذ نجد أن

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M \|b - a\|$$

البهان . بما أن  $\|Df(c)(b-a)\| \leq \|Df(c)\|_{pq} \|b-a\|$  ، وبما أن  $c \in S$  نحصل على

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|Df(c)(b-a)\| \leq \|Df(c)\|_{pq} \|b-a\| \leq M \|b-a\|$$

وهو المطلوب إثباته

### تبادل ترتيب التفاضل :

إذا كانت  $f$  دالة لها نطاق في الفراغ  $\mathbb{R}^p$  ومدى في الفراغ  $\mathbb{R}$  ، حينئذ ربما يكون للدالة  $f$  مشتقات جزئية « أولية » عددها  $p$  ، نرمز لها بالرموز

$$D_i f \quad \text{أو} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

كل من المشتقات الجزئية هي دالة لها نطاق في الفراغ  $\mathbb{R}^p$  ومدى في  $\mathbb{R}$  ولذلك كل من هذه الدوال  $p$  ربما يكون لها مشتقات جزئية عددها  $p$  . باتباع الرمز الأمريكي المقبول ، سنشير إلى الدوال  $p^2$  الناتجة ( أو مثل هذه الدوال وجدت ) كالمشتقات الجزئية من الرتب الثانية للدالة  $f$  وسوف نرمز لها بالآتي

$$D_{ij}f \quad \text{أو} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, p$$

ينبغي ملاحظة أن المشتقة الجزئية المقصودة بأى من الرموز السابقة في المشتقة الجزئية بالنسبة إلى  $x_j$  للمشتقة الجزئية للدالة  $f$  بالنسبة إلى  $x_i$  . (بمعنى آخر : أولا  $x_i$  ، ثم  $x_j$  ) .

يمكننا بطريقة مشابهة ، بحث وجود المشتقات الجزئية من الترتيب الثالثة والتي لها رتب أعلى . وكقاعدة ، يمكن لدالة في الفراغ  $\mathbb{R}^p$  إلى الفراغ  $\mathbb{R}$  أن يكون لها  $p^n$  مشتقات جزئية نونية . لكن ، توجد ملائمة ذات الأهمية وهي أنه إذا كانت المشتقات الناتجة متصلة فإن رتبة التفاضل ليست مهمة . وعلاوة على ذلك لانقاص السدد (محتمل تمييزه) للمشتقات الجزئية من رتب أعلى ، فإن هذه القيمة تزيل إلى حد كبير الخطر من التمييز الرمزي الدقيق نوعا ما والمستخدم لرتب مختلفة للتفاضل .

يكفى أن نعتبر تبادل رتبة المشتقات الثانية باعتبار كل الأحداثيات الأخرى ثابتة ، نرى أنه لا يوجد فقد للحالة العامة لاعتبار دالة في الفراغ  $\mathbb{R}^2$  إلى الفراغ  $\mathbb{R}$  . لكى نبسط رموزنا نفرض أن  $(x, y)$  تشير إلى نقطة في الفراغ  $\mathbb{R}^2$  وسوف نوضح أنه إذا كانت  $D_{yx}f$  ،  $D_{xy}f$  موجودة وأنه إذا كانت  $D_{yxx}f$  متصلة عند نقطة ، حينئذ تكون المشتقة الجزئية  $D_{xyx}f$  موجودة عند هذه النقطة ومساوية  $D_{yxx}f$  . سيلاحظ في تمرين (٤٠-٤١) أنه من الممكن أن كلا من  $D_{xyx}f$  و  $D_{yxx}f$  موجودة عند نقطة ومع ذلك ليسا متساويين .

البرير الذى سيستخدم في هذا البرهان هو توضيح أن كلا من هاتين المشتقتين الجزئيتين المختلطتين عند النقطة  $(0, 0)$  هما نهاية خارج القسمة

$$\frac{f(h, k) - f(h, 0) - f(0, k) + f(0, 0)}{hk}$$

عندما تقرب  $(h, k)$  من  $(0, 0)$  .

٤٠-٧ مفترضى . نفرض أن  $f$  معرفة في جوار  $U$  من نقطة الأصل في  $\mathbb{R}^2$  بقيم في  $\mathbb{R}$  ، وأن المشتقتين  $D_{xy}f$  ،  $D_{yx}f$  موجودتان في  $U$  ، وأن  $D_{yxx}f$  متصلة عند  $(0, 0)$  . إذا كانت  $A$  هي الفرق المخلوط

$$A(h, k) = f(h, k) - f(h, 0) - f(0, k) + f(0, 0) \quad (40.13)$$

فنجده أن

$$D_{yx}f(0, 0) = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{A(h, k)}{hk}$$



البرهان . نفرض أن  $\varepsilon > 0$  وأن  $\delta > 0$  صغيرة بدرجة أنه إذا كانت  $|k| < \delta$  ،  
 $|h| < \delta$  ، فإن النقطة  $(h, k)$  تنتمي إلى  $U$  وأن

$$(40.14) \quad |D_{yx}f(h, k) - D_{yx}f(0, 0)| < \varepsilon$$

إذا كانت  $|k| < \delta$  فنعرف  $B$  عند  $|h| < \delta$  بأنها

$$B(h) = f(h, k) - f(h, 0)$$

التي منها ينتج أن  $A(h, k) = B(h) - B(0)$  . حسب الفرض ، المشتقة الجزئية  $D_x f$  موجودة في  $U$  وإذن  $B$  لها مشتقة . بتطبيق نظرية القيمة المتوسطة ٢٧ - ٦ إلى  $B$  ، نجد أنه يوجد عدد  $h_0$  عند  $|h_0| < |h|$  بحيث أن

$$(40.15) \quad A(h, k) = B(h) - B(0) = hB'(h_0)$$

(من الملاحظ أن القيمة للمقدار  $h_0$  تعتمد على القيمة للمقدار  $k$  ، لكن سوف لا يسبب هذا أى صعوبة) بالرجوع إلى تعريف الدالة  $B$  ، نجد أن

$$B'(h_0) = D_x f(h_0, k) - D_x f(h_0, 0)$$

بتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الطرف الأيمن للمعادلة الأخيرة ، نجد أنه يوجد عدد  $k_0$  حيث  $|k_0| < |k|$  بحيث أن

$$(40.16) \quad B'(h_0) = k \{D_{yx}f(h_0, k_0)\}$$

يربط معادلتى (٤٠ - ١٥) ، (٤٠ - ١٦) ، نستنتج أنه إذا كانت  $|h| < \delta$  و  $|k| < \delta$  ، فإن

$$\frac{A(h, k)}{hk} = D_{yx}f(h_0, k_0)$$

حيث  $|k| < |k_0| < |h|$  ،  $|h_0| < |h|$  ،  $0 < |h_0| < |h|$  ،  $0 < |k_0| < |k|$  . ينتج من متباينة (٤٠ - ١٤) والتعير السابق أن

$$\left| \frac{A(h, k)}{hk} - D_{yx}f(0, 0) \right| < \varepsilon$$

عندما  $|k| < \delta$  و  $|h| < \delta$  . وهو المطلوب إثباته

يمكننا الآن الحصول على شرط مفيد (يرجع إلى شفارتز) لتساوى الجزئيات المخلوطة .

٤٠ - ٨ . نظرية . نفرض أن  $f$  معرفة في جوار  $U$  لنقطة  $(x, y)$  في  $\mathbb{R}^2$  بقيم في  $\mathbb{R}$  . نفرض أن المشتقات الجزئية  $D_x f$  ،  $D_y f$  ،  $D_{yx} f$  موجودة في  $U$  وأن  $D_{yx} f$  متصلة عند  $(x, y)$  . حينئذ تكون المشتقة الجزئية  $D_{xy} f$  موجودة عند  $(x, y)$  ويكون

$$D_{xy}f(x, y) = D_{yx}f(x, y)$$

البرهان . لا نفقد الحالة العامة إذا فرضنا أن  $(x, y) = (0, 0)$  وسوف نفعل ذلك ، إذا كانت  $A$  هي الدالة المذكورة في المفترضة السابقة ، فقد لاحظنا أن

$$(40.17) \quad D_{yx}f(0, 0) = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{A(h, k)}{hk}$$

وجود هذه النهاية المزدوجة هي جزء من الاستنتاج . من الفرض ،  $D_y f$  موجودة في  $U$  ، وإذن

$$(40.18) \quad \lim_{k \rightarrow 0} \frac{A(h, k)}{hk} = \frac{1}{h} \{D_y f(h, 0) - D_y f(0, 0)\}, \quad h \neq 0$$

إذا كانت  $\varepsilon > 0$  ، فيوجد عدد  $\delta(\varepsilon) > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $0 < |h| < \delta(\varepsilon)$  ، فإن  $0 < |k| < \delta(\varepsilon)$

$$\left| \frac{A(h, k)}{hk} - D_{yx}f(0, 0) \right| < \varepsilon$$

بأخذ النهاية في هذه المتباينة بالنسبة إلى  $k$  واستخدام (٤٠ - ١٨) نحصل على

$$\left| \frac{1}{h} \{D_y f(h, 0) - D_y f(0, 0)\} - D_{yx}f(0, 0) \right| \leq \varepsilon$$

لمسح  $h$  التي تحقق  $0 < |h| < \delta(\varepsilon)$  ، وإذن ،  $D_{xy}f(0, 0)$  موجودة وتساوي  $D_{yx}f(0, 0)$  . وهو المطلوب إثباته .

## مشتقات أعلى

إذا كانت  $f$  دالة لها نطاق في  $\mathbb{R}^p$  ومدى في  $\mathbb{R}$  ، حينئذ تكون المشتقة  $Df(c)$  للدالة  $f$  عند النقطة  $c$  هي الدالة الخطية في  $\mathbb{R}^p$  إلى  $\mathbb{R}$  بحيث أن

$$\|f(c+z) - f(c) - Df(c)(z)\| \leq \varepsilon \|z\|$$

عندما تكون  $z$  صغيرة صغراً كافياً . هذا يعني أن  $Df(c)$  هي الدالة الخطية التي تقرب بتدقيق أكثر من الفرق  $f(c+z) - f(c)$  عندما  $z$  تكون صغيرة . تقود أى دالة خطية أخرى إلى تقريب أقل في الدقة عندما تكون  $z$  صغيرة . من هذه الخاصية للتعريف ، يتضح أنه إذا كانت  $Df(c)$  موجودة ، فإنها تكون بالضرورة ممطة بالقانون .

$$Df(c)(z) = D_1f(c)z_1 + \dots + D_p f(c)z_p$$

حيث  $z = (z_1, \dots, z_p)$  في  $\mathbb{R}^p$  .

وبالرغم من أن التقريبات الخطية تكون بصفة خاصة بسيطة ومضبوطة بدرجة كافية لأغراض كثيرة ، يكون من المرغوب فيه أحيانا الحصول على درجة تقريب أدق من التقريب الذى يمكن الحصول عليه باستخدام دوال خطية . من الطبعى أن نرجع فى مثل هذه الحالات إلى دوال الدرجة الثانية ، دوال الدرجة الثالثة ، . . . الخ ، لإحداث تقريبات أقرب . بما أن نطاق دوالنا هو الفراغ  $R^p$  ، فينبغى أن نساق إلى دراسة دوال خطية مضاعفة فى الفراغ  $R^p$  إلى  $R$  لنقاش شامل لمثل هذه الدوال . مع أن مثل هذه الدراسة ليست صعبة بصفة خاصة ، فستأخذنا بالأحرى بعيداً إلى الحقل حسب التطبيقات المحدودة الموجودة فى عقولنا .

لهذا السبب سنعرف المشتقة الثانية  $D^2 f(c)$  للدالة  $f$  عند النقطة  $c$  بأنها الدالة فى  $R^p \times R^p$  إلى  $R$  بحيث أنه إذا كانت  $(y, z)$  تنتمى إلى هذا الضرب وكانت  $y = (y_1, \dots, y_p)$  و  $z = (z_1, \dots, z_p)$  فإن

$$D^2 f(c)(y, z) = \sum_{i,j=1}^p D_{ij} f(c) y_i z_j$$

فى مناقشة المشتقة الثانية، سنفترض فيما يلى أن المشتقات الجزئية الثانية للدالة  $f$  موجودة ومتصلة فى جوار النقطة  $c$  بالمثل ، نعرف المشتقة الثالثة  $D^3 f(c)$  الدالة  $f$  عند  $c$  بأنها دالة  $(y, z, w)$  فى  $R^p \times R^p \times R^p$  ومعطاة بأنها

$$D^3 f(c)(y, z, w) = \sum_{i,j,k=1}^p D_{ijk} f(c) y_i z_j w_k$$

سنفترض عند مناقشة المشتقة الثالثة أن جميع المشتقات الجزئية الثالثة للدالة  $f$  موجودة ومتصلة فى جوار النقطة  $c$  .

ينبغى الآن أن تكون طريقة صياغة المشتقات العليا واضحة (من وجهة نظر الملاحظات السابقة المتعلقة بتبادل رتبة التفاضل ، إذا كانت المشتقات الجزئية المخلوطة الناتجة متصلة ، فلأنها لا تتوقف على رتبة التفاضل) .

أحد الاعتراعات الرمزية المميقة : نكتب

$$\begin{array}{ll} D^2 f(c)(w)^2 & \text{for } D^2 f(c)(w, w), \\ D^3 f(c)(w)^3 & \text{for } D^3 f(c)(w, w, w), \\ \dots & \dots \\ D^n f(c)(w)^n & \text{for } D^n f(c)(w, w, \dots, w) \end{array}$$

إذا كانت  $p = 2$  وإذا رمزنا لعنصر من الفراغ  $R^2$  بأنه  $(x, y)$  وكانت  $w = (h, k)$  فإن  $D^2 f(c)(w)^2$  تساوى التعبير

$$D_{xx} f(c) h^2 + 2D_{xy} f(c) h k + D_{yy} f(c) k^2$$

بالمثل ،  $D^3 f(c)(w)^3$  وتساوى

$$D_{xxx}f(c)h^3 + 3D_{xxy}f(c)h^2k + 3D_{xyy}f(c)hk^2 + D_{yyy}f(c)k^3$$

$D^n f(c)(w)^n$  تساوى التعبير

$$D_{x \dots x}f(c)h^n + \binom{n}{1}D_{x \dots xy}f(c)h^{n-1}k + \binom{n}{2}D_{x \dots xyy}f(c)h^{n-2}k^2 \\ + \dots + D_{y \dots y}f(c)k^n$$

الآن وقد قدمنا هذا المفهوم فإننا سوف نثبت الحالة العامة والمهمة لنظرية تايلور لدوال في  $R^p$  إلى  $R$  .

٤٠ - ٩ نظرية تايلور . نفرض أن  $f$  دالة ذات نطاق مفتوح  $\Omega$  في  $R^p$  ومدى في  $R$  ، ونفرض أن  $f$  لها مشتقات جزئية متصلة من درجة  $n$  في جوار كل نقطة على قطعة مستقيم  $S$  يصل بين نقطتين  $a, b = a + u$  في  $\Omega$  . حينئذ توجد نقطة  $c$  على  $S$  بحيث أن

$$f(a+u) = f(a) + \frac{1}{1!}Df(a)(u) + \frac{1}{2!}D^2f(a)(u)^2 \\ + \dots + \frac{1}{(n-1)!}D^{n-1}f(a)(u)^{n-1} + \frac{1}{n!}D^n f(c)(u)^n$$

البرهان . نفرض أن  $F$  معرفة عند  $t$  في  $I$  إلى  $R$  بأنها

$$F(t) = f(a + tu)$$

وحسب افتراض وجود المشتقات الجزئية للدالة  $f$  ، ينتج أن

$$F'(t) = Df(a + tu)(u),$$

$$F''(t) = D^2f(a + tu)(u)^2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$F^{(n)}(t) = D^n f(a + tu)(u)^n$$

إذا استخدمنا ترجمة نظرية تايلور ٢٨ - ٦ أبعد واحد للدالة  $F$  في  $I$  ، فنستنتج أنه يوجد عدد حقيقى  $t_0$  في  $I$  بحيث أن

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!}F'(0) + \dots + \frac{1}{(n-1)!}F^{(n-1)}(0) + \frac{1}{n!}F^{(n)}(t_0)$$

إذا وضعنا  $c = a + t_0u$  ، حينئذ ينتج المطلوب وهو المطلوب إثباته

## تعريفات :

٤٠ - (أ) إذا كانت  $f(x, y) = x^2 + y^2$  و  $g(t) = (3t + 1, 2t - 3)$  ، نفرض أن  $F(t) = f \circ g(t)$  ، احسب  $F'(t)$  بطريقتين مباشرة وباستخدام قاعدة السلسلة .

٤٠ - (ب) إذا كانت  $f(x, y) = xy$  و  $g(s, t) = (2s + 3t, 4s + t)$  ، نفرض أن  $F(s, t) = f \circ g(s, t)$  ، احسب  $D_1F, D_2F$  بطريقتين مباشرة وباستخدام قاعدة السلسلة .

٤٠ - (ج) إذا كانت  $f(x, y, z) = xyz$  و  $g(s, t) = (3s + st, s, t)$  ، نفرض أن  $F(s, t) = f \circ g(s, t)$  ، احسب  $D_1F, D_2F$  بطريقتين مباشرة وباستخدام قاعدة السلسلة .

٤٠ - (د) إذا كانت  $f(x, y, z) = xy + yz + zx$

و  $g(s, t) = (\cos s, \sin s \cos t, \sin t)$

نفرض أن  $F(s, t) = f \circ g(s, t)$  . احسب  $D_1F, D_2F$  بطريقتين مباشرة وباستخدام قاعدة السلسلة .

٤٠ - (هـ) إذا دارت المحاور الكارتيزية في المستوى بالزاوية  $\theta$  ، فإن الإحداثيين الجديدين  $u, v$  لنقطة ترتبط بالإحداثيين الأصليين  $x, y$  بالعلاقات

$$x = u \cos \theta - v \sin \theta, \quad y = u \sin \theta + v \cos \theta$$

نفرض أن  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  قابلة للتفاضل في  $\mathbb{R}^2$  ونفرض أن  $F(u, v) = f(x, y)$  لكل  $x, y$  . أثبت أن

$$[D_1F(u, v)]^2 + [D_2F(u, v)]^2 = [D_1f(x, y)]^2 + [D_2f(x, y)]^2$$

٤٠ - (و) نفرض أن  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  قابلة للتفاضل في  $\mathbb{R}^2$  ونفرض أن

$g: (0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  معرفة بأنها  $g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  ونفرض أن  $F = f \circ g$  . احسب  $D_1F$  و  $D_2F$  ووضح أن

$$[D_1F(r, \theta)]^2 + \frac{1}{r^2} [D_2F(r, \theta)]^2 = [D_1f(r \cos \theta, r \sin \theta)]^2 + [D_2f(r \cos \theta, r \sin \theta)]^2$$

٤٠ - (ز) نفرض أن  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  قابلة للتفاضل في  $\mathbb{R}$  .

(أ) إذا كانت  $F(x, y) = f(xy)$  ، فإن  $x D_1F(x, y) = y D_2F(x, y)$  لجميع  $(x, y)$  .

(ب) إذا كانت  $F(x, y) = f(ax + by)$  حيث  $a, b \in \mathbb{R}$  فإن  $b D_1F(x, y) = a D_2F(x, y)$  لجميع  $(x, y)$  .

(ج) إذا كانت  $F(x, y) = f(x^2 + y^2)$  فإن  $yD_1F(x, y) = xD_2F(x, y)$  لجميع  $(x, y)$ .

(د) إذا كانت  $F(x, y) = f(x^2 - y^2)$  فإن  $yD_1F(x, y) + xD_2F(x, y) = 0$  لجميع  $(x, y)$ .

٤٠ - (ح) نفرض أن  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  ونفرض أن  $c$  نقطة داخلية من  $A$ . نفرض أن  $f, g$  معرفتان في  $A$  إلى  $\mathbb{R}^q$  وقابلتان للتفاضل عند  $c$ . إذا كانت  $h: A \rightarrow \mathbb{R}^q$  معرفة بأنها  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$  لكل  $x \in A$ ، أثبت أن  $h$  قابلة للتفاضل عند  $c$  وأنه إذا كانت  $u \in \mathbb{R}^p$ ، فإن

$$Dh(c)(u) = (Df(c)(u)) \cdot g(c) + f(c) \cdot (Dg(c)(u))$$

٤٠ - (ط) عبر عن نتيجة تمرين ٤٠ - ح بدلالة دوال الإحداثيات.

٤٠ - (ي) نفرض أن  $A \subseteq \mathbb{R}$  ونفرض أن  $c$  نقطة داخلية من  $A$ . نفرض أن  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^p$  قابلة للتفاضل عند  $c$  وبحيث أن  $\|f(x)\| = 1$  عند  $x \in A$ . أثبت أن  $\nabla_c f = 0$  حيث  $f(c)$ . تشير إلى ميل الدالة  $f$  عند  $c$  (انظر تمرين ٣٩ - ي). فسر هذه النتيجة هندسياً.

٤٠ - (ك) نفرض أن  $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  (موجبة) متجانسة من درجة  $k$  بمعنى أن

$$f(tx) = t^k f(x) \quad \text{عند } x \in \mathbb{R}^p, t > 0$$

(أ) إذا كانت  $f$  قابلة للتفاضل في  $\mathbb{R}^p$ ، أثبت أنها تحقق علاقة أويلر (\*) :

$$kf(x) = x_1 D_1 f(x) + \dots + x_p D_p f(x)$$

لجميع  $x = \{x_1, \dots, x_p\}$  في  $\mathbb{R}^p$  حيث  $x \neq 0$ .

(ب) وبالعكس، نفرض أن  $f$  تحقق علاقة أويلر ونفرض أن  $c \in \mathbb{R}^p, c \neq 0$ . نفرض أن  $g(t) = f(tc)$  عند  $t > 0$  ووضح أن  $tg'(t) = kg(t)$  عند  $t > 0$ . استخدم هذا لإثبات أن الدالة  $f$  متجانسة من درجة  $k$ .

٤٠ - (ل) نفرض أن  $A \subseteq \mathbb{R}^p, f: A \rightarrow \mathbb{R}^p$  ونفرض أن الدالة  $g: f(A) \rightarrow \mathbb{R}^p$

هي الدالة المكمية للدالة  $f$  بمعنى أن

(\*) ليونارد أيلر (١٧٠٧ - ١٧٨٣)، من أبناء بازل، تعلم مع يوهن برنولي. أقام سنوات كثيرة في البلاط الملكي في بيترزبورج، لكن هذه الإقامة قطعت بخمس وعشرين سنة في برلين بالرغم من حقيقة أنه كان أباً لثلاثة عشر طفلاً وأصبح أعمى كلية فقد كان قادراً على كتابة أكثر من ثمانمائة بحث وكتاب وأعطى مساهمات أساسية لكل فروع الرياضيات.

$$f \circ g(x) = x, \quad g \circ f(y) = y$$

لكل  $x \in A$  و  $y \in f(A)$  . إذا كانت  $f$  قابلة للتفاضل عند نقطة  $a \in A$  وإذا كانت  $g$  قابلة للتفاضل عند  $b = f(a)$  ، أثبت أن الدالتين الخطيتين  $Df(a)$  و  $Dg(b)$  تكون كل منهما الدالة العكسية للأخرى . أى أن ،  $Df(a) \circ Dg(b)$  و  $Dg(b) \circ Df(a)$  هما المحايدان في  $\mathbb{R}^p$  .

٤٠ - (م) نفرض أن  $B: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{2p} \rightarrow \mathbb{R}^q$  خطية ثنائية بمعنى أن

$$B(ax + bx', y) = aB(x, y) + bB(x', y),$$

$$B(x, ay + by') = aB(x, y) + bB(x, y')$$

لجميع  $a, b \in \mathbb{R}$  وجميع  $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^p$  . من الممكن البرهنة على أنه توجد  $M > 0$  بحيث أن  $\|B(x, y)\| \leq M \|x\| \|y\|$  لجميع  $x, y \in \mathbb{R}^p$  . بفرض هذا ، أثبت أن  $B$  قابلة للتفاضل عند كل نقطة  $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{2p}$  وأن

$$DB(x, y)(u, v) = B(x, v) + B(u, y)$$

لجميع  $(u, v)$  في  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{2p}$

٤٠ - (ن) نفرض أن  $B: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  خطية ثنائية بالمعنى المذكور في التمرين السابق ونفرض أن  $g(x) = B(x, x)$  لكل  $x \in \mathbb{R}^p$  . أثبت أنه إذا كانت  $x, u \in \mathbb{R}^p$  فإن

$$g(tx) = t^2 g(x) \quad (i) \quad t \in \mathbb{R} \text{ لكل}$$

$$Dg(x)(u) = B(x, u) + B(u, x) = Dg(u)(x) \quad (ii)$$

$$g(x+u) = g(x) + Dg(x)(u) + g(u) \quad (iii)$$

وبالإضافة إلى ذلك ، إذا كانت  $B$  متماثلة بمعنى أن  $B(x, y) = B(y, x)$  فإن

$$Dg(x)(u) = 2B(x, u) \quad (iv)$$

٤٠ - (س) اعط برهاناً لتمرين ٤٠ - (ح) مستخدماً ٤٠ - (م) .

٤٠ - (ع) نفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  مفتوحة ونفرض أن  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$  قابلة للتفاضل في  $\Omega$  . نفرض أن  $I = (a, b)$  فترة مفتوحة في  $\mathbb{R}$  ونفرض أن  $g: I \rightarrow \mathbb{R}^p$  قابلة للتفاضل في  $I$  وبحيث أن  $g(I) \subseteq \Omega$  . إذا كانت  $h = f \circ g: I \rightarrow \mathbb{R}^q$  أثبت أن

$$h'(c) = Df(g(c))(g'(c))$$

٤٠ - (ف) نفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  مفتوحة ونفرض أن  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$  . نفرض

أن  $\Omega$  تحوى النقطتين  $a, b$  وقطعة خط  $S$  واصله بين النقطتين ، وأن الدالة  $f$  قابلة للتفاضل عند كل نقطة من  $S$  . أثبت أنه يوجد راسم خطى  $L: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  بحيث أن

$$f(b) - f(a) = L(b - a)$$

٤٠ - (ص) نفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  فتتصلة مفتوحة ونفرض أن  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$  قابلة للتفاضل في  $\Omega$  . إذا كانت  $Df(x) = 0$  لكل  $x \in \Omega$  ، أثبت ان  $f(x) = f(y)$  لكل  $x, y \in \Omega$  . اثبت ان هذا الاستنتاج ربما يفشل إذا كانت  $\Omega$  غير متصلة .

٤٠ - (ق) نفرض أن  $J \subseteq \mathbb{R}^p$  خلية مفتوحة ونفرض أن  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  قابلة للتفاضل في  $J$  . وضح أنه إذا كانت المشتقة الجزئية  $D_1 f(x) = 0$  لكل  $x \in J$  ، حينئذ  $f$  لا تعتمد على المتغير الأول بمعنى أن

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p) = f(x'_1, x_2, \dots, x_p)$$

لأى نقطتين في  $J$  التى الإحداثى الثانى ، . . . ، الإحداثى الذى رتبته  $p$  تكون متساوية .

٤٠ - (ر) وضح أن الاستنتاج للتمرين السابق ربما يفشل إذا فرض أن  $J$  ليست خلية .

٤٠ - (ش) نفرض أن  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  معرفة بأنها

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \quad \text{for } (x, y) \neq (0, 0),$$

$$= 0 \quad \text{for } (x, y) = (0, 0)$$

أثبت أن المشتقتين الجزئيتين  $D_{xy} f$  و  $D_{yx} f$  موجودتان عند النقطة  $(0, 0)$  لكن ليسا متساويين .

٤٠ - (ت) استخدم نظرية القيمة المتوسطة لتحديد بالتقرب المسافة من النقطة  $(3.2, 4.1)$  لنقطة الأصل . اعط حدود الخطأ لتقديرك .

٤٠ - (ث) إذا كانت  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  مفتوحة وكانت  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$  . نفرض أن  $\Omega$  تحوى النقطتين  $a, b$  وقطعة الخط  $S$  الواصل بين النقطتين ، وأن  $f$  لها مشتقات جزئية متصلة في  $S$  . أثبت أن

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 Df(a + t(b-a))(b-a) dt$$

٤٠ - (خ) نفرض أن  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  لها مشتقات ثانية متصلة في  $\mathbb{R}$

$$(أ) \quad \text{إذا كانت } c \in \mathbb{R} \text{ وأن } u(x, y) = f(x + cy) + g(x - cy)$$

أثبت أن  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  تحقق (معادلة الموجة)

$$c^2 D_{xx} u(x, y) = D_{yy} u(x, y)$$

لجميع  $(x, y)$  .



(ب) إذا كانت  $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   $v(x, y) = f(3x + 2y) + g(x - 2y)$  أثبت أن

تحقق المعادلة

$$4D_{xx}v(x, y) - 4D_{xy}v(x, y) - 3D_{yy}v(x, y) = 0$$

لكل  $(x, y)$ .

٤ - (د) إذا كانت  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  لها مشتقات جزئية ثانية متصلة وكانت

$F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$  عند  $r > 0, \theta \in \mathbb{R}$ ، أثبت أن

$$\begin{aligned} D_{xx}f(x, y) + D_{yy}f(x, y) &= D_{rr}F(r, \theta) + \frac{1}{r} D_r F(r, \theta) + \frac{1}{r^2} D_{\theta\theta}F(r, \theta) \\ &= \frac{1}{r} D_r (r D_r F(r, \theta)) + \frac{1}{r^2} D_{\theta\theta}F(r, \theta) \end{aligned}$$

حيث  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

### مشروع :

٤ - a ( هذا المشروع هو تعديل لطريقة نيوتن التقليدية لتحديد الجذور عندما يكون

جذر قريب بكفاية معلوما ) . نفرض أن  $f$  معرفة ومتصلة في فترة مفتوحة تحتوي على الكرة

المغلقة  $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}$  في  $\mathbb{R}^n$  . نفرض أن  $f$  قابلة للتفاضل عند

كل نقطة من  $B_r(x_0)$  وأنه يوجد عدد  $C$  ، حيث  $0 < C < 1$  ، وراسم داخل خطى

$\Gamma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  بحيث أن  $\|\Gamma \circ f(x_0)\| \leq (1 - C)r$  وأن

$$x \in B_r(x_0) \text{ عند } \|I - \Gamma \circ Df(x)\|_{\infty} \leq C$$

(أ) نفرض أن  $g: B_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  معرفة بآتم  $g(x) = x - \Gamma \circ f(x)$  عند  $x \in B_r(x_0)$

أثبت أن  $g$  قابلة للتفاضل عند كل نقطة من  $B_r(x_0)$  وأن تنقلص  $g$  ثابت  $C < 1$  ( انظر

٢٣-٤ .  $B_r(x_0)$  في

(ب) عرف  $x_1 = g(x_0)$  و  $x_{n+1} = g(x_n)$  عند  $n \in \mathbb{N}$  . وضع أن

$\|x_{n+1} - x_n\| \leq C^n \|x_1 - x_0\|$  وإذن ينتج أن  $\|x_{n+1} - x_m\| \leq C^m r$  عند  $n \geq m \geq 0$  . ومن ثم

$$\|x_k - x_0\| < r \text{ عند } k = 0, 1, 2, \dots$$

(ج) أثبت أن  $(x_k)$  متتابة كوشى ومن ثم تقرب إلى عنصر  $\bar{x} \in B_r(x_0)$  ، بحيث

أن  $g(\bar{x}) = \bar{x}$  . وبالإضافة إلى ذلك ، نحصل على التقدير  $\|x_k - \bar{x}\| \leq C^k r$

(د) وضع أن  $f(\bar{x}) = 0$  وأن  $\bar{x}$  هو العنصر الوحيد في  $B_r(x_0)$  الذى عنده

تلاشى  $f$  .

## الباب الحادى والأربعون — نظريات الراسم والدوال الضمنية :

نفرض أن  $\Omega$  فئة مفتوحة في  $\mathbb{R}^p$  ونفرض أن  $f$  دالة بنطاق  $\Omega$  ومدى  $\mathbb{R}^q$  ، لا نفرض أن  $p = q$  ما لم توجد إشارة خاصة . سيتضح ، تحت فروض سينص عليها ، أن يشار إلى « الخاصية الموضوعية » للرسم  $f$  عند نقطة  $c \in \Omega$  بالراسم الخطى  $Df(c)$  بدقة أكثر قليلاً .

(i) إذا كانت  $p \leq q$  ،  $Df(c)$  ادخالية (= واحد - واحد) فإن  $f$  ادخالية في جبريات صغيرة للنقطة  $c$  ،

(ii) إذا كانت  $p \geq q$  وكان  $Df(c)$  راسماً فوقياً (= يرسم  $\mathbb{R}^p$  فوقياً إلى  $\mathbb{R}^q$ ) ، فإن الصورة تحت  $f$  لجوار صغير للنقطة  $c$  هي جوار للدالة  $f(c)$  ؛ وأن

(iii) إذا كانت  $p = q$  وكانت  $Df(c)$  تناظر أحادياً (= واحد - واحد وفوقياً = عكسياً) ، حينئذ  $f$  ترسم جواراً  $U$  للنقطة  $c$  في نظام واحد - واحد فوقياً إلى جوار  $V$  للدالة  $f(c)$  . توجد في حالة (iii) ، دالة معرفة على  $V$  عكس تقييد الدالة  $f$  إلى  $U$  .

كنتيجة لهذه النظريات للرسم سنحصل على نظرية الدالة الضمنية التى هي إحدى النظريات الأساسية في التحليل والهندسة . نقدم أيضاً نظرية بارامترية مفيدة والنظرية الهامة للرتبة .

### الصف $C^1(\Omega)$ :

مجرد وجود المشتقة ليس كافياً لأغراضنا ، تحتاج أيضاً إلى اتصال المشتقة . نذكر أنه إذا كانت  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$  قابلة للتفاضل عند كل نقطة من  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  ، فإن الدالة  $Df(x)$  راسم من  $\Omega$  إلى المجموعة  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$  لجميع الدوال الخطية من  $\mathbb{R}^p$  إلى  $\mathbb{R}^q$  . من الملاحظ في باب ٢١ أن هذه الفئة  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$  هو متجه فراغ ، لاحظنا في تمرين (٢١ - ل) ، أن هذا الفراغ هو فراغ عمودى تحت العمود

$$(41.1) \quad \|L\|_{pq} = \sup \{ \|L(x)\| : x \in \mathbb{R}^p, \|x\| \leq 1 \} .$$

٤١ - ١ تعريف . إذا كانت  $\Omega$  مفتوحة في  $\mathbb{R}^p$  وكانت  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$  ، نقول أن  $f$  تنتمي إلى الصف  $C^1(\Omega)$  إذا كانت المشتقة  $Df(x)$  موجودة لكل  $x \in \Omega$  وكان الراسم  $x \mapsto Df(x)$  من  $\Omega$  إلى  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$  متصلاً تحت العمود (٤١ - ١) .

نذكر من مثال ٣٩ - ٨ (د) ، أنه لكل  $x \in \Omega$  ، يمكن تمثيل المشتقة  $Df(x)$  بواسطة  $q \times p$  مصفوفة يعقوبية  $[D_j f_i(x)]$  . ومن ثم تمثل  $Df(x) - Df(y)$  بالمصفوفة  $q \times p$  .

$$[D_j f_i(x) - D_j f_i(y)]$$

ينتج الآن من متباينة ( ٢١ - ٥ ) ، أن

$$\|Df(x) - Df(y)\|_{pq} \leq \left\{ \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p |D_{ij}f_i(x) - D_{ij}f_i(y)|^2 \right\}^{1/2}$$

وإذن يدل الاتصال لكل من المشتقات الجزئية  $D_{ij}f_i$  في  $\Omega$  على اتصال  $x \mapsto Df(x)$  سنترك للقارئ إثبات أن العكس هو أيضاً صحيح ، وإذن نحصل على النتيجة الآتية .

٤١ - ٢ نظرية . إذا كانت  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  مفتوحة وكانت  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$  قابلة للتفاضل عند كل نقطة من  $\Omega$  ، فإن  $f$  تنتمي إلى صنف  $C^1(\Omega)$  إذا وإذا فقط كانت المشتقات الجزئية  $D_{ij}f_i$  ،  $i = 1, \dots, q$  ،  $j = 1, \dots, p$  للدالة  $f$  متصلة في  $\Omega$  .  
سوف نحتاج إلى المفترض الآتي ، الذي هو مغايرة لنظرية القيمة المتوسطة .

٤١ - ٣ مفترض . نفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  فئة مفتوحة ونفرض أن  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$  قابلة للتفاضل في  $\Omega$  . نفرض أن  $\Omega$  تحتوي على النقطتين  $a, b$  وقطعة خطية  $S$  تصل بين هاتين النقطتين ، ونفرض أن  $x_0 \in \Omega$  . حينئذ نجد أن

$$\|f(b) - f(a) - Df(x_0)(b - a)\| \leq \|b - a\| \sup_{x \in S} \{\|Df(x) - Df(x_0)\|_{pq}\}$$

البرهان . نفرض أن  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$  معرفة عند  $x \in \Omega$  بأنها

$$g(x) = f(x) - Df(x_0)(x)$$

بما أن  $Df(x_0)$  خطية ، فينتج أن  $Dg(x) = Df(x) - Df(x_0)$  عند  $x \in \Omega$  . إذا استخدمنا نظرية القيمة المتوسطة ٤٠ - ٥ ، نستنتج أنه توجد نقطة  $c \in S$  بحيث أن

$$\begin{aligned} \|f(b) - f(a) - Df(x_0)(b - a)\| &= \|g(b) - g(a)\| \\ &\leq \|Dg(c)(b - a)\| = \|(Df(c) - Df(x_0))(b - a)\| \\ &\leq \|b - a\| \sup_{x \in S} \{\|Df(x) - Df(x_0)\|_{pq}\} \end{aligned}$$

وهو المطلوب إثباته

النتيجة الآتية هي المفترض الدليل لنظريات الراسم

٤١ - ٤ مفترض تقريب . نفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  مفتوحة ونفرض أن  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$  تنتمي إلى الصنف  $C^1(\Omega)$  . إذا كانت  $x_0 \in \Omega$  وكانت  $\varepsilon > 0$  ، حينئذ توجد  $\delta(\varepsilon) > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $\|x_k - x_0\| \leq \delta(\varepsilon)$  ،  $k = 1, 2$  ، فإن  $x_k \in \Omega$  وأن

$$(41.2) \quad \|f(x_1) - f(x_2) - Df(x_0)(x_1 - x_2)\| \leq \varepsilon \|x_1 - x_2\|$$

البرهان . بما أن  $x \rightarrow Df(x)$  متصلة في  $\Omega$  إلى  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$  ، بإعطاء  $\varepsilon > 0$  توجد  $\delta(\varepsilon) > 0$  ، بحيث أنه إذا كانت  $\|x - x_0\| < \delta(\varepsilon)$  فإن  $x \in \Omega$  وأن

$\|Df(x) - Df(x_0)\|_{pq} \leq \varepsilon$  . نفرض الآن  $x_1, x_2$  تحققان  $\|x_k - x_0\| \leq \delta(\varepsilon)$  فينتج أن قطعة الخط المستقيم الذي تصل  $x_1, x_2$  تقع داخل كرة مغلقة مركزها  $x_0$  ونصف قطرها  $\delta(\varepsilon)$  ، أى داخل  $\Omega$  . استخدم الآن مفترض ٤١ - ٣ للحصول على الاستنتاج المذكور . وهو المطلوب إثباته

## نظرية الراسم الإدخالي :

سنوضح الآن أنه إذا كانت  $f$  تنتمي إلى الصنف  $C^1(\Omega)$  وإذا كانت  $Df(c)$  إدخالية ، فإن تقييد الدالة  $f$  بطوار مناسب للنقطة  $c$  يكون إدخالياً .

سيذكر القارئ الملم بعلامة « الرتبة » لتحويل خطى ، أن  $L: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  تكون إدخالية إذا وإذا فقط كانت رتبة  $(L) = p \leq q$

٤١ - هـ نظرية راسم إدخالى . نفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  مفتوحة ، وأن  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$  تنتمي إلى صنف  $C^1(\Omega)$  ، وأن  $L = Df(c)$  إدخالية . حينئذ يوجد عدد  $\delta > 0$  بحيث أن التقييد للدالة  $f$  إلى  $B_\delta = \{x \in \mathbb{R}^p : \|x - c\| \leq \delta\}$  إدخالى . وبالإضافة إلى ذلك ، يكون عكس التقييد  $f|_{B_\delta}$  هو دالة متصلة في  $f(B_\delta) \subseteq \mathbb{R}^q$  إلى  $B_\delta \subseteq \mathbb{R}^p$  .

البرهان . بما أن الدالة الخطية  $L = Df(c)$  إدخالية ، فينتج من نتيجة ٢٢-٧ أنه يوجد  $r > 0$  بحيث أن

$$(41.3) \quad r \|u\| \leq \|Df(c)(u)\| \quad \text{for } u \in \mathbb{R}^p$$

نستخدم الآن مفترض التقريب ٤١ - ٤ حيث  $\varepsilon = \frac{1}{2}r$  للحصول على عدد  $\delta > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $\|x_k - c\| \leq \delta, k = 1, 2$  فإن

$$\|f(x_1) - f(x_2) - L(x_1 - x_2)\| \leq \frac{1}{2}r \|x_1 - x_2\|$$

إذا استخدمنا متباينة المثلث للطرف الأيسر لهذه المتباينة ، نحصل على

$$\|L(x_1 - x_2)\| - \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \frac{1}{2}r \|x_1 - x_2\|$$

إذا ربطنا هذا مع (٤١ - ٣) حيث  $u = x_1 - x_2$  ، نحصل على

$$(41.4) \quad \frac{1}{2}r \|x_1 - x_2\| \leq \|f(x_1) - f(x_2)\|$$

عند  $x_k \in B_\delta$  . هذا يبرهن أن التقييد للدالة  $f$  إلى  $B_\delta$  إدخالى ؛ ومن ثم يكون لهذا القيد دالة عكسية سوف نرمز لها بالرمز  $g$  . إذا كانت  $y_k \in f(B_\delta)$  ، حينئذ توجد نقط وحيدة  $x_k = g(y_k)$  في  $B_\delta$  بحيث أن  $y_k = f(x_k)$  . ينتج من (٤١ - ٤) أن

$$\|g(y_1) - g(y_2)\| \leq (2/r) \|y_1 - y_2\|$$

ومنها ينتج أن  $g = (f|_{B_\delta})^{-1}$  متصلة بانتظام في  $f(B_\delta)$  إلى  $\mathbb{R}^p$  . وهو المطلوب إثباته

نلاحظ أننا لا نحتاج لتعريف  $g$  في حوار  $f(c)$  ؛ أى أن ،  $f(c)$  لا تحتاج لأن تكون نقطة داخلية من  $f(B_0)$  . لهذا السبب لا يمكننا عمل أى فرض عن قابلية التفاضل للدالة  $g$  . ستثبت فيما بعد نظرية عكسية أقوى تحت فروض إضافية .

### نظرية الراسم الفوقى :

النتيجة الآتية نتيجة زميلة لنظرية الراسم الإدخال . تثبت هذه النظرية ، التى ترجع إلى ل. م. جرافز (\*) أنه إذا كانت  $f$  فى صنف  $C^1(\Omega)$  وكان الراسم  $Df(c)$  لبعض  $c \in \Omega$  فوقيا للفراغ  $R^p$  إلى  $R^q$  فإن  $f$  ترسم جوارا مناسباً للنقطة  $c$  إلى حوار الدالة  $f(c)$  أى أن كل نقطة من  $R^q$  التى تكون ملاصقة بدرجة كافية إلى الدالة  $f(c)$  هى الصورة تحت  $f$  لنقطة قرب  $c$  .

سيذكر القارئ الملم بعلامة « رتبة » لتحويل خطى أن الراسم  $L: R^p \rightarrow R^q$  يكون فوقيا إذا وإذا فقط كانت رتبة  $(L) = q \leq p$

٤١ - ٦ نظرية الراسم الفوقى . نفرض أن  $\Omega \subseteq R^p$  مفتوحة ونفرض أن  $f: \Omega \rightarrow R^q$  تنتمى إلى الصنف  $C^1(\Omega)$  . نفرض أنه عند بعض  $c \in \Omega$  ، تكون الدالة الخطية  $L = Df(c)$  فوقية للفراغ  $R^p$  إلى  $R^q$  . حينئذ يوجد عدنان  $m > 0$  و  $\alpha > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $\|y - f(c)\| \leq \alpha/2m$  و  $y \in R^q$

فإنه يوجد  $x \in \Omega$  بحيث أن  $f(x) = y$  و  $\|x - c\| \leq \alpha$

البرهان . بما أن  $L$  فوقى ، فإن كلا من المتجهات الأساسية

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_q = (0, 0, \dots, 1)$$

فى  $R^q$  هو الصورة تحت  $L$  لمتجه ما فى  $R^p$  ، مثلا  $u_1, u_2, \dots, u_q$  . نفرض الآن أن  $M: R^q \rightarrow R^p$  هى الدالة الخطية التى ترسم  $e_j$  إلى  $u_j$  عند  $j = 1, 2, \dots, q$  ، أى أن ،

$$M\left(\sum_{i=1}^q a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^q a_i u_i$$

ينتج أن  $L^\circ M$  هو الراسم المحايد فى  $R^q$  ، أى أن  $L^\circ M(y) = y$  لكل  $y \in R^q$  . إذا فرضنا

$$m = \left\{ \sum_{i=1}^q \|u_i\|^2 \right\}^{1/2}$$

(\*) لوردانس م. جرافز (١٨٩٦ - ١٩٧٣) ولد فى كانساس ، لكن ارتبط بجامعة شيكاغو لسنوات كثيرة كطالب وكأستاذ . ومن أحسن ما عرف به مساهمته فى التحليل الدالى وحساب التفاضل والتكامل للمتغيرات .

حينئذ يدل تطبيق متباينة المثلث وشفارتز على أنه إذا كانت  $y = \sum_{i=1}^q a_i e_i$  ، فإن

$$\begin{aligned}\|M(y)\| &\leq \sum_{i=1}^q |a_i| \|u_i\| \\ &\leq \left\{ \sum_{i=1}^q |a_i|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{i=1}^q \|u_i\|^2 \right\}^{1/2} \\ &= m \|y\|\end{aligned}$$

حسب مفترض التقريب ٤١-٤٤ يوجد عدد  $\alpha > 0$  بحيث أنه إذا كانت

$$\|x_k - c\| \leq \alpha, \quad k = 1, 2 \quad \text{وإن} \quad x_k \in \Omega$$

$$(41.5) \quad \|f(x_1) - f(x_2) - L(x_1 - x_2)\| \leq \frac{1}{2m} \|x_1 - x_2\|$$

نفرض الآن  $B_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^p : \|x - c\| \leq \alpha\}$  ونفرض أن  $y \in \mathbb{R}^q$  بحيث أن  $y = f(x)$  . سنوضح أنه يوجد متجه  $x$  حيث  $x \in B_\alpha$  بحيث أن  $\|y - f(c)\| \leq \alpha/2m$ .

نفرض أن  $x_0 = c$  ونفرض أن  $x_1 = x_0 + M(y - f(c))$  بحيث أن

$$\|x_1 - x_0\| \leq m \|y - f(c)\| \leq \frac{1}{2}\alpha$$

$$\|x_1 - x_0\| \leq \frac{\alpha}{2} \quad ; \quad \|x_1 - c\| \leq \left(1 - \frac{1}{2}\right)\alpha$$

نفرض أن  $c = x_0, x_1, \dots, x_n$  قد اختيرت بالاستنتاج في  $\mathbb{R}^p$  بحيث أن

$$(41.6) \quad \|x_k - x_{k-1}\| \leq \alpha/2^k, \quad \|x_k - c\| \leq (1 - 1/2^k)\alpha$$

عند  $k = 1, \dots, n$  . نعرف الآن  $(n \geq 1)$  بأنها

$$(41.7) \quad x_{n+1} = x_n - M[f(x_n) - f(x_{n-1}) - L(x_n - x_{n-1})]$$

ينتج من (٤١ - ٥) أن

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq m \|f(x_n) - f(x_{n-1}) - L(x_n - x_{n-1})\|$$

$$\leq \frac{1}{2} \|x_n - x_{n-1}\|$$

وإذن ينتج أن  $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{1}{2}(\alpha/2^n) = \alpha/2^{n+1}$  وأن

$$\|x_{n+1} - c\| \leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - c\|$$

$$\leq (\alpha/2^{n+1}) + (1 - 1/2^n)\alpha$$

$$= (1 - 1/2^{n+1})\alpha$$

٤١-٤٦) يثبت (٤١-٦) عند  $k = n + 1$  . لذلك ، يمكننا بهذه الطريقة تركيب متتابعة

$(x_n)$  في  $B_\alpha$  . إذا كانت  $m \geq n$  ، فنجد أن

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\| &\leq \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_{n+2}\| + \cdots + \|x_{m-1} - x_m\| \\ &\leq \frac{\alpha}{2^{n+1}} + \frac{\alpha}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\alpha}{2^m} \leq \frac{\alpha}{2^n}\end{aligned}$$

ينتج أن  $(x_n)$  هي متتابعة كوشي في  $R^p$  ولذلك تقرب إلى عنصر ما  $x$ . بما أن  $x \in B_\alpha$  ، فينتج أن  $\|x_n - c\| \leq (1 - 1/2^n)\alpha$  أي  $\|x - c\| \leq \alpha$

بما أن  $x_1 - x_0 = M(y - f(c))$  ، فينتج أن

$$L(x_1 - x_0) = L \circ M(y - f(c)) = y - f(x_0)$$

وبالإضافة إلى ذلك ، نجد من (٤١ - ص) أن

$$\begin{aligned}L(x_{n+1} - x_n) &= -L \circ M[f(x_n) - f(x_{n-1}) - L(x_n - x_{n-1})] \\ &= -\{f(x_n) - f(x_{n-1}) - L(x_n - x_{n-1})\} \\ &= L(x_n - x_{n-1}) - [f(x_n) - f(x_{n-1})]\end{aligned}$$

بالاستنتاج نجد أن

$$L(x_{n+1} - x_n) = y - f(x_n)$$

ومن هنا ينتج أن  $y = \lim f(x_n) = f(x)$  وإذن تكون كل نقطة  $y$  تحقق  $\|y - f(c)\| \leq \alpha/2^m$  صورة تحت  $f$  لنقطة  $x \in \Omega$  حيث  $\|x - c\| \leq \alpha$ . وهو المطلوب إثباته

٤١ - نظرية الراسم مفتوح . نفرض أن  $\Omega \subseteq R^p$  مفتوحة ونفرض أن  $f: \Omega \rightarrow R^q$  تنتمي إلى صنف  $C^1(\Omega)$ . إذا كانت المشتقة لكل  $Df(x)$  لكل  $x \in \Omega$  فوقية ، وإذا كانت  $G \subseteq \Omega$  مفتوحة ، فإن  $f(G)$  مفتوحة في  $R^q$ .

البرهان . إذا كانت  $b \in f(G)$  ، فإنه توجد نقطة  $c \in G$  بحيث أن  $f(c) = b$ . ينتج بتطبيق نظرية الراسم الفوق ٤١ - ٦ على  $f|_G$  أنه توجد  $\beta > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $\|y - b\| \leq \beta$  حينئذ توجد  $x \in G$  بحيث أن  $y = f(x)$ . إذن  $f(G)$  مفتوحة في  $R^q$ . وهو المطلوب إثباته

### النظرية العكسية :

سربط الآن نظريتي الراسم في حالة  $p = q$ . مفروض هنا أن المشتقة  $Df(c)$  مفروضة. إدخالية . هذا يحدث إذا وإذا فقط كان للمشتقة  $Df(c)$  عكس التي تكون بدورها صحيحة إذا وإذا فقط كانت قيمة محدد جاكوبيان

$$J_f(c) = \det [D_{ij}f(c)] = \det [f_{i,j}(c)]$$

تختلف عن صفر .

سيذكر القارئ الملم بعلامة « رتبة » لتحويل خطى أن  $L: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  إدخالية إذا وإذا فقط كانت رتبة  $(L) = p = q$

ينتج من اتصال الدوال الجزئية والمحدد أنه إذا كانت  $Df(a)$  لها عكس ، فإن  $Df(x)$  لها عكس عند  $x$  اللاصقة بكفاية إلى  $c$  .

٤١ - ٨ نظرية عكسية . نفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  مفتوحة ونفرض أن  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  تنتمي إلى صنف  $C^1(\Omega)$  . إذا كانت  $c \in \Omega$  بحيث أن  $Df(c)$  إدخالية ، حينئذ يوجد جوار مفتوح  $U$  للنقطة  $c$  بحيث أن  $V = f(U)$  جوار مفتوح للدالة  $f(c)$  والتقييد للدالة  $f$  إلى  $U$  إدخال إلى  $V$  فوقياً بعكس متصل  $g$  . وبالإضافة إلى ذلك تنتمي  $g$  إلى صنف  $C^1(V)$  وأن

$$Dg(y) = [Df(g(y))]^{-1} \quad \text{for } y \in V$$

البرهان . من الفرض  $L = Df(c)$  إدخالية ، وإذن تدل نتيجة ٢٢ - ٧ على أنه توجد  $r > 0$  بحيث أن

$$2r \|z\| \leq \|Df(c)(z)\| \quad \text{for } z \in \mathbb{R}^p$$

بما أن  $f$  موجودة في صنف  $C^1(\Omega)$  ، فيوجد جوار للنقطة  $c$  التي فيها تكون  $Df(x)$  قابلة للعكس وتحقق

$$(41.8) \quad r \|z\| \leq \|Df(x)(z)\| \quad \text{for } z \in \mathbb{R}^p$$

محصراً انتباهنا أيضاً في جوار  $U$  للنقطة  $c$  الذي فيه تكون الدالة  $f$  إدخالية والتي تكون محتوية في كرة مركزها  $c$  ونصف القطر  $\alpha$  ( كما في نظرية الراسم الفوق ٤١ - ٦ ) . حينئذ تكون  $V = f(U)$  جواراً للدالة  $f(c)$  ، ونستنتج من نظريات الراسم السابقة أن التقييد  $f|_U$  له دالة عكسية متصلة  $g: V \rightarrow \mathbb{R}^p$  .

يبقى أن نوضح أن  $g$  قابلة للتفاضل عند نقطة اختيارية  $y_1 \in V$  . نفرض أن  $x_1 = g(y_1) \in U$  ، بما أن  $f$  قابلة للتفاضل عند  $x_1$  ، فينتج أنه إذا كانت  $x \in U$  ، فإن

$$f(x) - f(x_1) - Df(x_1)(x - x_1) = \|x - x_1\| u(x)$$

حيث  $\|u(x)\| \rightarrow 0$  عندما  $x \rightarrow x_1$  . إذا فرضنا أن  $M_1$  هي الدالة العكسية للدالة الخطية  $Df(x_1)$  ، فإن

$$\begin{aligned} x - x_1 &= M_1[Df(x_1)(x - x_1)] \\ &= M_1[f(x) - f(x_1) - \|x - x_1\| u(x)] \end{aligned}$$

إذا كانت  $x \in U$  ، فإن  $x = g(y)$  عند قيمة ما  $y = f(x) \in V$  ؛ وبالإضافة إلى ذلك  $y_1 = f(x_1)$  ، لذلك يمكن كتابة هذه المعادلة في الصورة .

$$g(y) - g(y_1) - M_1(y - y_1) = -\|x - x_1\| M_1(u(x))$$



بما أن  $Df(x_1)$  إدخالية ، فينتج كما في البرهان لنظرية الراسم الإدخال  $\epsilon_1 - \epsilon$  أن

$$\|y - y_1\| = \|f(x) - f(x_1)\| \geq \frac{1}{2}r \|x - x_1\|$$

بشرط أن  $y$  تكون ملاصقة بكفاية إلى  $y_1$  . وبالإضافة إلى ذلك ، ينتج من  $(\epsilon_1 - \epsilon)$  أن

$$\|M_1(u)\| \leq (1/r) \|u\|$$

وإذن نجد أن

$$\|g(y) - g(y_1) - M_1(y - y_1)\| \leq (2/r^2) \|u(x)\| \|y - y_1\|$$

الآن عندما  $y \rightarrow y_1$  ، فإن  $x = g(y) \rightarrow g(y_1) = x_1$  ، وكذلك  $\|u(x)\| \rightarrow 0$  .  
نستنتج ، لذلك ، أن  $Dg(y_1)$  موجودة وتساوى  $M_1 = (Df(x_1))^{-1}$  .

نتج الحقيقة التي تقول إن  $g$  تنتمي إلى الصنف  $C^1(V)$  من العلاقة  $Dg(y) = [Df(g(y))]^{-1}$  حيث  $y \in V$  ، ومن الاتصال للرواسم .

$$y \mapsto g(y), \quad x \mapsto Df(x), \quad L \mapsto L^{-1}$$

من  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$  و  $U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$  ،  $V \rightarrow U$  ، على الترتيب .  
( انظر تمرين ٤١ - ل ) . وهو المطلوب إثباته

## دوال ضمنية :

نفرض أن  $F$  دالة معرفة في فئة جزئية من  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  إلى  $\mathbb{R}^q$  . ( إذا أجرينا التحقيق الواضح للفراغ  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  بأنه  $\mathbb{R}^{p+q}$  ، حينئذ لا نحتاج لتعريف ما المقصود بالقول أن  $F$  متصلة ، أو قابلة للتفاضل عند نقطة ، أو موجودة في صنف  $C^1$  في فئة ) نفرض أن  $F$  ترسل النقطة  $(a, b)$  إلى متجه الصفر من  $\mathbb{R}^q$  . مسألة الدوال الضمنية هي حل المعادلة

$$F(x, y) = 0$$

لمتغير مستقل واحد ( مثلا ،  $y$  ) بدلالة الآخر بمعنى أننا نوجد دالة  $\phi$  معرفة في فئة جزئية من  $\mathbb{R}^p$  بقيم في  $\mathbb{R}^q$  بحيث أن  $b = \phi(a)$  وأن

$$F(x, \phi(x)) = 0$$

لكل  $x$  في نطاق الدالة  $\phi$  . نفرض أن  $F$  متصلة في جوار النقطة  $(a, b)$  ونأمل في استنتاج أن « دالة الحل »  $\phi$  متصلة في جوار  $a$  . سيكون محتلا أن القارئ سوف لا يتدهش إذا فرضنا أن  $F$  تنتمي إلى صنف  $C^1$  في جوار النقطة  $(a, b)$  ؛ لكن ، حتى هذا الفرض لا يكون كافيا لضمان الوجود والوحوية لدالة حل متصلة  $\phi$  معرفة في جوار  $a$  .

في الحقيقة ، إذا كانت  $p = q = 1$  ، فإن الدالة المعطاة بأنها  $F(x, y) = x^2 - y^2$



فوجد في هذه الحالة دوال  $\varphi_j, j=1, \dots, q$  مفرقة ومتصلة بالقرب من  $a=0$  بحيث أنه إذا عوضنا

• • • • •

في المجموعة ( ٤١ - ٩ ) ، فنحصل على متطابقة في  $x$

٤١ - ٩ نظرية دالة ضمنية. نفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  مفتوحة ونفرض أن  $(a, b) \in \Omega$  نفرض أن  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$  تنتمي إلى صنف  $C^1(\Omega)$ ، وأن  $F(a, b) = 0$ ، وأن الراسم الخطي المعروف بأنه

هو تماثل أحادي  $R^q$  إلى فوقيا .

(أ) حيث أنه يوجد جوار مفتوح  $W$  من  $a \in \mathbb{R}^p$  دالة وحيدة  $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^q$  متتمية إلى صنف  $C^1(W)$  بحيث أن  $b = \varphi(a)$  وأن

(ب) يوجد جوار مفتوح  $U$  للنقطة  $(a, b)$  في  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  بحيث أن الزوج  $(x, y) \in U$  يحقق  $F(x, y) = 0$  إذا وإذاً فقط كانت  $y = \phi(x)$  عند  $x \in W$ .

البرهان . لا تفقد الحالة العامة عند افتراض أن  $b = 0$  و  $a = 0$  . نفرض أن  $H: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  معرفة بأنها

ينتج حالا ( أنظر تمرين ٣٩ - ت ) أن  $H$  تنتمي إلى صنف  $C^1(\Omega)$  وأن

عند  $(x, y) \in \Omega$  و  $(u, v) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  نطالب الآن بأن  $DH(0, 0)$  لها دالة عكسية في  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ . في الحقيقة، إذا فرضنا أن  $L_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$  معرفة بأنها

حينئذ تثبت الحقيقة التي تقول إن  $DF(0, 0)(u, v) = L_1(u) + L_2(v)$  أن الدالة عكسية للدالة  $DH(0, 0)$  هي راسم خطي  $K$  في  $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$  معرف بأنه

१११

وإذن ينتج من نظرية الدالة العكسية (١-٤) أنه يوجد جوار  $U$  للنقطة  $(0, 0) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  بحيث أن  $V = H(U)$  هو جوار مفتوح للنقطة  $(0, 0) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  وتقييد  $H$  إلى  $U$  هو تناظر أحادى إلى فوقيا بدالة عكسية متصلة  $\Phi: V \rightarrow U$  التي تنتمي إلى صنف  $C^1(V)$  وبحيث  $\Phi(0, 0) = (0, 0)$  . الآن لها الصورة

$$\Phi(x, z) = (\varphi_1(x, z), \varphi_2(x, z)) \text{ for } (x, z) \in V$$

حيث  $\varphi_1: V \rightarrow \mathbb{R}^p$  و  $\varphi_2: V \rightarrow \mathbb{R}^q$  . بما أن

$$\begin{aligned} (x, z) &= H \circ \Phi(x, z) = H[\varphi_1(x, z), \varphi_2(x, z)] \\ &= [\varphi_1(x, z), F(\varphi_1(x, z), \varphi_2(x, z))] \end{aligned}$$

فنتستج أن  $\varphi_1(x, z) = x$  لكل  $(x, z) \in V$  . ومن ثم تأخذ الصورة الأبسط

$$\Phi(x, z) = (x, \varphi_2(x, z)) \text{ for } (x, z) \in V$$

الآن إذا كانت  $P: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$  معرفة بأنها  $P(x, z) = z$  ، فإن  $P$  خطية ومتصلة وأن  $\varphi_2 = P \circ \Phi$  ؛ لذلك تنتمي إلى صنف  $C^1(V)$  ونجد أن

$$z = F(x, \varphi_2(x, z)) \text{ for } (x, z) \in V$$

الآن نفرض أن  $W = \{x \in \mathbb{R}^p : (x, 0) \in V\}$  بحيث أن  $W$  جوار مفتوح للعنصر  $0$  في  $\mathbb{R}^p$  ، ونعرف  $\varphi(x) = \varphi_2(x, 0)$  عندما  $x \in W$  . من الواضح أن  $\varphi(0) = 0$  وينتج من القانون السابق أن

$$F(x, \varphi(x)) = 0 \text{ for } x \in W$$

وبالإضافة إلى ذلك  $D\varphi(x)(u) = D\varphi_2(x, 0)(u, 0)$  عند  $x \in W, u \in \mathbb{R}^p$  ، وإذن نستنتج أن  $\varphi$  تنتمي إلى صنف  $C^1(W)$  . هذا يبرهن جزء (أ) .

لإكمال برهان جزء (ب) ، نفرض أن  $(x, y) \in U$  تحقق  $F(x, y) = 0$  . حينئذ  $H(x, y) = (x, F(x, y)) = (x, 0) \in V$  ومنها ينتج أن  $x \in W$  . وعلاوة على ذلك  $y = \varphi(x)$  أي  $(x, y) = \Phi(x, 0) = (x, \varphi_2(x, 0)) = (x, \varphi(x))$  وهو المطلوب إثباته

يكون من المفيد أحياناً وجود قانون صريح لمشتقة الدالة  $\varphi$  . لكي نمطى هذا نجد من المناسب أن نقدم فكرة كتلة المشتقات الجزئية للدالة  $F$  . إذا كانت  $(x, y) \in \Omega$  . فإن كتلة المشتقات الجزئية  $D_{(1)}F(x, y)$  هو راسم الدالة الخطية  $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  ومعطى بأن

$$D_{(1)}F(x, y)(u) = Df(x, y)(u, 0) \text{ for } u \in \mathbb{R}^p$$

وكتلة المشتقات الجزئية  $D_{(2)}F(x, y)$  هي راسم الدالة الخطية  $\mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$  الذي يعطى بأنه

$$D_{(2)}F(x, y)(v) = DF(x, y)(0, v) \text{ for } v \in \mathbb{R}^q.$$

بما أن  $(u, v) = (u, 0) + (0, v)$  فن الواضح أن

$$(41.10) \quad DF(x, y)(u, v) = D_{(1)}F(x, y)(u) + D_{(2)}F(x, y)(v)$$

لاحظ أن الراسمين  $L_1$  و  $L_2$  المذكورين في البرهان السابق هما  $D_{(1)}F(0, 0)$  و  $D_{(2)}F(0, 0)$  على الترتيب .

٤١ - ١٠ نتيجة . بفروض النظرية ، يوجد  $\gamma > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $\|x - a\| < \gamma$  فإن المشتقة للدالة  $\varphi$  عند  $x$  هي العنصر من  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$  والمعطى كما يلي

$$(41.11) \quad D\varphi(x) = -[D_{(2)}F(x, \varphi(x))]^{-1} \circ [D_{(1)}F(x, \varphi(x))]$$

البرهان . نفرض أن  $K: W \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  معرفة بأنها

$$K(x) = (x, \varphi(x)) \quad \text{for } x \in W$$

حيث أنه بما أن  $F \circ K(x) = F(x, \varphi(x)) = 0$  فنجد أن  $F \circ K: W \rightarrow \mathbb{R}^q$  هي دالة ثابتة . وعلاوة على ذلك ، كما رأينا حالا أن

$$DK(x)(u) = (u, D\varphi(x)(u)) \quad \text{for } u \in \mathbb{R}^p$$

فنتبع بتطبيق قاعدة السلسلة ٤٠ - ٢ على الدالة الثابتة  $F \circ K$  أن

$$0 = D(F \circ K)(x) = DF(K(x)) \circ DK(x)$$

إذا استخدمنا ( ٤١ - ١٠ ) ، نجد أن

$$DF(x, \varphi(x))(u, v) = D_{(1)}F(x, \varphi(x))(u) + D_{(2)}F(x, \varphi(x))(v)$$

ينتج من هذا أنه إذا كانت  $u \in \mathbb{R}^p$  ، فإن

$$\begin{aligned} 0 &= DF(x, \varphi(x))(u) = D_{(1)}F(x, \varphi(x))(u) + D_{(2)}F(x, \varphi(x))(D\varphi(x)(u)) \\ &= D_{(1)}F(x, \varphi(x))(u) + [D_{(2)}F(x, \varphi(x)) \circ D\varphi(x)](u) \end{aligned}$$

ومنها نحصل على

$$0 = D_{(1)}F(x, \varphi(x)) + D_{(2)}F(x, \varphi(x)) \circ D\varphi(x)$$

لكل  $x \in W$  . من الفرض  $L_2 = D_{(2)}F(a, b)$  لها دالة عكسية . بما أن  $F$  و  $\varphi$  متصلتان ، فإنه توجد  $\gamma > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $\|x - a\| < \gamma$  ، حينئذ يكون للدالة  $D_{(2)}F(x, \varphi(x))$  دالة عكسية . ومن ثم ينتج معادلة ( ٤١ - ١١ ) المعادلة السابقة وهو المطلوب إثباته

ربما يكون من المفيد تفسير قانون ( ٤١ - ١١ ) بدلالة المصفوفات . نفرض أن لدينا مجموعة من  $q$  معادلات في  $p + q$  متغيرات مستقلة معطاة في ( ٤١ - ٩ ) . كما لاحظنا ، يتطلب الفرض لنظرية الدالة الصريحة أن المصفوفة

$$\begin{bmatrix} f_{1,p+1} & \cdots & f_{1,p+q} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{q,p+1} & \cdots & f_{q,p+q} \end{bmatrix}$$

ها مصفوفة عكسية عند النقطة  $(a, b)$  . ( تذكر أن  $f_{ij}$  تشير إلى المشتقة الجزئية للدالة  $f_i$  بالنسبة للمتغير الذي دليله  $j$  ) . في هذه الحالة تعطى المشتقة لدالة الحل  $\varphi$  عند نقطة  $x$  بأنها

$$-\begin{bmatrix} f_{1,p+1} & \cdots & f_{1,p+q} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{q,p+1} & \cdots & f_{q,p+q} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{q,1} & \cdots & f_{q,p} \end{bmatrix}$$

حيث من المفهوم أن تقييم كلتا المصفوفتين يكون عند النقطة  $(x, \varphi(x))$  بالقرب من  $(a, b)$

### نظريتنا البارامترية والرتبة :

يمكن اعتبار نظرية الدالة الضمنية ( ٤١ - ٩ ) بأنها تعطى الشروط التي تحتها « المنحنى المستوي » .

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q : F(x, y) = 0\}$$

الذي يمر بالنقطة  $(a, b)$  . يمكن أن يمثل بارامترياً على الأقل موضعياً مثل المنحنى في  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  لدالة مأمرفة في جوار  $W$  من  $a \in \mathbb{R}^p$  إلى  $\mathbb{R}^q$  ؛ أي أن

$$C = \{(x, \varphi(x)) : x \in W\}$$

سنمثل الآن نظرية أخرى تعطى شروطاً تحتها يمكن أن تكون الصورة لدالة ترسم فئة جزئية مفتوحة من  $\mathbb{R}^p$  إلى  $\mathbb{R}^q$  ممثلة بارامترى بواسطة دالة  $\varphi$  معرفة في فئة مفتوحة في فراغ في بعد أقل .

لوجود هذه النظرية ، سنحتاج بعض حقائق أولية ، ولكنها أساسية ، من الجبر الخطي الذي ربما يكون مألوفاً للقارئ (\*). نتذكر أنه إذا كانت  $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  تحويل خطياً فإن المدى أو الصورة  $R_L$  من  $L$  هو فراغ جزئي من  $\mathbb{R}^q$  معطى بأنه

$$R_L = \{L(x) : x \in \mathbb{R}^p\}$$

والفراغ الصفري ( أو اللب )  $N_L$  من  $L$  هو الفراغ الجزئي من  $\mathbb{R}^p$  والمعطى بأنه

$$N_L = \{x \in \mathbb{R}^p : L(x) = 0\}$$

---

\* لتفصيل اكبر ، استرشد بكتب هوفمان ، كوزي أو فنكيز المدونة في المراجع .

يسمى البعد  $r(L)$  من  $R_L$  رتبة  $L$  ، ويسمى البعد  $n(L)$  من  $N_L$  بصفرية  $L$  . ( أى أن رتبة  $L$  هي عدد المتجهات المستقلة الخطية في  $R^q$  التى نحتاجها لرؤية المدى  $R_L$  ، وصفرية  $L$  هو عدد المتجهات المستقلة الخطية في  $R^p$  التى نحتاج إليها لرؤية الفراغ الصفرى  $N_L$  ) . نبرهن كتمرين أنه إذا كانت  $\{u_1, \dots, u_n\}$  ( حيث  $n = n(L)$  ) فئة متجهات مستقلة خطية في  $R^p$  تشيع  $N_L$  التى نصيف إليها  $p - n$  متجهات  $u_{n+1}, \dots, u_p$  لنحصل على أساس الفراغ  $R^p$  ، حينئذ تكون الفئة  $\{L(u_{n+1}), \dots, L(u_p)\}$  فئة متجهات خطية مستقلة في  $R^q$  تشيع  $R_L$  . لذلك ينتج أن  $p = n(L) + r(L)$  ، ومن ثم : يكون البعد انطاق  $L$  مساوياً لحاصل جمع صفرية ورتبة  $L$  .

إذا مثلنا  $L$  بمصفوفة  $p \times q$  كما في ( ٢٣-١ ) ، فيمكن توضيح أن رتبة  $L$  هي العدد الأكبر  $r$  بحيث أنه يوجد على الأقل مصفوفة جزئية  $r \times r$  محددها ليس صفراً .

تؤكد نظرية التمثيل البارامترية على أنه إذا كانت  $f$  هي راسم  $C^1$  لفئة مفتوحة  $\Omega \subseteq R^p$  إلى  $R^q$  بحيث أن  $Df(x)$  لها رتبة مساوية  $r$  لجميع  $x \in \Omega$  وإذا كانت  $f(a) = b \in R^q$  لقيمة ما  $a \in \Omega$  ، حينئذ يوجد جوار  $V$  للعنصر  $a$  بحيث أن التقييد للدالة  $f$  إلى  $V$  يمكن إعطاؤه كالراسم  $C^1$  الذى يرسم  $\phi$  المعرفة على جوار في  $R^r$  .

٤١-١١ نظرية التمثيل البارامترى . نفرض أن  $\Omega \subseteq R^p$  مفتوحة ونفرض أن  $f: \Omega \rightarrow R^q$  تنتمي إلى صنف  $C^1(\Omega)$  . نفرض أن  $Df(x)$  لها رتبة  $r$  لكل  $x \in \Omega$  ونفرض أن  $f(a) = b \in R^q$  لقيمة ما  $a \in \Omega$  . حينئذ

- (i) يوجد جوار مفتوح  $V \subseteq \Omega$  للعنصر  $a$  ودالة  $\alpha: V \rightarrow R^r$  ودالة  $\alpha$  في صنف  $C^1(V)$  ، و
- (ii) توجد فئة مفتوحة  $W \subseteq R^r$  ودوال  $\beta: W \rightarrow R^p$  و  $\varphi: W \rightarrow R^q$  ، بحيث أن
- (iii)  $f(x) = \varphi \circ \alpha(x)$  لكل  $x \in V$  ،  $\varphi(t) = f \circ \beta(t)$  لكل  $t \in W$

البرهان . يكون فقد الحالة العامة يمكن فرض  $b = 0 \in R^q$  و  $a = 0 \in R^p$

نفرض أن  $L = Df(0)$  بحيث أن  $L: R^p \rightarrow R^q$  لها رتبة  $r$  ، ونفرض أن  $\{x_1, \dots, x_p\}$  هي أساس في  $R^p$  بحيث أن  $\{x_{r+1}, \dots, x_p\}$  تشيع الفراغ الصفرى من  $L$  . نفرض أن  $X_1$  هي رؤية  $\{x_1, \dots, x_r\}$  وأن  $X_2 = N_L$  هي رؤية  $\{x_{r+1}, \dots, x_p\}$  . ينتج كما ذكرنا سابقاً أن  $Y_1 = R_L$  تفترت بواسطة  $\{y_1 = L(x_1), \dots, y_r = L(x_r)\}$  . نفرض أننا اخترنا  $\{y_{r+1}, \dots, y_q\}$  بحيث أن  $\{y_1, \dots, y_q\}$  هي أساس  $R^q$  ونفرض أن  $Y_2$  هي الرؤية المقدار  $\{y_{r+1}, \dots, y_q\}$

ينتج أنه لكل متجه  $x \in R^p$  تمثيل وحيد في الصورة  $x = c_1 x_1 + \dots + c_p x_p$  . نفرض أن  $P_1$  و  $P_2$  تحويلان خطيان في  $R^p$  ومعرفان كما يلي

$$P_1(x) = \sum_{j=1}^r c_j x_j, \quad P_2(x) = \sum_{j=r+1}^p c_j x_j$$

واضح أن المدى للمقدار  $P_j$  يساوى  $X_j$ ,  $j = 1, 2$ . بالمثل ، نفرض أن  $Q_1$  و  $Q_2$  تحويلان خطيان في  $R^q$  ومعرفان المقدار  $y = c_1 y_1 + \dots + c_q y_q$  بأنهما

$$Q_1(y) = \sum_{j=1}^r c_j y_j, \quad Q_2(y) = \sum_{j=r+1}^q c_j y_j$$

واضح أن المدى للمقدار  $Q_j$  هو  $Y_j$ ,  $j = 1, 2$ .

إذا كانت  $L_1$  هي تقييد  $L$  إلى  $X_1$  ، حينئذ  $L_1$  هو تناظر أحادي من  $X_1$  إلى  $Y_1$  فوقيا ؛ نفرض أن  $A : Y_1 \rightarrow X_1$  هو عكس  $L_1$ . نلاحظ أن  $A \circ L(x) = x$  لكل  $x \in X_1$  وأن  $L \circ A(y) = y$  لكل  $y \in Y_1$ . نعرف  $u$  الآن في  $\Omega \subseteq R^p$  إلى  $R^p$  بأنها

$$(41.12) \quad u(x) = A \circ Q_1 \circ f(x) + P_2(x), \quad x \in \Omega$$

أى أن  $u(0) = 0$  ،  $u$  ترسم  $X_1 \cap \Omega$  إلى  $X_1$  ، وأن

$$Du(x) = A \circ Q_1 \circ Df(x) + P_2, \quad x \in \Omega$$

ومن ثم تنتمي  $u$  إلى صنف  $C^1(\Omega)$ . وبما أنه قد لاحظنا حالا أن  $Du(0)$  هو الراسم المحايد على  $R^p$  ، حينئذ ينتج من النظرية العكسية (١١ - ٨) أنه يوجد جوار مفتوح  $U$  من  $a = 0$  بحيث أن  $U' = u(U)$  هو جوار مفتوح من  $0$  ، وأن تقييد  $u$  إلى  $U$  هو تناظر أحادي إلى  $U'$  وله راسم عكسي  $w = u^{-1} : U' \rightarrow R^p$  ينتمي إلى صنف  $C^1(U')$ . وبالإضافة إلى ذلك ، نجد أنه بإحلال  $U'$  و  $U$  بفتتين اصغر منها ، يمكننا أيضا فرض أن  $U'$  محبة (أى أنها ، تحتوى على جزء الخط المستقيم الواصل بين أى نقطتين من نقطتها) .

نفرض الآن أن  $g : U' \rightarrow R^q$  معرفة بأنها

$$g(z) = f(w(z)), \quad z \in U' \subseteq R^p$$

واضح أن  $g$  تنتمي إلى صنف  $C^1(U')$  وأن

$$Dg(z) = Df(w(z)) \circ Dw(z), \quad z \in U'$$

بما أن  $Df(x)$  لها رتبة  $r$  لكل  $x \in \Omega$  وأن  $Dw(z)$  لها دالة عكسية عند  $x \in U'$  حينئذ ينتج من نظرية في جبر خطى أن  $Dg(z)$  لها رتبة  $r$  لجميع  $z \in U'$ . وبمعنى آخر

$$\begin{aligned} g(z) &= (Q_1 + Q_2) \circ f(w(z)) \\ &= Q_1 \circ f(w(z)) + Q_2 \circ f(w(z)) \end{aligned}$$

حيث أن  $w = u^{-1}$  (١١ - ١٢) أن

$$z = u(w(z)) = A \circ Q_1 \circ f(w(z)) + P_2(w(z)), \quad z \in U'$$



لكن بما أن  $L \circ A \circ Q_1 = Q_1$  في  $R^q$  وأن  $L \circ P_2 = 0$  في  $R^p$  نجد أن

$$(41.13) \quad L(z) = Q_1 \circ f(w(z)) = Q_1 \circ g(z)$$

ومنها ينتج أن  $L = Q_1 \circ Dg(z)$  عند  $z \in U'$  . لذلك ، إذا كانت  $z \in U'$  ، حينئذ يرسم المؤثر  $Q_1$  مدى  $Dg(z)$  (الذي بعده هو  $r$ ) فوقياً إلى مدى  $L$  (الذي أيضاً له بعد  $r$ ) . ينتج أن  $Q_1$  إدخالية في مدى  $Dg(z)$  عند  $z \in U'$  ؛ ومن ثم ، إذا كانت  $z \in U'$  و  $x \in R^p$  بحيث أن  $L(x) = 0$  فإن  $Dg(z)(x) = 0$  ونتيجة لذلك نجد أنه ، إذا كانت  $z \in U'$  و  $z_2 \in X_2 = N_L$  فإننا نستنتج أن  $Dg(z)(z_2) = 0$  .

سنوضح الآن أن  $g: U' \rightarrow R^q$  تعتمد فقط على  $z_1 \in X_1$  بمعنى أنه إذا كانت  $z \in U'$  و  $z_2 \in X_2$  بحيث أن  $z + z_2 \in U'$  ، فإن  $g(z + z_2) = g(z)$  . للملاحظة هذا ، نستخدم نظرية القيمة المتوسطة (٤٠ - ٥) لاستنتاج وجود نقطة  $z_0$  على قطعة الخط المستقيم الواصل بين  $z$  و  $z + z_2$  (ومن ثم في  $U'$ ) بحيث أن

$$0 \leq \|g(z + z_2) - g(z)\| \leq \|Dg(z_0)(z_2)\| = 0$$

وإذن  $g(z + z_2) = g(z)$  كما المطلوب .

نستعمل الآن لتعريف الرواسم  $\alpha, \beta, \phi$  نفرض أن  $C: R' \rightarrow R^p$  هي تحويل خطي يرسم العناصر الأساسية القياسية  $e_1, \dots, e_r$  في  $R'$  إلى المتجهات  $x_1, \dots, x_r$  التي تكون قاعدة للمقدار  $X_1$  . حينئذ  $C$  هي تناظر أحادي من  $R'$  إلى  $X_1$  فوقياً وإذن  $C^{-1}: X_1 \rightarrow R'$  موجودة . نفرض أن  $W = C^{-1}(U') = C^{-1}(U' \cap X_1)$  ، بحيث أن  $W \subseteq R'$  هو جوار مفتوح عند  $0$  في  $R'$  ونفرض أن  $V \subseteq U$  جوار مفتوح عند  $a = 0$  بحيث أن  $P_1 \circ u(V) \subseteq U'$  . نعرف الآن  $\alpha: V \rightarrow R'$  ،  $\beta: W \rightarrow R^p$  ، بأنها

$$(41.14) \quad \alpha(x) = C^{-1} \circ P_1 \circ u(x), \quad \beta(t) = w \circ C(t)$$

عند  $x \in V$  و  $t \in W$  . من الواضح أن  $\alpha$  تنتمي إلى صنف  $C^1(V)$  وأن  $\alpha(V) \subseteq W$  وأن  $\beta$  تنتمي إلى  $C^1(W)$  و  $\beta(W) \subseteq U$  . نعرف الآن  $\phi: W \rightarrow R^q$  عند  $t \in W$  بأنها

$$\phi(t) = g \circ C(t)$$

ومنها ينتج أن

$$\phi(t) = (f \circ w) \circ C(t) = f \circ \beta(t)$$

وعلاوة على ذلك ، نجد أنه إذا كانت  $x \in V$  ، فإن

$$f(x) = f(w \circ u(x)) = (f \circ w) \circ u(x) = g \circ u(x)$$

لكن ، قدرنا أن  $g \circ u(x) = g \circ P_1 \circ u(x)$  بحيث أن

$$\begin{aligned} f(x) &= g \circ u(x) = g \circ (C \circ C^{-1}) \circ (P_1 \circ u)(x) \\ &= (g \circ C) \circ (C^{-1} \circ P_1 \circ u)(x) \\ &= \varphi \circ \alpha(x) \end{aligned}$$

إذن  $f(x) = \varphi \circ \alpha(x)$  لكل  $x \in V$  . وهو المطلوب إثباته

أثناء هذا التركيب ، قد أثبتنا فعلا معلومات أكبر قليلا نستفيد في هذه النتيجة من التصور المستخدم في برهان النظرية .

٤١-١٢ نتيجة . (أ) الراسم  $\varphi: W \rightarrow R^q$  يكون في الصورة  $\varphi_1 + \varphi_2$  حيث  $\varphi_1$  هي التقييد إلى  $W$  للراسم الخطى من  $R^q \rightarrow R^r$  الذى يأخذ  $e_j \in R^r$  إلى  $\varphi_2(W) \subseteq Y_2$  فوقيا وحيث  $y_j = L(x_j)$  ,  $j = 1, \dots, r$

(ب) إذا كانت  $t \in W$  ، فإن  $\alpha \circ \beta(t) = t$

(ج) إذا كانت  $x \in U \cap X_1$  ، فإن  $x \in V$  و  $\beta \circ \alpha(x) = x$

البرهان . (أ) بما أن  $g = Q_1 \circ g + Q_2 \circ g$  فينتج من (٤١-١٢) أن  $g = L + Q_2 \circ g$  وإذاً ، من تعريف  $\varphi$  نجد أن  $\varphi = L \circ C + Q_2 \circ g \circ C$  التى لها الصورة المبينة في (أ) .

(ب) إذا كانت  $t \in W$  ، فإن  $x = \beta(t) = w \circ C(t) \in U$  لها خاصية كون  $P_1 \circ u(x) = C(t) \in U'$  ومن ثم  $u(x) = u \circ w \circ C(t) = C(t) \in U' \cap X_1$  أى أن  $x \in V$  وأن  $\alpha(x) = C^{-1} \circ P_1 \circ u(x) = C^{-1} \circ C(t) = t$

ما يثبت نص (ب) .

(ج) إذا كانت  $x \in \Omega \cap X_1$  ، فإنه ينتج من (٤١-١٢) وحقيقة كون  $P_2(x) = 0$  وأن  $u(x) \in X_1$  ومن ثم إذا كانت  $x \in U \cap X_1$  فينتج أن  $P_1 \circ u(x) = u(x) \in U' \cap X_1$  أى أن  $x \in V$  . وبالإضافة إلى ذلك

$$\begin{aligned} \beta \circ \alpha(x) &= (w \circ C) \circ (C^{-1} \circ P_1 \circ u)(x) \\ &= w \circ C \circ C^{-1} \circ u(x) = w \circ u(x) = x \end{aligned}$$

وهو المطلوب إثباته .

يمكننا الآن استخدام النتيجة لنظرية البارامترية أو التمثيل البارامترى لبرهنة نظرية الرتبة .

٤١-١٣ نظرية رتبة . نفرض أن  $\Omega \subseteq R^p$  مفتوحة ونفرض أن  $f: \Omega \rightarrow R^q$  تنتمى إلى صنف  $C^1(\Omega)$  . نفرض أن  $Df(x)$  لها رتبة  $r$  لجميع  $x \in \Omega$  ونفرض أن  $f(a) = b \in R^q$  عند قيمة ما  $a \in \Omega$  . حينئذ :

(i) يوجد جواران مفتوحان  $V$  للنقطة  $a$  ،  $V'$  المنصهر  $0$  في  $R^p$  ، ودالة  $\sigma: V \rightarrow V'$  في صنف  $C^1(V)$  لها دالة عكسية  $\sigma^{-1}: V' \rightarrow V$  في صنف  $C^1(V')$  ؛

(ii) يوجد جواران مفتوحان  $Z$  للنقطة  $b$  ،  $Z'$  المنصر  $0$  في  $\mathbf{R}^q$  ، ودالة  $\tau: Z' \rightarrow Z$  في صنف  $C^1(Z')$  لها دالة عكسية  $\tau^{-1}: Z \rightarrow Z'$  في صنف  $C^1(Z)$  ؛

(iii) إذا كانت  $x \in V$  ، فإن  $f(x) = \tau \circ i_r \circ \sigma(x)$  ، حيث  $i_r: \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^q$  هو الراسم المعرف بأنه

$$i_r(c_1, \dots, c_r, c_{r+1}, \dots, c_p) = (c_1, \dots, c_r, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^q$$

البرهان . نفرض أن  $b = 0$  و  $a = 0$  ونستخدم التصور والناتج التي أثبتناها أثناء البرهان لنظرية التمثيل البارامترى . نفرض أن  $B: \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^p$  هي الدالة الخطية التي ترسم العناصر الأساسية القياسية  $e_1, \dots, e_p$  من  $\mathbf{R}^p$  إلى المتجهات  $x_1, \dots, x_p$  ؛ إذن  $B$  هو تناظر أحادي من  $\mathbf{R}^p$  إلى  $\mathbf{R}^p$  فوقيا وإذن  $B^{-1}$  موجودة . الراسم  $\sigma: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^p$  المعرف بأنه  $\sigma(x) = B^{-1} \circ u(x)$  ينتمى إلى صنف  $C^1(\Omega)$  وبما أن التقييد  $u$  إلى  $U$  له راسم عكسي  $w: U' \rightarrow \mathbf{R}^p$  يرسم إلى  $U$  فوقيا ، فينتج أن تقييد  $\sigma$  إلى  $U$  له راسم عكسي  $\sigma^{-1} = w \circ B$  يرسم إلى  $U'$  فوقيا .

إذا فرضنا أن  $W \subseteq \mathbf{R}^r$  وأن  $\varphi: W \rightarrow \mathbf{R}^q$  هي كما في النظرية البارامترية ونفرض أن  $H: \mathbf{R}^q \rightarrow \mathbf{R}^q$  دالة خطية ترسم العناصر الأساسية القياسية  $e_1, \dots, e_q$  من  $\mathbf{R}^q$  إلى المتجهات  $y_1, \dots, y_q$  ؛ حينئذ  $H$  هي تناظر أحادي من  $\mathbf{R}^q$  إلى  $\mathbf{R}^q$  فوقيا وإذن  $H^{-1}$  موجودة تعرف

$$W' = \{(c_1, \dots, c_q) \in \mathbf{R}^q : (c_1, \dots, c_r) \in W\}$$

ونفرض أن  $\tau: W' \rightarrow \mathbf{R}^q$  معرفة بأنها

$$\tau(c_1, \dots, c_q) = \varphi(c_1, \dots, c_r) + H(0, \dots, 0, c_{r+1}, \dots, c_q)$$

فينتج من نتيجة (٤١ - ١٢) (أ) أن  $D\tau(0) = H$  ، وإذن تدل نظرية الدالة العكسية (٤١ - ٨) على أن تقييد  $\tau$  إلى جوار ما  $Z'$  للمنصر  $0$  هو تناظر أحادي إلى جوار ما  $Z$  من  $\tau(0) = 0$  فوقيا .

وبتقييد أبعد  $V$  إذا كان ضرورياً ، يمكننا فرض أن  $f(V) \subseteq Z$  . نفرض الآن أن  $x \in V$  ونعتبر  $\sigma(x) = B^{-1} \circ u(x)$  . إذا كانت  $i_r$  معرفة كما عرفت أعلاه ، فإن  $\tau \circ i_r \circ \sigma(x) = \varphi \circ \sigma(x) = f(x)$  ، إذن  $i_r \circ \sigma(x) = (C^{-1} \circ P_1 \circ u(x), 0) = (\alpha(x), 0)$  لجميع  $x \in V$  وهو المطلوب إثباته .

## تعريفات :

٤١ - (أ) نفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbf{R}^p$  مفتوحة وأن  $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^q$  . إذا كانت  $Df(x)$  موجودة لجميع  $x \in \Omega$  وإذا كانت  $i = 1, \dots, q$  ،  $j = 1, \dots, p$  ، حينئذ أثبت أن

$C^1(\Omega)$  فإن كلا من المشتقات الجزئية  $D_j f$  متصلة في  $\Omega$  ومن ثم إذا كانت  $f$  تنتمي إلى صنف  $C^1(\Omega)$  فإن كلا من المشتقات الجزئية  $D_j f$  متصلة في  $\Omega$ .

٤١ - (ب) نفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  مفتوحة وأن  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  . إذا كانت  $f$  تنتمي إلى صنف  $C^1(\Omega)$  وكانت  $K \subseteq \Omega$  مدمجة ، وضح أن  $x \mapsto Df(x)$  متصلة بانتظام بمعنى أنه لكل  $\varepsilon > 0$  توجد  $\delta > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $x, y \in K$  و  $\|x - y\| < \delta$  فإن  $\|Df(x) - Df(y)\|_{pq} < \varepsilon$

٤١ - (ج) نفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  و  $\Omega_1 \subseteq \Omega$  مفتوحة ونفرض أن  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  تنتمي إلى صنف  $C^1(\Omega)$  وأن  $g: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$  تنتمي إلى صنف  $C^1(\Omega_1)$  . إذا كانت  $f(\Omega) \subseteq \Omega_1$  ، أثبت أن  $g \circ f$  تنتمي إلى صنف  $C^1(\Omega)$  .

٤١ - (د) نفرض أن  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  معرفة بأنها  $f(x) = x^3$  . أثبت أن  $f$  تنتمي إلى فصل  $C^1(\mathbb{R})$  وأنه تناظر أحادي من  $\mathbb{R}$  إلى  $\mathbb{R}$  فوقيا ولها دالة عكسية  $g(x) = x^{1/3}$  لكل  $x \in \mathbb{R}$  . لكن  $Df(0)$  ليست راسماً إدخالياً أو فوقياً . هل تنتمي  $g$  إلى صنف  $C^1(\mathbb{R})$  ؟

٤١ - (هـ) نفرض أن  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  بحيث أن  $g'(x) \neq 0$  لكل  $x \in \mathbb{R}$  . وضح أن  $g$  تناظر أحادي من  $\mathbb{R}$  إلى  $\mathbb{R}$  فوقيا .

٤١ - (و) نفرض أن  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  ، ونفرض أن  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$  ، ونفرض أن  $g: f(A) \rightarrow \mathbb{R}^p$  هي الدالة العكسية للدالة  $f$  . نفرض أن  $f$  قابلة للتفاضل عند  $a \in A$  وأن  $g$  قابلة للتفاضل عند  $b = f(a)$  . إذا كانت  $Df(a)$  ليس لها دالة عكسية ، حينئذ أثبت أن  $Dg(b)$  ليست لها دالة عكسية .

٤١ (ز) - نفرض أن  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  مطاة بأنها  $f(x, y) = (x + y, 2x + ay)$

(أ) احسب  $Df(x, y)$  فأثبت أن  $Df(x, y)$  لها دالة عكسية إذا وإذا فقط كانت  $a \neq 2$  .

(ب) افحص الصورة لمربع الوحدة  $\{(x, y): x, y \in [0, 1]\}$  عند  $a = 1, 2, 3$  .

٤١ - (ح) نفرض أن  $f$  هي الراسم من  $\mathbb{R}^2$  إلى  $\mathbb{R}^2$  فوقيا الذي يرسل النقطة  $(x, y)$  إلى النقطة  $(u, v)$  حيث

$$u = x, \quad v = xy$$

ارسم بعض منحنيات مقدار ثابت  $v$  ومقدار ثابت  $u$  في المستوى  $(x, y)$  وبعض منحنيات مقدار ثابت  $y$  ومقدار ثابت  $x$  في المستوى  $(u, v)$  . هل هذا الرسم واحد - واحد ؟ . هل ترسم  $f$  كل  $\mathbb{R}^2$  فوقياً ؟ . أثبت أنه إذا كانت  $x \neq 0$  ، فإن  $f$  ترسم جواراً ما للنقطة  $(x, y)$  بنمط واحد - واحد إلى جوار  $(x, xy)$  فوقيا . في أي نطاق في المستوى  $(u, v)$  ترسم الدالة  $f$

المستطيل  $\{(x, y): 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$  ما هي النقطة في المستوى  $(x, y)$  التي ترسم تحت  $f$  إلى المستطيل  $\{(u, v): 1 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2\}$

٤١ - (ط) نفرض أن  $f$  هو الراسم من  $\mathbb{R}^2$  إلى  $\mathbb{R}^2$  الذي يرسل النقطة  $(x, y)$  إلى النقطة  $(u, v)$  والمعطى كما يلي

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$$

ما هي المنحنيات في المستوى  $(x, y)$  التي ترسم تحت  $f$  إلى الخطين مقدار ثابت  $v =$  ومقدار ثابت  $u =$  إلى أي منحنيين في المستوى  $(u, v)$  ينقل الخطين ومقدار ثابت  $y =$  ومقدار ثابت  $x =$  أثبت أن كل نقطة  $(u, v)$  ليست صفيرية هي الصورة تحت  $f$  لنقطتين . إلى أي حيز ترسم الدالة  $f$  المربع  $\{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  ما هو الجبر المرسوم بالدالة  $f$  إلى المربع  $\{(u, v): 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$

٤١ - (ى) نفرض أن  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  معرفة بأنها

$$h(x) = x + 2x^2 \sin \frac{1}{x} \quad \text{for } x \neq 0$$

$$= 0 \quad \text{for } x = 0$$

أثبت أن  $h$  لا تنتمي إلى صنف  $C^1(\mathbb{R})$  وأن  $h$  ليست إدخالية في جوار 0 . لكن ، فوقية في جوار 0 أن  $Dh(0)$  لها دالة عكسية .

٤١ - (ك) نفرض أن  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  معرفة بأنها  $f(x, y) = (y, x + y^2)$  عند  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  . أثبت أن  $f$  تنتمي إلى صنف  $C^1(\mathbb{R}^2)$  وأن  $f$  لها دالة عكسية في جوار ما لنقطة اختيارية من  $\mathbb{R}^2$  . ارسم الصورة تحت  $f$  للمستقيات  $x = 0, \pm 1, \pm 2$  and  $y = 0, \pm 1, \pm 2$  . أوجد الدالة العكسية  $g = f^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  واثبت أن  $Dg(f(x_0, y_0)) = Df(x_0, y_0)^{-1}$

٤١ - (ل) ( هذا التمرين يحتاج إلى معرفة معنى محدد المصفوفة المربعة ) . نفرض أن  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$  ونفرض أن  $[c_{ij}]$  هي مصفوفة تمثل  $L$  بالنسبة للقاعدة القياسية في  $\mathbb{R}^p$  . وضع في علم الجبر الخطي أن  $L$  لها مصفوفة عكسية إذا وإذا فقط كان  $\Delta = \det[c_{ij}]$  ليس صفراً . وبالإضافة إلى ذلك ، إذا كانت  $\Delta \neq 0$  ، فإن مصفوفة  $L^{-1}$  تكون في الصورة  $[p_{ij}/\Delta]$  ، حيث  $p_{ij}$  كثيرات حدود في  $c_{ij}$  .

(أ) أثبت أنه إذا كانت  $L_0$  لها مصفوفة عكسية وإذا كانت  $\|L - L_0\|_p$  صغيرة بكفاية ، فإن  $L$  لها معكوس .

(ب) أثبت أنه إذا كانت  $L_0$  لها معكوس ، فإن الراسم  $L \mapsto L^{-1}$  يكون متصلًا في جوار  $L_0$  بالنسبة للعمود في  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$

(ج) نفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  مفتوحة وأن  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  تنتمي إلى صنف  $C^1(\Omega)$

إذا كانت  $Df(c)$  لها دالة عكسية عند بعض  $c \in \Omega$  ، فإن  $Df(x)$  لها دالة عكسية في جوار ما للعنصر  $c$ .

٤١ - (م) نفرض أن  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  معرفة بأنها  $F(x, y) = y^2 - x$  . أثبت أن  $F$  تنتمي إلى صنف  $C^1(\mathbb{R}^2)$  لكن  $D_2F(0, 0) = 0$  . أثبت أنه لا توجد دالة  $\varphi$  معرفة في جوار مثل  $W$  للعنصر  $0$  بحيث أن  $F(x, \varphi(x)) = 0$  لجميع  $x \in W$  .

٤١ - (ن) نفرض أن  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  معرفة بأنها

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - y - 2xz)$$

بحيث  $f(0, 0, 0) = (0, 0)$  وأن  $Df(0, 0, 0)$  معطاة بالآتي

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(أ) أثبت أنه يمكننا الحل بالنسبة إلى  $\varphi(z) = \varphi(z)$  بالقرب من  $z = 0$  وأن

$$D\varphi(0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(ب) أذكر الحل الصريح عند  $\varphi(z) = \varphi(z)$  للحصول على

$$\varphi(z) = \left( \frac{z}{2(z-1)}, \frac{2-2z^2}{2(z-1)} \right) \text{ for } z < 1$$

حقق النتيجة الموجودة في جزء (أ) .

(ج) أثبت أنه يمكننا الحل بالنسبة إلى  $\psi(x) = \psi(x)$  بالقرب من  $x = 0$  وأن

$$D\psi(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(د) أذكر الحل الصريح عند  $\psi(x) = \psi(x)$  لتحصل على

$$\psi(x) = \left( \frac{2x^2 + x}{1-2x}, \frac{2x}{2x-1} \right) \text{ for } x < \frac{1}{2}$$

حقق النتيجة الموجودة في جزء (ج) .

٤١ - (س) نفرض أن  $F: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$  معرفة بأنها

$$F(u, v, w, x, y) = (uy + vx + w + x^2, uvw + x + y + 1)$$

ولاحظ أن  $F(2, 1, 0, -1, 0) = (0, 0)$

(أ) وضح أنه يمكننا حل  $F(u, v, w, x, y) = (0, 0)$  بالنسبة إلى  $(x, y)$  بدلالة

$(u, v, w)$  بالفروض  $(2, 1, 0)$  .

(ب) إذا كانت  $(x, y) = \varphi(u, v, w)$  هي الحل في جزء (أ) ، أثبت أن  $D\varphi(2, 1, 0)$

تعطى بالصفرقة .

$$-\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

٤١ - (ع) نفرض أن  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  ونفرض أن  $F: A \rightarrow \mathbb{R}$  تمثل ضمناً سطحاً  $S_F$  في  $\mathbb{R}^3$  مثل « السطح المستوى »

$$S_F = \{(x, y, z) \in A : F(x, y, z) = 0\}$$

إذا كانت  $F$  قابلة للتفاضل عند نقطة داخلية  $(x_0, y_0, z_0) \in S_F$  في  $A$  ، فإن الفراغ المماس للسطح  $S_F$  عند هذه النقطة هو فئة النقط

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : A_{(x_0, y_0, z_0)}(x, y, z) = 0\}$$

حيث  $A_{(x_0, y_0, z_0)}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  هو الراسم المألوف من  $\mathbb{R}^3$  والمعرف بأنه

$$\begin{aligned} A_{(x_0, y_0, z_0)}(x, y, z) &= F(x_0, y_0, z_0) + DF(x_0, y_0, z_0)(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \\ &= DF(x_0, y_0, z_0)(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \end{aligned}$$

(أ) أثبت أن الفراغ المماس عند النقطة  $(x_0, y_0, z_0)$  يعطى بالآتي :

$$\{(x, y, z) : D_1F(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + D_2F(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + D_3F(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0\}$$

حينئذ الفراغ المماس للسطح  $S_F$  يكون مستوياً إذا كان واحد على الأقل من الأعداد  $D_1F(x_0, y_0, z_0)$ ،  $D_2F(x_0, y_0, z_0)$ ،  $D_3F(x_0, y_0, z_0)$  يختلف عن صفر . في هذه الحالة يسمى الفراغ المماس للسطح  $S_F$  بالمستوى المماس للسطح  $S_F$  عند النقطة  $(x_0, y_0, z_0)$  .

٤١ - (ف) نفرض أن  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  ، والمعطاة أسفل ، تمثل ضمناً سطحاً  $S_F$  في  $\mathbb{R}^3$  كالسطح المستوى

$$S_F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$$

في كل من الحالات الآتية ، حدد فراغ المماس للسطح  $S_F$  عند النقط المبينة

(أ) نفرض أن  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$  عند النقطتين  $(1, 1, 2)$  و  $(0, 2, 4)$

(ب) نفرض أن  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 25$  عند النقطتين  $(3, 4, 0)$  و  $(3, 3, \sqrt{7})$

(ج) نفرض أن  $F(x, y, z) = z - xy$  عند النقطتين  $(1, 1, 1)$  و  $(4, \frac{1}{2}, 2)$

٤١ - (ص) (أ) نفرض أنه ، بالإضافة إلى فروض نظرية الدالة العكسية (٤١-٨) ،

من المعروف أن الدالة  $f$  مشتقات جزئية متصلة من رتبة  $m > 1$  . أثبت أن الدالة العكسية  $g: V \rightarrow \mathbb{R}^p$  لها مشتقات جزئية متصلة من رتبة  $m$  .

(ب) أثبت النتيجة المناظرة لنظرية الدالة الضمنية (٤١ - ٩) .

٤١ - (ق) نفرض أن  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  تنتمي إلى صنف  $C^1(\mathbb{R}^2)$  . وضح أن  $f$  ليست إدخالية ،

في الحقيقة ، تقييد الدالة  $f$  لفئة مفتوحة من  $\mathbb{R}^2$  ليست إدخالية .

٤١ - (ر) نفرض أن  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  تنتمي إلى صنف  $C^1(\mathbb{R})$  . وضح أنه إذا كانت  $c \in \mathbb{R}$  ، حينئذ تقييد الدالة  $g$  لآى جوار  $c$  ليس راسماً فوقياً إلى جوار  $g(c)$  .

٤١ - (ش) نفرض أن  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$  إدخالية ونفرض أن  $r > 0$  بحيث أن لكل  $x \in \mathbb{R}^p$   $r \|x\| \leq \|L(x)\|$  . وضح أنه إذا كانت  $L_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$  بحيث أن  $\|L_1 - L\|_{pq} < r$  ، فإن  $L_1$  إدخالية ( ومن ثم تكون الفتحة لرواسم إدخالية مفتوحة في  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$  ) .

٤١ - (ت) نفرض أن  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$  راسم فوق وأن  $m > 0$  هي كما في برهان (٤١ - ٦) . أثبت أنه إذا كانت  $L_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$  بحيث أن  $\|L_1 - L\|_{pq} < m/2$  ، فإن  $L_1$  راسم فوق . ( من ثم ، تكون فتحة الرواسم الفوقية مفتوحة في  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$  ) .

٤١ - (ث) نفرض أن  $g: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  تنتمي إلى صنف  $C^1(\mathbb{R}^p)$  وتحقق  $\|Dg(x)\|_{pp} \leq a < 1$  لكل  $x \in \mathbb{R}^p$  إذا كانت  $f(x) = x + g(x)$  عند  $x \in \mathbb{R}^p$  ، وضح أن الدالة  $f$  تحقق

$$\|f(x_1) - f(x_2) - (x_1 - x_2)\| \leq a \|x_1 - x_2\|$$

لجميع  $x_1, x_2$  في  $\mathbb{R}^p$  وأن  $f$  تناظر أحادى من  $\mathbb{R}^p$  إلى  $\mathbb{R}^p$  .

## مشروعات :

٤١ - (أ) ( يعطى هذا المشروع برهاناً أولياً ومباشراً لنظرية الدالة الضمنية ) نفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  مفتوحة ونفرض أن  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  تنتمي إلى صنف  $C^1(\Omega)$  . نفرض أن  $(a, b) \in \Omega$  وأن  $F(a, b) = 0$  وأن  $D_2 F(a, b) > 0$  .

(أ) أثبت أنه توجد خلية مغلقة  $Q = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$  بمركز  $(a, b)$  بحيث أن  $D_2 F(x, y) > 0$  لكل  $(x, y) \in Q$  وبحيث أن  $F(x, b_1) < 0$  و  $F(x, b_2) > 0$  لكل  $x \in [a_1, a_2]$  .

(ب) إذا كانت  $x \in [a_1, a_2]$  ، فإن الدالة  $F_x: [b_1, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$  المعرفة بأنها  $F_x(y) = F(x, y)$  عند  $y \in [b_1, b_2]$  تكون بحيث أن  $F_x(b_1) < 0 < F_x(b_2)$  و  $F'_x(y) > 0$  عند  $y \in [b_1, b_2]$  .

(ج) توجد دالة  $\varphi$  ترسم  $[a_1, a_2]$  إلى  $[b_1, b_2]$  بحيث أن  $F(x, \varphi(x)) = 0$  لجميع  $x \in [a_1, a_2]$  .

(د) إذا كانت  $x \in (a_1, a_2)$  وكانت  $|h|$  صغيرة بكفاية ، أثبت أنه توجد  $h_2$  عند  $0 < |h_1| < |h|$  بحيث أن

$$\begin{aligned} 0 &= F[x + h, \varphi(x + h)] - F[x, \varphi(x)] \\ &= D_1 F[x + h_1, \varphi(x + h_1)]h + D_2 F[x + h_1, \varphi(x + h_1)][\varphi(x + h) - \varphi(x)] \end{aligned}$$



(أ) أثبت أن  $\phi$  قابلة للتفاضل في  $(a_1, a_2)$  وأن

$$\phi'(x) = -D_1 F[x, \phi(x)] / D_2 F[x, \phi(x)]$$

(و) عدل الاستنتاج السابق لدالة  $F$  معرفة على فئة مفتوحة  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$

(ز) نفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^2$  مفتوحة ونفرض أن  $F, G: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  تنتمي إلى صنف

$C^1(\Omega)$  ونفرض أنه لنقطة ما  $(a, b) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^2$  نحصل على  $F(a, b) = 0$  ،  $G(a, b) = 0$

نفرض أن

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} D_{p+1}F(a, b) & D_{p+2}F(a, b) \\ D_{p+1}G(a, b) & D_{p+2}G(a, b) \end{bmatrix} \neq 0$$

حينئذ لا يتلشى على الأقل واحد من  $D_{p+1}F(a, b)$  و  $D_{p+2}F(a, b)$  نفرض أن  $D_{p+2}F(a, b) \neq 0$  ونستخدم (و) لنحصل على  $x_{p+2} = \phi(x_1, \dots, x_{p+1})$  في جوار  $(a, b_1) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^2$

ومن ثم  $F(x_1, \dots, x_{p+1}, \phi(x_1, \dots, x_{p+1})) = 0$  في هذا الجوار . نضع الآن

$$H(x_1, \dots, x_{p+1}) = G(x_1, \dots, x_{p+1}, \phi(x_1, \dots, x_{p+1}))$$

حسب قاعدة السلسلة يكون

$$D_{p+1}H = D_{p+1}G + (D_{p+2}G)(D_{p+1}\phi)$$

حيث حسبت هذه الدوال عند نقطة مناسبة . بما أن  $-(D_{p+1}F)/(D_{p+2}F)$  فلنستنتج أن  $D_{p+1}H = -\Delta/D_{p+2}F$  التي لا تعتمد عند  $(a, b_1)$  . حينئذ يمكننا استخدام (و) للحصول على  $x_{p+1} = \psi(x_1, \dots, x_p)$  في جوار  $a \in \mathbb{R}^p$  . ( هذا يثبت نظرية الدالة الضمنية في الحالة التي فيها  $q = 2$  نحصل على امتدادات للحالة التي فيها تكون  $q$  عامة بالاستنتاج ) .

٤١ - (ب) ( هذا المشروع يوازي المشروع ٤٠ -  $\alpha$  ويعطى برهاناً مباشراً بدرجة أكثر للجزء الأول لنظرية الدالة العكسية ٤١ - ٨ ثم للجزء المذكور في النص ) . نفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  مفتوحة ، وأن  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  تنتمي إلى صنف  $C^1(\Omega)$  وأنه عند بعض  $x_0 \in \Omega$  يكون الراسم الخطي  $Df(x_0)$  تناظراً أحادياً . نفرض أن  $\Gamma = Df(x_0)^{-1}$  .

(أ) أثبت أنه توجد  $r > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $\|x - x_0\| \leq r$  ، فإن  $\|I - \Gamma \circ Df(x)\|_{pp} \leq \frac{1}{2}$  .

(ب) نفرض أن  $s \leq \frac{1}{2}r \| \Gamma \|_{pp}^{-1}$  ونعرف عند ثبوت  $y$  حيث  $\|y - f(x_0)\| \leq s$  ،  $F_y(x) = f(x) - y$  عند  $\|x - x_0\| \leq r$  . حينئذ  $F_y$  قابلة للتفاضل  $\| \Gamma \circ F_y(x_0) \| \leq \frac{1}{2}r$  ،  $\|I - \Gamma \circ DF_y(x)\|_{pp} \leq \frac{1}{2}$  عند  $\|x - x_0\| \leq r$  .

(ج) إذا كانت  $\|y - f(x_0)\| \leq s$  ، نفرض أن  $G_y$  معرفة عند  $\|x - x_0\| \leq r$  بأنها  $G_y(x) = x_1 - \Gamma \circ F_y(x)$  . حينئذ  $G_y$  تقلص بمقدار ثابت  $\frac{1}{2}$  على سطح هذه الكرة .

(د) إذا كانت  $\|y - f(x_0)\| \leq s$  تعرف  $\phi(y) = x_0$  ،  $\phi_{n+1}(y) = G_y(\phi_n(y))$  عند

$n = 0, 1, 2, \dots$  . أثبت أن  $\|\varphi_{n+1}(y) - \varphi_n(y)\| \leq 2^{-n} r$  . وبما  
ينتج أن  $\|\varphi_{n+1}(y) - \varphi_m(y)\| \leq 2^{-m} r$  عند  $n \geq m \geq 0$  . بوجه خاص يكون  $\|\varphi_k(y) - x_0\| \leq r$   
أى أن هذا التكرار ممكن .

(د) وضع أن كلا من النوال  $(\varphi_k)$  متصلة عند  $\|y - f(x_0)\| \leq s$  وأن المتتابعة  $\varphi_k$   
تتقارب بانتظام إلى دالة متصلة  $\phi$  بحيث أن  $G_r(\varphi(y)) = \varphi(y)$  عند  $\|y - f(x_0)\| \leq s$  ومن ذلك  
ينتج أن  $f(\varphi(y)) = y$  عند  $\|y - f(x_0)\| \leq s$  . حينئذ تكون الدالة  $\phi$  هي الدالة العكسية  
للدالة  $f$  في الفئة  $\{y : \|y - f(x_0)\| \leq s\}$  وترسمها إلى الفئة  $\{x : \|x - x_0\| \leq r\}$

٤١ - (٧) (يوازى هذا المشروع مشروعى ٤٠ - ٤١ ، ٤١ - ٤٢) ويعطى برهاناً  
مباشراً لنظرية الدالة الضمنية . نفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  مفتوحة ونفرض أن  $(x_0, y_0) \in \Omega$   
نفرض أن  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$  تنتمي إلى صنف  $C^1(\Omega)$  ، وأن  $F(x_0, y_0) = 0$  ، وأن الراسم  
الخطى  $L_2: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$  المعروف بأنه

$$L_2(v) = DF(x_0, y_0)(0, v) \quad \text{for } v \in \mathbb{R}^q$$

هو تناظر أحادى من  $\mathbb{R}^q$  إلى  $\mathbb{R}^q$  فوقياً ، نفرض أن  $\Gamma = L_2^{-1}$  .

(أ) أثبت أنه يوجد  $r > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $\|x - x_0\|^2 + \|y - y_0\|^2 \leq r^2$  حينئذ

$$\|v - \Gamma \circ DF(x, y)(0, v)\| \leq \frac{1}{2} \|v\| \quad \text{for } v \in \mathbb{R}^q$$

(ب) نفرض أن  $0 < s \leq \frac{1}{2}r$  بحيث أنه إذا كانت  $\|x - x_0\| \leq s$  حينئذ

$$\|F(x, y_0)\| \leq \frac{1}{2}r \|\Gamma\|_{\infty}^{-1}$$

لكل  $x$  ثابتة عند  $\|x - x_0\| \leq s$  نعرف  $G_s(y) = y - \Gamma \circ F(x, y)$  عند  $\|y - y_0\| \leq \frac{1}{2}r$   
بقمى في  $\mathbb{R}^q$  . أثبت أنه لكل  $x$  عند  $\|x - x_0\| \leq s$  ، يكون

$$\|G_s(y_1) - G_s(y_2)\| \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|$$

لجميع  $y_1, y_2$  اللذين يحققان  $\|y_i - y_0\| \leq \frac{1}{2}r$  .

(ج) إذا كانت  $\|x - x_0\| \leq s$  ، عرف  $\psi_0(x) = y_0$  و  $\psi_{n+1}(x) = G_s(\psi_n(x))$  عند  
 $n = 0, 1, 2, \dots$  . وضع أن  $\|\psi_{n+1}(x) - \psi_m(x)\| \leq 2^{-m-1}r$  عند  $n \geq m \geq 0$  ومن ثم  
 $\|\psi_k(x) - y_0\| \leq \frac{1}{2}r$  ، أى أن هذا التكرار ممكن .

(د) أثبت أن كلا من النوال  $\psi_k$  متصلة عند  $\|x - x_0\| \leq s$  وأن المتتابعة  $(\psi_k)$  تقاربية  
منتظمة لدالة منتظمة  $\phi$  بحيث أن

$$F(x, \psi(x)) = 0 \quad \text{for all } \|x - x_0\| \leq s$$

(هـ) لتوضيح أن  $\phi$  قابلة للتفاضل عند  $\|x - x_0\| < s$  استعمل تمرين ٣٩ - ث  
واستخدم استنتاجاً مشابهاً للذى في (د) ، (هـ) في مشروع ٤١ - ٤٢ لكل مركبة  $F$  .

## الباب الثانى والأربعون — مسائل إضافية :

ناقشنا فى باب ٢٧ باختصار العملية المألوفة لتحديد نقط داخلية الى عندها ثنال دالة حقيقية القيمة لتغير واحد وقابلة للتفاضل نهايات عظمى أو صغرى نسبيا . لم يناقش دائما الاستفسار عن كون نقطة حرجية ( أى ، نقطة تتلاشى عندها المشتقة ) هى فعلا نقطة نهائية ، لكن يمكن غالبا دراسته باستخدام طريقة نظرية تايلور ٢٨ - ٦ . التحليل لنقط الرجوع ( النهايات ) التى تنتمى إلى حدى النطاق يؤدي غالبا إلى تطبيق لنظرية القيمة المتوسطة ٢٧ - ٦ .

فى حالة الدالة بنطاق فى  $R^p$  ( $p > 1$ ) ومدى فى  $R$  ، يعتبر الموقف غالبا أكثر تعقيدا ، وتحتاج كل دالة إلى دراسة قائمة بذاتها . لكن ، توجد نظريات عامة قليلة ومفيدة ستقدم هنا .

نفرض أن  $\Omega \subseteq R^p$  ونفرض أن  $f: \Omega \rightarrow R$  . يقال لنقطة  $c \in \Omega$  إنها نقطة نهاية صغرى نسبية للدالة  $f$  إذا كانت توجد  $\delta > 0$  بحيث أن  $f(c) \leq f(x)$  لكل  $x \in \Omega$  عند  $\|x - c\| < \delta$  يقال لنقطة  $c \in \Omega$  إنها نقطة نهاية صغرى دقيقة نسبية للدالة  $f$  إذا كان يوجد  $\delta > 0$  بحيث أن  $f(c) < f(x)$  لكل  $x \in \Omega$  عند  $\|x - c\| < \delta$  بالمثل نعرف نقطة نهاية عظمى (دقيقة) نسبية للدالة  $f$  . بالإضافة إلى ذلك ، إذا كانت  $c \in \Omega$  هى نقطة نهاية صغرى (دقيقة) نسبية أو نهاية عظمى (دقيقة) نسبية للدالة  $f$  ، نقول إن  $c$  هى نقطة نهائية (دقيقة) نسبية للدالة  $f$  ، أو إن  $f$  لها نهاية (دقيقة) نسبية عند النقطة  $c$  .

النتيجة الآتية مفيدة جدا فى حالات كثيرة .

٤٢ - ١ نظرية . نفرض أن  $\Omega \subseteq R^p$  ونفرض أن  $f: \Omega \rightarrow R$  إذا كانت نقطة داخلية  $c$  من  $\Omega$  هى نقطة نهاية نسبية للدالة  $f$  ، وإذا كانت المشتقة الجزئية  $D_{\alpha}f(c)$  للدالة  $f$  بالنسبة إلى متجه  $u \in R^p$  موجودة ، حينئذ  $D_{\alpha}f(c) = 0$  .

البرهان . من الفرض تقييد الدالة  $f$  إلى تقاطع  $\Omega$  مع الخط المستقيم  $\{c + tu : t \in R\}$  له نهاية نسبية عند  $c$  . لذلك ينتج من نظرية ٢٧ - ٤ أن  $D_{\alpha}f(c) = 0$  وهو المطلوب إثباته

٤٢ - ٢ نتيجة . نفرض أن  $\Omega \subseteq R^p$  ، ونفرض  $f: \Omega \rightarrow R$  . إذا كانت نقطة داخلية  $c$  من  $\Omega$  نقطة نهاية نسبية من الدالة  $f$  ، وإذا كانت المشتقة  $Df(c)$  موجودة ، فإن  $Df(c) = 0$

البرهان . ينتج من نتيجة ٢٩ - ٧ أن كلا من المشتقات الجزئية  $D_j f(c)$  ،  $j = 1, \dots, p$  موجودة وأنه إذا كانت  $u = (u_1, \dots, u_p) \in R^p$  ، فإن

$$Df(c)(u) = \sum_{j=1}^p u_j D_j f(c)$$

من النظرية السابقة يكون  $Df(c) = 0$  عند  $j = 1, \dots, p$  ، ومنها  $Df(c)(u) = 0$  لكل  $u \in \mathbb{R}^p$  وهو المطلوب اثباته .

ينتج أنه إذا كانت  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  ، وإذا كانت  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  لها نقطة نهاية نسبية عند  $c \in \Omega$  وإذا كانت  $Df(c)$  موجودة ، حينئذ

$$D_1 f(c) = 0, \dots, D_p f(c) = 0 \quad (42.1)$$

تسمى نقطة داخلية  $c$  التي عندها  $Df(c) = 0$  نقطة حرجية للدالة  $f$  . نستنتج أنه إذا كانت  $\Omega$  فئة مفتوحة في  $\mathbb{R}^p$  التي فيها تكون  $f$  قابلة للتفاضل ، حينئذ تحتوي فئة النقطة الحرجية للدالة  $f$  على كل نقطة النهاية النسبية للدالة  $f$  . من الطبيعي ربما تحتوي هذه الفئة للنقط الحرجية أيضاً نقطاً عندها لا يكون للدالة  $f$  نقط نهاية نسبية .

(وبالإضافة إلى ذلك ، ربما يكون للدالة  $f$  نقط نهاية نسبية عند نقط داخلية  $c$  من  $\Omega$  عندها لا تكون المشتقة  $Df(c)$  موجودة أو ربما يكون للدالة  $f$  نقطة نهاية نسبية عند نقطة  $c \in \Omega$  والتي ليست نقطة داخلية للفئة  $\Omega$  في أى حالة ، سوف لا تكون النقطة  $c$  نقطة حرجية للدالة  $f$  ) .

٢٤ - ٣ أمثلة . (أ) نفرض أن  $f_1(x) = x^3$  عند  $x \in [-1, 1]$  . حينئذ  $Df_1(0) = 0$  ، لكن ،  $f_1$  ليس لها نقطة نهاية عند  $x = 0$  . ومن زاوية أخرى ، الدالة  $f_1$  لها نقطة نهاية دقيقة عند النقطتين  $\pm 1$  . (التي ليستا نقطتين داخليتين من النطاق وليستا نقطتين حرجيتين) .

(ب) نفرض أن  $f_2(x) = |x|$  عند  $x \in [-1, 1]$  . حينئذ  $Df_2(0)$  غير موجودة ، لكن ،  $f_2$  لها نهاية صغرى دقيقة نسبية عند النقطة الداخلية  $0$  . ومن زاوية أخرى ،  $f_2$  لها نقطة نهاية نسبية عند النقطتين  $\pm 1$  .

(ج) نفرض أن  $f_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  معرفة بأنها  $f_3(x, y) = xy$  . حينئذ  $Df_3(0, 0) = 0$  أى أن نقطة الأصل  $(0, 0)$  نقطة حرجية للدالة  $f_3$  ، لكن ، ليست نقطة نهاية للدالة  $f_3$  لأن :

$$f_3(0, 0) < f_3(x, y) \text{ for } xy > 0$$

$$f_3(0, 0) > f_3(x, y) \text{ for } xy < 0$$

نقول أن نقطة الأصل  $(0, 0)$  هي نقطة ركوب (نقطة بردعة) للدالة  $f_3$  بمعنى أن كل جوار  $(0, 0)$  يحتوى نقطاً عندها  $f_3$  أكبر بدقة من  $f_3(0, 0)$  وأيضاً يحتوى نقطاً عندها  $f_3$  أقل بدقة من  $f_3(0, 0)$  .

(د) نفرض أن  $f_4: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  معرفة بأنها  $f_4(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$  . أثبت أن  $Df_4(0, 0) = 0$  وأن تقييد  $f_4$  إلى كل خط مار بالنقطة  $(0, 0)$  له نهاية صغرى نسبية عند نقط الأصل . لكن ، أثبت أنه في كل جوار  $(0, 0)$  توجد نقط عندها  $f_4$  موجبة بدقة ونقط أيضاً عندها  $f_4$  سالبة بدقة .

## اختبار المشتقة الثانية :

نظراً إلى الأمثلة السابقة ، يكون من المناسب وجود شروط تكون ضرورية (أو كافية) لضمان أن نقطة حرجية هي نقطة نهاية أو أنها نقطة ركوب (بردة) . نعطى النتائج الآتية شروطاً بدلالة المشتقة الثانية للدالة  $f$  التى قدمناها عند نهاية باب ٤٠ .

٤٧ - ٤٨ نظرية . نفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  مفتوحة ونفرض أن  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  لها مشتقات جزئية ثانية متصلة في  $\Omega$  . إذا كانت  $c \in \Omega$  هي نقطة نهاية صغرى نسبية (على الترتيب ، نهاية عظمى) للدالة  $f$  ، حينئذ

$$(42.2) \quad D^2f(c)(w)^2 = \sum_{i,j=1}^p D_{ij}f(c)w_iw_j \geq 0$$

[ على الترتيب ،  $D^2f(c)(w)^2 \leq 0$  ] لكل  $w \in \mathbb{R}^p$  .

البرهان . نفرض أن  $w \in \mathbb{R}^p, \|w\| = 1$  . إذا كانت  $c$  هي نقطة نهاية صغرى نسبية ، فتوجد  $\delta > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $|t| < \delta$  حينئذ  $f(c+tw) - f(c) \geq 0$  . بما أن  $\Omega$  مفتوحة ، فيوجد  $\delta_1 > 0$  عند  $\delta_1 \leq \delta$  بحيث أن  $c+tw$  تنتمي إلى  $\Omega$  عند  $0 \leq t \leq \delta_1$  من نظرية تايلور ٤٠ - ٩ توجد  $t_1$  حيث  $0 \leq t_1 \leq t \leq \delta_1$  بحيث أنه إذا كانت  $c_t = c + t_1w$  ، فإن

$$f(c+tw) = f(c) + Df(c)(tw) + \frac{1}{2}D^2f(c_t)(tw)^2$$

بما أن  $c$  هي نقطة نهاية صغرى نسبية وينتج من نتيجة ٤٧ - ٢ أن  $Df(c) = 0$  ؛ حينئذ نجد أن

$$\frac{1}{2}D^2f(c_t)(tw)^2 \geq 0$$

عند  $0 \leq t \leq \delta_1$  . ينتج أن  $D^2f(c_t)(w)^2 \geq 0$  . بما أن  $|t| \leq |t_1| \leq \delta_1$  ، فإن  $\|c_t - c\| = |t_1| \leq \delta_1$  . بما أن المشتقات الجزئية الثانية للدالة  $f$  متصلة ، إذن فينتج أن  $c_t \rightarrow c$  عند  $t \rightarrow 0$  . بما أن المشتقات الجزئية الثانية للدالة  $f$  متصلة ، إذن  $D^2f(c)(w)^2 \geq 0$  لكل  $w \in \mathbb{R}^p$  حيث  $\|w\| = 1$  ، التى منها تنتج النتيجة . وهو المطلوب لإثباته

النتيجة الآتية هي نتيجة عكسية جزئياً لنظرية ٤٧ - ٤٨ . لكن ، لاحظ أن فرضها أقوى قليلاً من الاستنتاج ٤٧ - ٤٨ .

٤٧ - ٥٠ نظرية . نفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  مفتوحة ، ونفرض أن  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  لها مشتقات جزئية ثانية متصلة في  $\Omega$  ، ونفرض أن  $c \in \Omega$  هي نقطة حرجية للدالة  $f$  .

(أ) إذا كانت  $D^2f(c)(w)^2 > 0$  لكل  $w \neq 0$  و  $w \in \mathbb{R}^p$  ، حينئذ  $f$  لها نهاية صغرى دقيقة نسبية عند  $c$  .

(ب) إذا كانت  $D^2 f(c)(w)^2 < 0$  لكل  $w \in \mathbb{R}^p$ ,  $w \neq 0$  ، حينئذ  $f$  لها نهاية عظمى دقيقة نسبية عند  $c$  .

(ج) إذا كانت  $D^2 f(c)(w)^2$  تأخذ كلا من قيم موجبة دقيقة وقيم سالبة دقيقة عند  $w \in \mathbb{R}^p$  ، حينئذ  $f$  لها نقطة ركوب (بردة) عند  $c$  .

البرهان . (أ) من الفرض نجسد أن  $D^2 f(c)(w)^2 > 0$  عند  $w$  في الفئة المدججة  $\{w \in \mathbb{R}^p : \|w\| = 1\}$  . بما أن الراسم  $w \rightarrow D^2 f(c)(w)^2$  متصل فتوجد  $m > 0$  بحيث أن

$$D^2 f(c)(w)^2 \geq m \text{ for } \|w\| = 1$$

بما أن المشتقات الجزئية الثانية للدالة  $f$  متصلة في  $\Omega$  ، فتوجد  $\delta > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $\|x - c\| < \delta$  فإن

$$D^2 f(x)(w)^2 \geq \frac{1}{2} m \text{ for } \|w\| = 1$$

حسب نظرية تايلور ٤٠ - ٩ ، إذا كانت  $0 \leq t \leq 1$  فإنه توجد نقطة  $c_t$  في قطعة الخط الواصل بين  $c$  و  $c + tw$  بحيث أن

$$f(c + tw) = f(c) + Df(c)(tw) + \frac{1}{2} D^2 f(c_t)(tw)^2$$

بما أن  $c$  نقطة حرجة فينتج أنه إذا كانت  $0 < t < \delta$  و  $\|w\| = 1$  ، فإن

$$f(c + tw) - f(c) = \frac{1}{2} t^2 D^2 f(c_t)(w)^2 \geq \frac{1}{4} m t^2 > 0$$

أي أن  $f(c + u) > f(c)$  عند  $\|u - c\| < \delta$  ، وإذن  $f$  لها نهاية صغرى دقيقة نسبية عند  $c$  . أي أننا قد برهنا الجزء (أ) وبرهان الجزء (ب) يكون بالمثل .

(ج) نفرض أن  $w_+$ ,  $w_-$  متجهى وحدة في  $\mathbb{R}^p$  بحيث أن

$$D^2 f(c)(w_+)^2 > 0, \quad D^2 f(c)(w_-)^2 < 0$$

إذن ينتج من نظرية تايلور أنه عندما تكون  $t > 0$  صغيرة بكفاية نجد أن

$$f(c + tw_+) > f(c), \quad f(c + tw_-) < f(c)$$

أي أن  $c$  نقطة ركوب (بردة) للدالة  $f$  . وهو المطلوب إثباته

تقودنا مقارنة نظريتي ٤٢ - ٤ ، ٤٢ - ٥ ، إلى أجزاء التخمينات الآتية :

(i) إذا كانت  $c \in \Omega$  نقطة نهاية صغرى دقيقة نسبية ، حينئذ  $D^2 f(c)(w)^2 > 0$  لكل  $w \in \mathbb{R}^p$ ,  $w \neq 0$

(ii) إذا كانت  $c \in \Omega$  نقطة ركوب للدالة  $f$  ، حينئذ  $D^2 f(c)(w)^2$  تأخذ كلا من قيم موجبة دقيقة وقيم سالبة دقيقة ،

(iii) إذا كانت  $D^2 f(c)(w)^2 \geq 0$  لكل  $w \in \mathbb{R}^p$  فإن  $c$  نقطة نهاية صغرى نسبية . جميع هذه التخمينات باطلة ، ويمكن ملاحظة ذلك بأشلة .

لإكمال نظرية ٤٢ - ه نجد من الضروري معرفة ما إذا كان للدالة  $D^2 f(c)(w)^2 \rightarrow$  علامة واحدة . يمكن استخدام نتيجة هامة ومعروفة جدا في الجبر ( أنظر كتاب هوفمان وكونتس المدون في المراجع ) . لتحديد هذا . لكل  $j = 1, 2, \dots, p$  ، نفرض أن  $\Delta_j$  هي المحدد للمصفوفة ( المتأثلة ) .

$$\begin{bmatrix} D_{12}f(c) & \dots & D_{1p}f(c) \\ \vdots & & \vdots \\ D_{j1}f(c) & \dots & D_{jj}f(c) \end{bmatrix}$$

إذا كانت الأعداد  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_p$  كلها موجبة بدقة ، حينئذ  $D^2 f(c)(w)^2 > 0$  لكل  $w \neq 0$  وأن  $f$  لها نهاية صغرى بدقة نسبية عند  $c$  . إذا كانت الأعداد  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_p$  على التعاقب سالبة وموجبة بدقة ، فإن  $D^2 f(c)(w)^2 < 0$  لكل  $w \neq 0$  وأن  $f$  لها نهاية عظمى نسبية دقيقة عند  $c$  . في الحالات الأخرى يمكن وجود نقط نهاية ونقط ركوب .

تكون صيغة أقل تعقيدا في الحالة الخاصة الهامة التي فيها  $p = 2$  أكثر ملاءمة وجزء أكبر من المعلومات يمكن اشتقاقه نحتاج هنا لدراسة دالة الدرجة الثانية .

$$Q = Au^2 + 2Buv + Cv^2$$

إذا كانت  $\Delta = AC - B^2 > 0$  ، حينئذ  $A \neq 0$  ( وأن  $C \neq 0$  ) ويمكن تكللة المربع ونكتب

$$Q = \frac{1}{A} [(Au + Bv)^2 + (AC - B^2)v^2]$$

وإذن علامة  $Q$  هي نفسها علامة  $A$  ( أو  $C$  ) . ومن ناحية أخرى ، إذا كانت  $\Delta < 0$  ، فإن  $Q$  تأخذ كلا من قيم موجبة بدقة وقيم سالبة بدقة . يتضح هذا من المعادلة السابقة إذا كانت  $A \neq 0$  والتي أثبتناها حالا عندما  $A = 0$  .

نجمع هذه الملاحظات في نص أساسي .

٤٢ - ٦ نتيجة . نفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  مفتوحة ، ونفرض أن  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  لها مشتقات جزئية ثابتة في  $\Omega$  ، نفرض أن  $c \in \Omega$  نقطة حرجة للدالة  $f$  ، ونفرض أن

$$(42.3) \quad \Delta = D_{11}f(c)D_{22}f(c) - [D_{12}f(c)]^2$$

( أ ) إذا كانت  $\Delta > 0$  وإذا كانت  $D_{11}f(c) > 0$  فإن للدالة  $f$  نهاية صغرى دقيقة نسبية عند النقطة  $c$  .

(ب) إذا كانت  $\Delta > 0$  وإذا كانت  $D_{11} f(c) < 0$  فإن للدالة  $f$  نهاية عظمى دقيقة نسبية عند النقطة  $c$ .

(ج) إذا كانت  $\Delta < 0$  ، فإن للدالة  $f$  نقطة ركوب عند النقطة  $c$ .

بعض المعلومات الخاصة بالحالة التي فيها  $\Delta = 0$  ستعطى في التمارين.

### مسائل نهائية بقيود :

قد ناقشنا لكن الحالة التي فيها تنتمي نهاية الدالة  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  داخل نطاقها  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$ . لم نستخدم إحدى ملاحظتنا لتحديد نقط النهاية عند الطرفين. لكن ، إذا كانت الدالة معرفة عند طرفي  $\Omega$  وإذا كان هذان الطرفان  $\Omega$  يمكن تمثيلهما بارامتريا بدالة  $\varphi$  ، حينئذ تستنتج مسألة نقط النهاية بفحص نقطة النهايات للتركيب  $f \circ \varphi$ .

توجد مسألة متعلقة تقود إلى طريقة لطيفة ومشوقة نفرض أن  $S$  هو « سطح » محتوي في النطاق  $\Omega$  لدالة حقيقية القيمة  $f$ . يكون المطلوب غالبا هو إيجاد قيم الدالة  $f$  التي تكون نهاية عظمى أو صغرى من بين جميع القيم التي تتألف على  $S$ . مثال ذلك ، إذا كانت  $\Omega = \mathbb{R}^p$  وكانت  $\|x\| = f(x)$  ، فإن المسألة التي وضعناها تكون مختصة بإيجاد النقط على السطح  $S$  التي تكون أقرب ما يمكن ، أو أبعد ما يمكن ، من نقطة الأصل. إذا كان السطح  $S$  معطى بصورة بارامترية ، فإنه يمكننا معاملة هذه المسألة باعتبار تركيب الدالة  $f$  بالتمثيل البارامترى للسطح  $S$ . لكن ، ليس من المناسب غالبا التمييز عن  $S$  بهذه الطريقة. ونرغب بدرجة أكثر في طريقة أخرى.

نفرض أن  $S$  يمكن إعطاؤها كنقط  $x$  في  $\Omega$  بحيث تحقق علاقة على الصورة

$$g(x) = 0$$

لدالة  $g$  معرفة في  $\Omega$  إلى  $\mathbb{R}$ . سنحاول إيجاد قيم النهاية النسبية للدالة  $f$  لهذه النقط  $x$  في  $\Omega$  التي تحقق القيد (أو الشرط الجانبي)  $g(x) = 0$ . إذا فرضنا أن  $g$  و  $f$  موجودين في صنف  $C^1(\Omega)$  وأن  $Dg(c) \neq 0$  ، فإن شرطا ضروريا لأن  $c$  نقطة نهاية للدالة  $f$  بالنسبة إلى النقط  $x$  التي تحقق  $g(x) = 0$  ، هو أن المشتقة  $Dg(c)$  تكون مضاعفا للمشتقة  $Df(c)$  وباستعمال المشتقات الجزئية ، يكون هذا الشرط هو وجود عدد حقيقى  $\lambda$  بحيث أن

$$\begin{aligned} D_1 f(c) &= \lambda D_1 g(c) \\ &\dots \dots \dots \\ D_p f(c) &= \lambda D_p g(c) \end{aligned} \quad (42.4)$$



وعملنا نرغب في تحديد الإحداثيات  $p$  للنقطة  $c$  التي تحقق هذا الشرط الضروري لكن ، العدد الحقيقى  $\lambda$  ، الذى يسمى عادة بمضروب لاجرانج ، ليس معروفا كذلك . تحمل المادلات  $p$  المعطاة في أعلى ، سويا مع المعادلة .

$$g(c) = 0$$

حينئذ للكميات المجهولة  $p + 1$  ، ومنها تكون إحداثيات النقطة  $c$  ذات فائدة .

٤٢ - نظرية لاجرانج . نفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  مفتوحة ونفرض أن  $g$  و  $f$  دوال لقيم موجبة في صنف  $C^1(\Omega)$  . نفرض أن  $c \in \Omega$  بحيث أن  $g(c) = 0$  وأنه يوجد جوار  $U$  من  $C$  بحيث أن

$$f(x) \leq f(c) \quad \text{أو} \quad f(x) \geq f(c)$$

لكل نقط  $x \in U$  التى تحقق  $g(x) = 0$  . حينئذ يوجد عدنان حقيقيان  $\lambda$  و  $\mu$  وأن كلا منهما لا يساوى صفرا ، بحيث أن

$$\mu Df(c) = \lambda Dg(c) \quad (42.5)$$

وبالإضافة إلى ذلك ، إذا كانت  $Dg(c) \neq 0$  ، فيمكننا أخذ  $\mu = 1$  .

البرهان . نفرض أن  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  معرفة بأنها

$$F(x) = (f(x), g(x)) \quad \text{for} \quad x \in U$$

وإذن  $F$  تنتمى إلى صنف  $C^1(U)$  وأن

$$DF(x)(v) = (Df(x)(v), Dg(x)(v)), \quad x \in U, v \in \mathbb{R}^p$$

وبالإضافة إلى ذلك ، تحقق نقطة  $x \in U$  القيد  $g(x) = 0$  إذا وإذا فقط كانت  $F(x) = (f(x), 0)$  .

إذا كانت  $f(x) \leq f(c)$  لكل  $x \in U$  التى تحقق  $g(x) = 0$  ، حينئذ تكون النقط  $(r, 0)$  حيث  $r < f(c)$  ليست فى الصورة  $F(U)$  ، ومن ثم  $DF(c)$  ليست تناظرا أحاديا للفراغ  $\mathbb{R}^p$  إلى  $\mathbb{R}^2$  فوقيا . لكن بما أن المدى للرسم الخطى  $DF(c)$  هو فراغ جزئى من  $\mathbb{R}^2$  ولا ينطبق على  $\mathbb{R}^2$  ، فإن مدى  $DF(c)$  يكون محتويا فى خط ما فى  $\mathbb{R}^2$  يمر بالنقطة  $(0, 0)$  . لذلك ، توجد نقطة  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$  بحيث أن مدى  $DF(c)$  يكون محتويا فى الخط المار بالنقطتين  $(0, 0)$  ،  $(\lambda, \mu)$  . وإذن نحصل على

$$\mu Df(c)(v) = \lambda Dg(c)(v) \quad \text{for all} \quad v \in \mathbb{R}^p, v \in \mathbb{R}^p \quad (42.6)$$

ومن ثم تنتج معادلة (٤٢ - ٥) .

أخيرا ، نفرض أن  $Dg(c) \neq 0$  . إذا كانت  $\mu = 0$  ، حينئذ المعادلة (٤٢ - ٥)

لمعادلات  $p$  :

• • • • •

$$u D_x f(c) = \lambda D_x g(c)$$

• (1 - 12)

الحقيقة نقت نهاية ممكن تأسيسه على اعتبارات هندسية أو فيزيائية .

الدالة التي تعطي مربع المسافة إلى نقطة الأصل في نهاية صفري .

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

**تحت القيد :**

$$g(x, y, z) = 2x + 3y - z - 5 = 0$$

بما أن  $Dg(c) \neq 0$  لكل  $U \subseteq \mathbb{R}^p$  ، فإن نظرية لاجرانج تقودنا على المجموعة

$$2x = 2\lambda,$$

$$2y = 3\lambda,$$

$$2z = -\lambda,$$

$$2x + 3y - 2 - 5 = 0$$

حینڈ ، عند حذف  $x, y, z$  ، نحصل علی

$$2\lambda + 3\left(\frac{3}{2}\lambda\right) - \left(-\frac{1}{2}\lambda\right) - 5 = 0$$

تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة  $(0, 0, 0)$  .

(ب) أوجد أبعاد صندوق على شكل متوازي مستطيلات ، مفتوح من أعلى الذي حجمه أكبر ما يمكن إذا كانت مساحة سطحه هي  $A$  . نفرض أن  $x, y, z$  هي أبعاد الصندوق ، حيث  $z$  الارتفاع .

إذن نرغب في جعل الدالة

$$V(x, y, z) = xyz$$

في نهاية عظمى تحت شرط القيد

$$g(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz - A = 0$$

بما أن النقطة المطلوبة إحداثيات موجبة بدقة ، فقودنا نظرية لاجرانج إلى المجموعة

$$yz = \lambda(y + 2z),$$

$$xz = \lambda(x + 2z),$$

$$xy = \lambda(2x + 2y),$$

$$xy + 2xz - yz - A = 0$$

إذا ضربنا المعادلات الثلاث الأولى في  $y, z, x$  على الترتيب ، ثم ساوينا وقسمنا على  $\lambda$  (لماذا تكون  $\lambda \neq 0$  ؟) ، نصل إلى

$$xy + 2xz = xy + 2yz = 2xz + 2yz$$

تدل المتساوية الأولى على أن  $x = y$  ، وتعطى الثانية  $y = 2z$  . حينئذ تكون نسبة الاضلاع  $2 : 2 : 1$  وينتج من المعادلة الأخيرة أن  $4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = A$  تعطى  $z = \frac{1}{3} (A/3)^{1/2}$  . لذلك يكون حجم هذا الصندوق هو  $\frac{1}{3} (A/3)^{3/2}$  .

يوجد غالباً أكثر من قيد واحد ، في هذه الحالة نجد أن النتيجة الآتية مفيدة .

٤٧ - ٩ نظرية . نفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  مفتوحة ونفرض أن  $g_1, \dots, g_k$  و  $f$  هي دوال حقيقية القيمة في  $C^1(\Omega)$  . نفرض أن  $c \in \Omega$  تحقق القيود

$$g_1(x) = 0, \dots, g_k(x) = 0$$

وأنه يوجد جوار مفتوح  $U$  بحيث أن  $f(x) \leq f(c)$  أو  $f(x) \geq f(c)$  لجميع  $x \in U$  التي تحقق هذه القيود . حينئذ توجد أعداد حقيقية  $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu$  ليست كلها أصفارا بحيث أن

$$(42.7) \quad \mu Df(c) = \lambda_1 Dg_1(c) + \dots + \lambda_k Dg_k(c)$$

البرهان . نفرض  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$  معرفة بأنها

$$F(x) = (f(x), g_1(x), \dots, g_k(x)) \text{ for } x \in U$$

وبرهن كما في برهان نظرية (٤٢ - ٧). وهو المطلوب إثباته

٤٢ - ١٠ نتيجة . بالاضافة إلى فرض نظرية (٤٢ - ٩) ، نفرض أن الرتبة للمصفوفة

$$(42.8) \quad \begin{bmatrix} D_1 g_1(c) & \cdots & D_1 g_k(c) \\ \vdots & & \vdots \\ D_p g_1(c) & \cdots & D_p g_k(c) \end{bmatrix}$$

تساوى  $k (\leq p)$  . حينئذ توجد أعداد حقيقية  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  ليست جميعاً أصفاراً بحيث أن

$$(42.9) \quad \begin{aligned} D_1 f(c) &= \lambda_1 D_1 g_1(c) + \cdots + \lambda_k D_1 g_k(c) \\ &\vdots \\ D_p f(c) &= \lambda_1 D_p g_1(c) + \cdots + \lambda_k D_p g_k(c) \end{aligned}$$

البرهان . إذا طبقنا القانون (٤٢ - ٩) على  $e_1, \dots, e_p \in \mathbb{R}^p$  ، نحصل على مجموعة من معادلات طرفها الأيمن هو الطرف الأيسر (٤٢ - ٩) وطرفها الأيسر هو الطرف الأيسر في (٤٢ - ٩) مضروباً بالمقدار  $\mu$  . إذاً  $\mu = 0$  ، فإن الفرض بأن الرتبة مساوية  $k$  تدل على أن  $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$  ، مما يخالف الفرض . ومن ثم  $\mu \neq 0$  ويمكننا أن نجعل هذه المجموعة طبيعية للمحصل على (٤٢ - ٩) وهو المطلوب إثباته

٤٢ - ١١ مثال . أوجد النقط الموجودة في تقاطع الاسطوانة  $\{(x, y, z): x^2 + y^2 = 4\}$  والمستوى  $\{(x, y, z): 6x + 3y + 2z = 6\}$  التي تكون أقرب ما يمكن إلى نقطة الأصل . والتي تكون أبعد ما يمكن من نقطة الأصل .

سنبحث النقط النهائية النسبية للدالة

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

تحت القيود

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4 = 0,$$

$$g_2(x, y, z) = 6x + 3y + 2z - 6 = 0$$

المصفوفة المناظرة إلى (٤٢ - ٨) في هذه الحالة هي

$$\begin{bmatrix} 2x & 6 \\ 2y & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

ذات رتبة 2 ماعداً عند النقطه  $(x, y) = (0, 0)$  التي لا تحقق القيود . حينئذ يمكننا استخدام النتيجة للمحصل على المجموعة

$$2x - \lambda_1(2x) + \lambda_2(6),$$

$$2y - \lambda_1(2y) + \lambda_2(3),$$

$$2z = \lambda_2(2),$$

$$x^2 + y^2 = 4,$$

$$6x + 3y + 2z = 6$$

نحس معادلات في خمس متغيرات المعادلة الثالثة تعطى  $\lambda_2 = z$  ، لذلك يمكننا حذف  $\lambda_2$  من المعادلتين الأوليين . لحذف  $\lambda_1$  ، نضرب المعادلة الأولى الناتجة في  $y$  والثانية في  $x$  ونطرح ، لنحصل على

$$0 = 6yz - 3xz = 3z(2y - x)$$

ينتج أنه إما  $z = 0$  أو  $x = 2y$  .

إذا كانت  $z = 0$  ، فإن المعادلة الخامسة تعطى  $2x + y = 2$  . وعند ربطها بالمعادلة الرابعة نحصل على

$$x^2 + (2 - 2x)^2 = x^2 + 4 - 8x + 4x^2 = 4$$

وإذن  $0 = x(5x - 8) = 5x^2 - 8x$  ومن ثم  $x = 0$  أو  $x = 8/5$  . نقودنا هذه الحالة إلى النقطتين  $(0, 2, 0)$  و  $(8/5, -6/5, 0)$  التي تكون كل منهما لها على مسافة 2 من نقطة الأصل .

ومن زاوية أخرى ، إذا كانت  $x = 2y$  ، فإن المعادلة الرابعة تعطى  $5y^2 = 4$  أى أن  $y = 2/\sqrt{5}$  (فإن  $x = 4/\sqrt{5}$ ) أو  $y = -2/\sqrt{5}$  (وأن  $x = -4/\sqrt{5}$ ) . بالتعويض في المعادلة الخامسة نحصل على  $z = 3(1 + \sqrt{5})$  و  $z = 3(1 - \sqrt{5})$  ، على الترتيب . لذلك ، نقودنا هذه الحالة إلى النقطتين  $(-4/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}, 3(1 + \sqrt{5}))$  و  $(4/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 3(1 - \sqrt{5}))$  ويلاحظ أن مربع المسافتين بين كل من هاتين النقطتين ونقطة الأصل هما  $58 - 18\sqrt{5}$  و  $58 + 18\sqrt{5}$  ، على الترتيب .

نستنتج أن كلتا النقطتين  $(8/5, -6/5, 0)$  و  $(0, 2, 0)$  تجملان المسافة من نقطة الأصل وهذا التقاطع هي نهاية صفري ، وأن النقطة  $(-4/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}, 3(1 + \sqrt{5}))$  تجمل هذه المسافة في نهاية عظمى . من اعتبارات هندسية نلاحظ أيضاً أن النقطة  $(4/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 3(1 - \sqrt{5}))$  تعطى نهاية عظمى نسبية بين نقط هذا التقاطع . (ينبغي على القارئ أن يرسم شكلاً ليساعده لرؤية هذا الموقف) .

### قيود متباينة :

في السنوات الحديثة ، ازدادت مسائل التخطئة النهائية التي تحتوي قيوداً هي متباينات أكثر من متساويات أهمية . أى ربما نرغب في إيجاد نقط نهائية نسبية لدالة  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  كل نقط  $\Omega \subset \mathbb{R}^p$  التي تحقق القيود

$$h_1(x) \geq 0, \dots, h_k(x) \geq 0$$

سنرى أن مثل هذه المسائل يمكن أيضاً معاملتها بطريقة لاجرانج .

ربما تحتوى مسألة نقطة نهائية أحيانا كلا من متساويات ومتباينات ، لكن بما أن المتساوية  $g(x) = 0$  تكافئ المتباينة  $-(g(x))^2 \geq 0$  ، فإن مثل هذه المسائل يمكن دائماً اختزالها إلى مسألة تحتوى فقط على قيود متباينة .

٤٢ - ١٢ نظرية . نفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  مفتوحة ونفرض أن الدالة  $f$  والدوال  $h_1, \dots, h_k$  دوال حقيقية القيمة في  $C^1(\Omega)$  . نفرض أن  $c \in \Omega$  تحقق القيود المتباينة .

$$h_1(x) \geq 0, \dots, h_k(x) \geq 0$$

ونفرض أنه يوجد جوار مفتوح  $U$  من  $c$  بحيث أن  $f(x) \leq f(c)$  [أو  $f(x) \geq f(c)$ ] لجميع  $x \in U$  التي تحقق هذه القيود . حينئذ توجد أعداد حقيقية  $\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_k$  ليست كلها أصفاراً بحيث أن

$$(42.10) \quad \mu Df(c) = \lambda_1 Dh_1(c) + \dots + \lambda_k Dh_k(c)$$

وأبعد من ذلك ، إذا كانت  $h_i(c) > 0$  لبعض  $i$  ، فإن  $\lambda_i = 0$  .

البرهان . نفرض أن  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$  معرفة بأنها

$$F(x) = (f(x), h_1(x), \dots, h_k(x)) \quad \text{for } x \in U$$

إذا كانت  $c$  نقطة في  $U$  حيث تحقق القيود وحيث تكون  $f$  إما في نهاية عظمى أو في نهاية صغرى ، حينئذ لا يمكن أن تكون  $DF(c)$  رأساً فوقياً ولذلك نجد أن تظل (٤٢ - ١٠) صحيحة .

إذا كانت  $h_1(c) = 0, \dots, h_r(c) = 0$  لكن  $h_{r+1}(c) > 0, \dots, h_k(c) > 0$  حينئذ نفرض أن  $U_1 \subseteq U$  هو جوار مفتوح للنقطة  $c$  الذي فيه تكون  $h_{r+1}, \dots, h_k$  موجبة بدقة واستخدم النظرية للقيود  $h_1(x) \geq 0, \dots, h_r(x) \geq 0$  .

وهو المطلوب إثباته

٤٢ - ١٣ نتيجة . بالإضافة إلى فروض نظرية ٤٢ - ١٢ ، نفرض أن رتبة المصفوفة المناظرة إلى  $h_i(c) = 0$  مساوية إلى  $r$  . حينئذ يمكننا أخذ  $\mu = 1$  في

$$(42.11) \quad \begin{bmatrix} D_1 h_1(c) & \dots & D_1 h_r(c) \\ \vdots & & \vdots \\ D_r h_1(c) & \dots & D_r h_r(c) \end{bmatrix}$$

(٤٢ - ١٠) وبالإضافة إلى ذلك ، إذا كانت  $f(x) \leq f(c)$  على الترتيب ،  $[f(x) \geq f(c)]$  لكل  $x \in U$  التي تحقق القيود وإذا أخذنا  $\mu = 1$  في (٤٢ - ١٠) فإن  $\lambda_i \leq 0$  على الترتيب ،  $[\lambda_i \geq 0]$  عند  $i = 1, \dots, r$ .

البرهان . البرهان الذي يمكننا أخذ  $\mu = 1$  في (٤٢ - ١٠) مائل للبرهان في نتيجة ٤٢ - ١٠ . نفرض ، إذن ، أن  $\mu = 1$  وأن  $f(x) \leq f(c)$  لكل  $x \in U$  التي تحقق القيود . بما أن الرتبة للمصفوفة (٤٢ - ١١) هي  $r \leq k$  ، حيث إذا كانت  $1 \leq j \leq r$  فإنه يوجد متجه  $v_j \in \mathbb{R}^p$  بحيث أن

$$Dh_i(c)(v_j) = \delta_{ij}$$

وإذن ، إذا كانت  $t > 0$  صغيرة بكفاية ، فإنه توجد نقطة  $c_t$  على قطعة الخط المستقيم الواصلة بين  $c$  و  $c + tv_j$  بحيث أن

$$0 \geq f(c + tv_j) - f(c) = Df(c_t)(tv_j) = t Df(c_t)(v_j)$$

ونتيجة لذلك نحصل على

$$0 \geq \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{f(c + tv_j) - f(c)}{t} = Df(c)(v_j) = \sum_{i=1}^r \lambda_i Dh_i(c)(v_j) = \lambda_j$$

وإذن  $\lambda_j \leq 0$  عند  $j = 1, \dots, r$  . وهو المطلوب إثباته

للمصول على برهان أولى ، لكن مختلف جدا لنظرية لاجرانج التي تحتوى قيودا متباينة ، أنظر مقالة أ. ج. ماك شان(\*) المدونة في المراجع

## تمارين :

٤٢ - (أ) أوجد النقاط الحرجة للدوال الآتية وحدد الطبيعة لهذه النقاط

$$f(x, y) = x^2 + 4xy \quad (أ)$$

$$f(x, y) = x^4 + 2y^4 + 32x - y + 17. \quad (ب)$$

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 12y^2 - 36y \quad (ج)$$

$$f(x, y) = x^4 - 4xy \quad (د)$$

$$f(x, y) = x^2 + 4xy + 2y^2 - 2y. \quad (هـ)$$

$$f(x, y) = x^2 + 3y^4 - 4y^3 - 12y^2 \quad (و)$$

(\*) أ. ج. ماك شان (١٩٠٤ - ) حصل على درجة الدكتوراه من شيكاغو . وارتبط لمدة طويلة بجامعة ميرجينا وبمعروف عالميا بمساهماته في نظرية التكامل وتفاضل وتكامل المنحنيات ، نظرية التحكم الأمثل والقنفيات والطروم والدقشومات الخارجية .

٤٢ - (ب) نفرض أن  $\Omega \subseteq R^n$  مفتوحة ، نفرض أن  $f: \Omega \rightarrow R$  لها مشتقات جزئية ثانية متصلة في  $\Omega$  ، ونفرض أن  $c \in \Omega$  نقطة حرجة للدالة  $f$  ، ونفرض كذلك أن  $\delta > 0$ .

(أ) أثبت أنه إذا كانت  $D^2 f(x)(w)^2 \geq 0$  لكل  $\|x - c\| < \delta$  و  $0 < \|x - c\|$  وأن  $w \in R^n$  ، فإن  $c$  هي نقطة نهاية صغرى نسبية للدالة  $f$ .

(ب) أثبت أنه إذا كانت  $D^2 f(x)(w)^2 > 0$  لكل  $\|x - c\| < \delta$  و  $0 < \|x - c\|$  و  $w \in R^n, w \neq 0$  ، فإن  $c$  هي نقطة نهاية صغرى دقيقة نسبية للدالة  $f$ .

٤٣ - (ج) نفرض أن  $\Omega \subseteq R^2$  مفتوحة ، ونفرض أن  $f: \Omega \rightarrow R$  لها مشتقات جزئية ثانية متصلة في  $\Omega$  ، ونفرض أن  $c \in \Omega$  هي نقطة حرجة للدالة  $f$  ، ونفرض كذلك

$$\Delta(x) = D_{11}f(x)D_{22}f(x) - (D_{12}f(x))^2$$

عند  $x \in \Omega$  . نفرض أنه عند قيمة ما  $\delta < 0$  ، فإن  $\Delta(x) \geq 0$  لكل  $\|x - c\| < \delta$  .

(أ) إذا كانت  $D_{11}f(x) > 0$  (أو إذا كانت  $D_{22}f(x) > 0$ ) لكل  $x$  بحيث أن  $\|x - c\| < \delta$  ، و  $0 < \|x - c\|$  ، وضح أن  $c$  هي نقطة نهاية صغرى نسبية للدالة  $f$ .

(ب) إذا كانت  $D_{11}f(x) < 0$  (أو إذا كانت  $D_{22}f(x) < 0$ ) لكل  $x$  بحيث أن  $\|x - c\| < \delta$  ، و  $0 < \|x - c\|$  ، وضح أن  $c$  هي نقطة نهاية عظمى نسبية للدالة  $f$ .

٤٣ - (د) نفرض أن  $f: R^n \rightarrow R$  قابلة للتفاضل في  $R^n$  وأن  $f(x) = 0$  لكل  $x \in R^n$  حيث  $\|x\| = 1$  . وضح أنه توجد نقطة  $c \in R^n$  عند  $\|c\| < 1$  بحيث أن  $Df(c) = 0$  . (هذه هي ترجمة نظرية رول  $R^n$ ) .

٤٣ - (هـ) استخدم نظرية الراسم الفوق (٤١ - ٦) لإثبات نتيجة (٤٣ - ٢) .

٤٣ - (و) وضح أن كلا من الدوال الآتية لها نقطة حرجة عند نقطة الأصل . أوجد تلك التي لها نقط نهاية نسبية والتي لها نقط ركوب عند نقطة الأصل .

$$\begin{array}{ll} f(x, y) = x^2 - y^3 & \text{(ب)} \\ f(x, y) = x^4 - x^2y^2 + y^4 & \text{(د)} \\ f(x, y) = x^4 + y^4 & \text{(ف)} \end{array} \quad \begin{array}{ll} f(x, y) = x^2y^2 & \text{(أ)} \\ f(x, y) = x^3 - y^3 & \text{(ج)} \\ f(x, y) = x^2y - xy^3 & \text{(هـ)} \end{array}$$

٤٣ - (ز) أثبت أن الدالة  $f(x, y) = 2x + 4y - x^2y^4$  لها نقطة حرجة لكن ليس لها نقط نهاية نسبية .

٤٣ - (ح) ادرس سلوك الدالة  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$  في جوار نقطة الأصل . يسمى الشكل لهذه الدالة أحيانا « بردعة القرد » لماذا ؟

٤٣ - (ط) أوجد أصغر مسافة من النقطة  $(2, 1, -3)$  للمستوى  $2x + y - 2z = 4$ .



٤٢- (ى) أوجد الأبعاد لصندوق قائم ، مفتوح من أعلى ، بحجم معلوم بحيث تكون مساحة سطحه في نهاية صفرى .

٤٢- (ك) أوجد أصغر بعد بين الخطين  $L_1 = \{(x, y, z) : x = 2 - t, y = 3 + t, z = 1 - 2t\}$  و  $L_2 = \{(x, y, z) : x = 1 - s, y = 2 - s, z = 3 + s\}$

٤٢- (ل) اعط أمثلة لتوضح أن كل التخمينات المنصوصة بعد نظرية ٤٢- ه باطلة .

٤٢- (م) نفرض أنه لدينا  $n$  نقط  $(x_j, y_j), j = 1, \dots, n$  في  $R^2$  ونريد إيجاد الدالة المألوفة  $F: R \rightarrow R$  المعطاة بأنها  $F(x) = Ax + B$  بحيث تكون الكمية

$$\sum_{i=1}^n (F(x_i) - y_i)^2$$

في نهاية صفرى . وضح أن هذا يؤدي إلى المعادلات

$$A \sum_{i=1}^n x_i^2 + B \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$A \sum_{i=1}^n x_i + nB = \sum_{i=1}^n y_i$$

للمددين  $A$  و  $B$  . [ تسمى هذه الدالة  $F$  بالدالة المألوفة التي « هي أحسن توفيق للنقط  $n$  بمفهوم طريقة أقل المربعات » ] .

٤٢- (ن) نفرض أن  $f: [0, 1] \rightarrow R$  متصلة في  $[0, 1]$  . نرغب في اختيار أعداد حقيقية  $A, B, C$  بطريقة تجعل الكمية

$$\int_0^1 [f(x) - (Ax^2 + Bx + C)]^2 dx$$

أصغر ما يمكن ، وضح أننا يجب أن نختار  $A, B, C$  لتحقيق المجموع

$$\frac{1}{3}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{5}C = \int_0^1 x^2 f(x) dx$$

$$\frac{1}{4}A + \frac{1}{5}B + \frac{1}{6}C = \int_0^1 x f(x) dx$$

$$\frac{1}{5}A + \frac{1}{6}B + C = \int_0^1 f(x) dx$$

[ يقال للدالة الناتجة  $x \mapsto Ax^2 + Bx + C$  أنها دالة درجة ثانية التي هي أحسن توفيق للدالة  $f$  في  $[0, 1]$  بمفهوم طريقة « أقل المربعات » ] .

٤٢- (س) استخدم نظرية لاجرانج لتحديد النقط على المنحنى  $y = x^3 + x - 2$  التي عندها ربما يكون للدالة  $f(x, y) = x - y$  فقط نهاية نسبية . حينئذ ارسم رسماً تخطيطياً

للمنحني والمنحنيات المستوية للدالة  $f$  لإثبات أن النقطة (النقط) التي حددتها ليست نقطة (نقطة) لنقط نهاية نسبية للدالة  $f$ .

٤٢ - (ع) نفرض أن  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  دالة من الدرجة الثانية  $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$

عند  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . نرغب في إيجاد النقطة النسبية للدالة  $f$  في دائرة الوحدة  $\{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$ . استخدم نظرية لاجرانج لتوضيح أن النقط  $(x_0, y_0)$  التي عندها تكون هذه النقط نقط نهاية نسبية يجب أن تحقق المجموعة

$$(a - \lambda)x_0 + by_0 = 0$$

$$bx_0 + (c - \lambda)y_0 = 0$$

حيث مضروب لاجرانج  $\lambda$  هو جدر المعادلة

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2) = 0$$

أثبت أن القيمة المناظرة للمضروب  $\lambda$  تساوي القيمة النهائية للدالة  $f$  عند مثل هذه النقط النهائية النسبية.

٤٢ - (ف) حاصل جمع ثلاثة أعداد حقيقية هو 9. أوجد هذه الأعداد إذا كان حاصل ضربهم أكبر ما يمكن.

٤٢ - (ص) أثبت أن حجم أكبر صندوق الذي يمكن رسمه داخل الجسم الناقص

$$\left\{ (x, y, z): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

(حيث  $a, b, c$  هي أعداد موجبة بدقة) يساوي  $8abc/3\sqrt{3}$

٤٢ - (ق) أوجد قيمة النهاية العظمى والنهاية الصغرى لكل من الدوال الآتية في النصف المعطاة (عند التخصيص، اعتبر إشارة المضروبات).

$$f(x, y) = x^4 - y^4, \quad S = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\} \quad (أ)$$

$$f(x, y) = x^2 + 2x + y^4, \quad S = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\} \quad (ب)$$

$$f(x, y) = x^2 + 2x + y^2, \quad S = \{(x, y), |x| \leq 1, |y| \leq 1\} \quad (ج)$$

$$f(x, y) = (1 - x^2) \sin y, \quad S = \{(x, y), |x| \leq 1, |y| \leq \pi\} \quad (د)$$

٤٢ - (ر) نفرض أن  $f$  معرفة عند  $x > 0, y > 0$  إلى  $\mathbb{R}$  بأنها  $f(x, y) = 1/x + cxy + 1/y$

(أ) عين مواقع النقط الحرجة للدالة  $f$  وحدد طبيعتها.

(ب) إذا كانت  $c > 0$ ، نفرض  $S = \{(x, y): 0 < x, 0 < y, x + y \leq c\}$

حدد قيم النهاية العظمى والصغرى النسبية للدالة  $f$  في  $S$ .

٤٢ - (ش) أوجد القيم النهائية للدالة  $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$  تحت القيود

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{و} \quad x + y + z = 1$$

٤٢ - (ت) نفرض أن  $f$  لها مشتقات جزئية ثانية متصلة في فئة مفتوحة تحتوي على الكرة  $\{x \in \mathbb{R}^p : \|x\| \leq r\}$  إلى  $\mathbb{R}$  ، ونفرض أنه توجد  $c$  حيث  $\|c\| < r$  بحيث إن

$$M = f(c) > \sup \{f(x) : \|x\| = r\} = m$$

نفرض أن  $g$  معرفة بأنها

$$g(x) = f(x) + \frac{M-m}{4r^2} \|x-c\|^2$$

أثبت أن  $g(c) = M$  بينما  $g(x) < M$  عند  $\|x\| = r$  . حينئذ  $g$  تصل إلى نهاية عظمى عند نقطة ما  $c_1$  حيث  $\|c_1\| < r$  ، وحيث نحصل على

$$\sum_{i=1}^p D_{ii} f(c_1) \leq -\frac{p}{2r^2} (M-m) < 0$$

٤٣ - (ث) نفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  فئة مفتوحة محدودة ، نفرض أن  $b(\Omega)$  هي الفئة لنقط حدودية من  $\Omega$  (انظر تعريف ٩ - ٧) ، ونفرض أن  $\Omega^- = \Omega \cup b(\Omega)$  هي إقفال  $\Omega$  يقال لدالة  $f: \Omega^- \rightarrow \mathbb{R}$  أنها توافقية في  $\Omega$  إذا كانت متصلة في  $\Omega^-$  وتحقق معادلة لابلاس

$$\sum_{i=1}^p D_{ii} f(x) = 0$$

لكل  $x \in \Omega$

(أ) استخدم الاستنتاج في التمرين السابق لتوضيح أن دالة توافقية في  $\Omega$  تنال أعلى قيمة وأدنى قيمة في  $b(\Omega)$  .

(ب) إذا كانت  $g$  و  $f$  دالتين توافقيتين في  $\Omega$  وإذا كانت  $f(x) = g(x)$  عند  $x \in b(\Omega)$  ، حينئذ  $f(x) = g(x)$  لكل  $x \in \Omega^-$

(ج) إذا كانت  $g$  و  $f$  دالتين توافقيتين في  $\Omega$  وإذا كانت  $f(x) = \varphi(x)$  ،  $g(x) = \psi(x)$  عند  $x \in b(\Omega)$  حينئذ

$$\sup \{|f(x) - g(x)| : x \in \Omega\} = \sup \{|\varphi(x) - \psi(x)| : x \in b(\Omega)\}$$

( هذا الاستنتاج يمكن نصه بقولنا إن « الحلول لمسألة ديرشلت للفراغ  $\Omega$  تتوقف دائماً على البيانات الحدودية » ) .

٤٣ - (خ) أثبت أن النهاية العظمى للدالة  $f(x_1, \dots, x_p) = (x_1 \cdots x_p)^2$  ، تحت القيود  $x_1^2 + \cdots + x_p^2 = 1$  تساوى  $1/p^p$  . استخدم هذا للحصول على المتباينة :

$$|y_1 \cdots y_p| \leq \frac{\|y\|^p}{p^{p/2}} \quad \text{عند } y \in \mathbb{R}^p$$

٤٢ - (ذ) أثبت أن المتوسط الهندسي لمجموعة أعداد حقيقية موجبة  $\{a_1, \dots, a_p\}$  لا يزيد عن متوسطها الحسابي ، أى

$$(a_1 \cdots a_p)^{1/p} \leq \frac{1}{p}(a_1 + \cdots + a_p)$$

٤٢ - (ض) (أ) نفرض أن  $p > 1, q > 1, 1/p + 1/q = 1$  أثبت أن النهاية الصغرى للدالة  $f(x, y) = (1/p)x^p + (1/q)y^q$  ( $x > 0, y > 0$ ) تحت القيد  $xy = 1$  تساوى الواحد الصحيح .

(ب) استخدم جزء (أ) لتوضح أنه إذا كانت  $a > 0, b > 0$  ، فإن

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

(ج) نفرض أن  $\{a_i\}, \{b_i\}, i = 1, \dots, n$  هى أعداد حقيقية موجبة . أثبت أن متباينة هولدر :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}$$

بوضع  $a = a_i/A, b = b_i/B$  على (ج) وتطبيق جزء (ج)  $A = (\sum a_i^p)^{1/p}, B = (\sum b_i^q)^{1/q}$

(د) استخدم متباينة هولدر في (ج) للحصول على متباينة منكوفسكى

$$\left( \sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{1/p}$$

( إرشاد :  $|a + b|^p = |a + b| |a + b|^{p/q} \leq |a| |a + b|^{p/q} + |b| |a + b|^{p/q}$  )

محمّد يوسف الدويش

## تكامل في $R^p$

سنقدم في هذا الباب النظرية لتكامل دوال حقيقية القيمة في الفراغ  $R^p$  حيث  $p > 1$ . الاقتراب المستخدم هنا هو نفسه الذي ابتدأنا به في باب ٢٩ في حالة  $p = 1$ ، لكن سوف نهتم هنا فقط بتكامل ريمان (وليس تكامل ريمان - اشتلتجز).

سلاحظ في باب ٤٣ أنه، لدوال محدودة معرفة في خلية مغلقة في  $R^p$ ، فإن النظرية لا تتطلب بالفعل تغييراً في تلك الموجودة في  $R$ . لكن، لإمكانية القدرة على أن تكامل على فئات عامة في  $R^p$  يكون من الضروري أن نطور، كما فعل في باب ٤٤، نظرية «محتوى» (كما نسمى التصور «لمساحة» ذات  $R^p$  من الأبعاد) لعائلة فئات مناسبة في الفراغ  $R^p$ . سوف نميز نظرية المحتوى من هذه العائلة من فئات، وتوضح كيف تمبر عن تكاملات في  $R^p$  كتكاملات متكررة. سنخصص الباب الأخير لتطور نظريات هامة على تحويل الفئات وتكاملات تحت رواسم قابلة للتفاضل. المشاكل النظرية تستحق الاعتبار، لكن نختتم بنظرية مفيدة جداً تحقق تغيير المتغيرات حتى في حالات ربما يجوز فيها التحويل كمية محدودة من سلوك «شاذ».

### الباب الثالث والأربعون — التكامل في $R^p$ :

ناقشنا في الأبواب ٢٩ - ٣١ التكامل لدوال محدودة حقيقية معرفة في فترة مدجة  $J$  في الفراغ  $R$ . قد يلاحظ قارئ بصير بالحالات العامة أن جزءاً كبيراً من الذي أجريناه في هذه الأبواب يمكن إجراؤه عندما تقع قيم الدالة في الفراغات الكارتيية  $R^q$ . وبمجرد تعريف هذه الإمكانية فليس من الصعب إجراء التمديلات الضرورية للحصول على نظرية تكامل لدوال في  $J$  إلى  $R^q$ .

وطبيعي أن نسأل عما إذا كان من الممكن الحصول على نظرية تكامل الدوال نطاقاتها هو فئة جزئية من الفراغ  $R^p$ ، وسيتذكر القارئ أن هذه قد أجريت في الحقيقة في مقررات التفاضل والتكامل حيث اعتبرنا تكاملات «مزدوجة» أو «ثلاثية». سنبتدىء في هذا الباب بدراسة تكامل ريمان لدوال حقيقية القيمة معرفة في فئة جزئية محدودة مناسبة من الفراغ  $R^p$ . وبالرغم من أن كثيراً من نتائجنا يمكن امتدادها لتسمح بقيم في  $R^p$  عند  $q > 1$ ، فسوف نترك هذا الامتداد للقارئ.

## محتوى صفر :

نتذكر من باب ه أن خلية في  $R$  هي فئة يكون لها إحدى الصور الأربع :

$$(a, b), \quad [a, b], \quad [a, b), \quad (a, b]$$

حيث  $a \leq b$  . يسمى العدان  $a, b$  بالنقطتين الطرفيتين لهذه الخلايا . خلية في  $R^p$  هي حاصل ضرب كارتيزي  $J = J_1 \times \dots \times J_p$  للخليات  $p$  في  $R$  . يقال للخلية  $J$  أنها مغلقة ( على الترتيب ، مفتوحة ) إذا كانت كل الخلايا  $J_1, \dots, J_p$  مغلقة ( على الترتيب ، مفتوحة ) في  $R$  . إذا كانت الخلايا  $J_i$  لها نقطتان طرفيتان  $a_i \leq b_i (i = 1, \dots, p)$  ، فنعرف المحتوى من  $J = J_1 \times \dots \times J_p$  بأنه حاصل الضرب

$$c(J) = (b_1 - a_1) \dots (b_p - a_p)$$

إذا كانت  $p = 1$  ، يسمى محتوى عادة « طول » ، إذا كانت  $p = 2$  ، فيسمى المحتوى « مساحة » ، إذا كانت  $p = 3$  ، فيسمى المحتوى « حجم » . سنستعمل الكلمة « محتوى » لأنها خالية من مدلولات مصاحبة خاصة لكلمات أخرى لها مدلولات .

لاحظ أنه إذا كانت  $J = J_1 \times \dots \times J_p$  و  $K = K_1 \times \dots \times K_p$  خلايا في  $R^p$  بحيث إن النقطتين الطرفيتين للخلية  $J_i$  هما نفس النقطتين الطرفيتين للخلية  $K_i$  لكل  $i = 1, \dots, p$  ، فإن  $c(J) = c(K)$  . بالمثل ، إذا كانت  $a_k = b_k$  لبعض  $k = 1, \dots, p$  ، فإن للخلية  $J$  محتوى  $c(J) = 0$  ؛ لكن ، ليس ضرورياً أن  $J = \emptyset$  .

إذا كانت  $J_1$  خلية بنقطتين طرفيتين  $a_i \leq b_i$  وإذا كانت  $b_1 - a_1 = \dots = b_p - a_p > 0$

فنقول إن

$$J = J_1 \times \dots \times J_p$$

هو مكعب . ربما يكون مكعباً مغلقاً ، مفتوحاً أولاً واحد منهما . سنسمى العدد  $b_1 - a_1 > 0$  الطول الجانبي للمكعب .

٤٣ - ١ تعريف . يكون للفئة  $Z \subseteq R^p$  محتوى صفر إذا كان يوجد لكل  $\varepsilon > 0$

فئة محدودة  $J_1, \dots, J_n$  للخلايا التي يحتوي اتحادها  $Z$  وبحيث إن

$$c(J_1) + \dots + c(J_n) < \varepsilon$$

من المهم أن يوضح القارئ أن شخصاً يحتاج إلى كون الخلايا الظاهرة في هذا التعريف مغلقة ، أو مفتوحة ، أو مكعبات ، وفكرة المحتوى صفر تظل تماماً نفس التصور

٤٣ - ٢ أمثلة . ( أ ) نقطة في الفراغ  $R^p$  لها محتوى صفر ، ( لماذا ؟ ) وأكثر عموماً ،

أي فئة جزئية محدودة للفراغ  $R^p$  لها محتوى صفر .

(ب) إذا كانت  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتابة في  $\mathbb{R}^p$  متقاربة إلى  $z_0 \in \mathbb{R}^p$  ، حينئذ يكون للفترة  $Z = \{z_n : n \geq 0\}$  محتوى صفر . لأنه ، إذا كانت  $\varepsilon > 0$  نفرض أن  $J_0$  خلية مفتوحة تحتوي  $z_0$  بحيث إن  $c(J_0) < \varepsilon$  . لذلك توجد  $k \in \mathbb{N}$  بحيث إن  $z_n \in J_0$  لكل  $n > k$  ويمكننا أخذ  $J_i = \{z_i\}$  عند  $i = 1, \dots, k$  لموصول على  $Z \subseteq J_0 \cup J_1 \cup \dots \cup J_k$  بما أن

$$c(J_0) + c(J_1) + \dots + c(J_k) < \varepsilon + 0 + \dots + 0 = \varepsilon$$

وبما أن  $\varepsilon > 0$  اختيارية ، فينتج أن  $Z$  لها محتوى صفر .

(ج) أي فئة جزئية من فئة بمحتوى صفر لها محتوى صفر . الاتحاد لعدد محدود من فئات بمحتوى صفر له محتوى صفر .

(د) في الفراغ  $\mathbb{R}^2$  ، يكون للفئة التي على هيئة ماسة  $S = \{(x, y) : |x| + |y| = 1\}$  محتوى صفر . لأنه ، إذا كانت  $n \in \mathbb{N}$  ، فإننا نقدم مربعات بأقطار على طول  $S$  ورؤوس عند انقط  $x = y = \pm k/n$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) حينئذ نرى أنه يمكننا أن نحصر  $S$  في  $4n$  مربعات مقفلة كل له محتوى  $1/n^2$  . ومن ثم المحتوى الكلي هو  $4/n$  ، التي يمكن جعله صغيراً بدرجة اختيارية . (انظر شكل ٤٣ - ١) .

(هـ) الدائرة  $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$  في  $\mathbb{R}^2$  لها محتوى صفر . يمكن برهنة هذه النتيجة بتعديل التعليل (د) .

(و) نفرض أن  $f$  دالة متصلة في  $J = [a, b]$  إلى  $\mathbb{R}$  حينئذ يكون للشكل التخطيطي

$$G = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in J\}$$

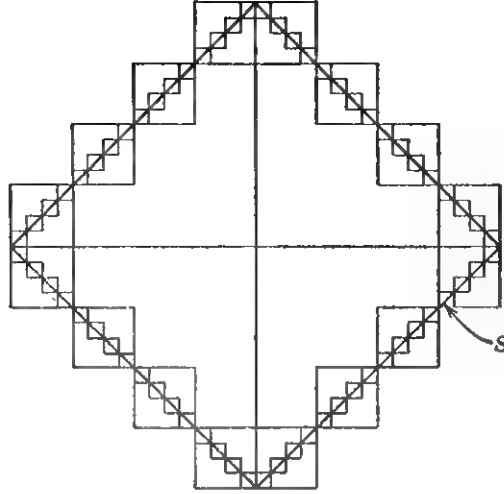
محتوى صفر . يمكن برهنة ذلك باستخدام الاتصال المنتظم للدالة  $f$  وتعديل المناقشة في (د) .

(ز) الفترة  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  ، تحتوي كل نقط  $(x, y)$  حيث كل من  $x$  و  $y$  تنتمي إلى  $I \cap Q$  هي فئة محسوبة لكن ليس لها محتوى صفر . في الحقيقة ، أي اتحاد محدود من خلايا تحتوي  $S$  يجب أن تحتوي أيضاً الخلية  $I \times I$  ، التي لها محتوى الواحد الصحيح .

نلاحظ بخلاف (و) أنه توجد « منحنيات متصلة » في  $\mathbb{R}^2$  لها محتوى موجب . في الحقيقة ، توجد دالتان متصلتان  $g, f$  في  $I = [0, 1]$  إلى  $\mathbb{R}$  بحيث إن الفترة

$$S = \{(f(t), g(t)) : t \in I\}$$

تحتوي الخلية  $I \times I$  في  $\mathbb{R}^2$  . يسمى مثل هذا المنحنى منحنى حشو فراغ ، أو منحنى بيتو (انظر تمرين ٤٣ - ش) .



( شكل ٤٢ - ١ )

### تعريف التكامل :

سنعرف أولاً تكامل دالة محدودة  $f$  معرفة على خلية مغلقة  $I \subseteq \mathbb{R}^p$  ونقيم في  $R$  .  
نفرض أن

$$I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p]$$

ولكن  $k = 1, \dots, p$  نفرض أن  $P_k$  هي تقسيم  $[a_k, b_k]$  إلى عدد محدود لخلايا مغلقة في  $R$  . ينتج هذا تقسيماً  $P$  من  $I$  إلى عدد محدود من خلايا مغلقة في  $\mathbb{R}^p$  . إذا كانت  $Q$  و  $P$  تقسيمي  $I$  ، فنقول إن  $P$  هي تكرير  $Q$  إذا كانت كل خلية في  $P$  محتوية في خلية ما في  $Q$  . ( وبالتماثل ، ملاحظة أن تفسيراً يتحدد برؤوس خلاياها ، تكون  $P$  تكرير  $Q$  إذا وإذا فقط كانت كل الرؤوس المحتوية في  $Q$  هي أيضاً في  $P$  ) .

٤٣ - ٣ تعريف . يعطى حاصل جمع ريمان  $S(P; f)$  المناظر للتقسيم  $P = \{J_1, \dots, J_n\}$  من  $I$  بما يلي :

$$S(P; f) = \sum_{k=1}^n f(x_k) c(J_k)$$

حيث  $x_k$  هي أى نقطة «متوسطة» في  $J_k$  ،  $k = 1, \dots, n$  . يعرف عدد حقيقى  $L$  بأنه تكامل ريمان لدالة  $f$  على  $I$  إذا كان يوجد ، لكل  $\varepsilon > 0$  تقسيم  $P_\varepsilon$  من  $I$  بحيث إنه إذا كانت  $P$  أى تكرير  $P_\varepsilon$  وكان  $S(P; f)$  هي أى حاصل جمع ريمان المناظر إلى  $P$  ، حينئذ  $|S(P; f) - L| \leq \varepsilon$  . في حالة وجود هذا التكامل نقول إن  $f$  قابلة للتكامل



على  $I$  . نفرض كثرتين روتيني نوضح أن القيمة  $L$  التكامل محدودة وحيدة عند وجودها ،  
سوف نكتب في الحالة العامة

$$L = \int_I f$$

لكن ، عندما  $p = 2$  فإننا نرمز من حين لحين للتكامل بالرمز

$$\iint_I f \cdot \text{أو} \iint_I f(x, y) d(x, y)$$

وعند  $p = 3$  نكتب اتفاقاً

$$\iiint_I f \cdot \text{أو} \iiint_I f(x, y, z) d(x, y, z)$$

يوجد معيار كوشي مناسب لقابلية التكامل . بما أن برهانه بشأن برهان نظرية ٢٩ - ٤ ،  
سوف نحذفه .

٤٣ - ٤ معيار كوشي . تكون دالة محدودة  $f: I \rightarrow R$  قابلة للتكامل على  $I$  إذا  
وإذا فقط كان يوجد لكل  $\varepsilon > 0$  تقسيماً  $Q$  من  $I$  بحيث إنه إذا كان  $P, Q$  تقسيمين  
من  $I$  هما تكريران للتقسيم  $Q$  ، وكان  $S(P; f)$  و  $S(Q; f)$  هما أى حواصل ريمان  
المنظرين ، حينئذ .

$$|S(P; f) - S(Q; f)| \leq \varepsilon$$

نرغب الآن في أن نعتبر دوال معرفة على فئات جزئية محدودة من  $R^p$  أكثر عموماً من  
خلايا مغلقة . نفرض أن  $A \subseteq R^p$  هي فئة محدودة ونفرض أن  $f: A \rightarrow R$  دالة محدودة .  
بما أن  $A$  محدودة فتوجد خلية مغلقة  $I \subseteq R^p$  بحيث إن  $A \subseteq I$  . نعرف  $f_I: I \rightarrow R$   
بأنها

$$\begin{aligned} x \in A & \quad \text{عند} \quad f_I(x) = f(x) \\ x \in I \setminus A & \quad \text{عند} \quad = 0 \end{aligned}$$

إذا كانت الدالة  $f_I$  قابلة للتكامل على  $I$  بمفهوم تعريف ٤٣ - ٣ ، حينئذ نوضح  
كثيرين (انظر ٤٣ - م) أن القيمة  $f_I$  لا تتوقف على اختيار الخلية المغلقة  $I$  التي  
تحتوي  $A$  . سنقول تباعاً لذلك أن  $f$  قابلة للتكامل على  $A$  ونعرف

$$\int_A f = \int_I f_I$$

بما أن الطرف الأيمن يعتمد فقط على  $A$  و  $f$  . (في مناقشات قادمة ، سوف نرمز غالباً إلى  
 $\int f$  ببساطة الرمز  $f$ ) .

بالمثل ، نفرض أن  $B$  و  $A$  فئتان جزئيتان محدودتان من  $R^p$  ونفرض أن  $f: A \rightarrow R$  نفرض أن  $I$  هي خلية مغلقة تحتوي  $A \cup B$  ونعرف  $f_1: I \rightarrow R$  بأنها

$$\begin{aligned} x \in A \cap B & \quad \text{عند} \quad f_1(x) = f(x) \\ x \in I \setminus (A \cap B) & \quad \text{عند} \quad = 0 \end{aligned}$$

لاحظ أن  $f_1$  هي الامتداد إلى  $I$  للقييد  $f|_{A \cap B}$  . إذا كانت  $f$  قابلة للتكامل على  $I$  ، فنقول إن  $f$  قابلة للتكامل على  $B$  ونعرف

$$\int_B f = \int_I f_1 \quad \left( = \int_{A \cap B} f \right)$$

### خواص التكامل :

سوف نعطى الآن بعض الخواص المتوقعة للتكامل . أثناء ذلك ، ستكون  $A$  فئة جزئية محدودة من  $R^p$  .

٤٣ - ه نظرية . نفرض أن  $g$  و  $f$  دالتان في  $A$  إلى  $R$  وقابلتان للتكامل على  $A$  ونفرض أن  $\alpha, \beta \in R$  . حينئذ تكون الدالة  $\alpha f + \beta g$  قابلة للتكامل على  $A$  ويكون

$$\int_A (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_A f + \beta \int_A g$$

البرهان . تنتج هذه النتيجة من حقيقة كون أن حاصل جمع ديمان لتقسيم  $P$  الخلية  $I \supseteq A$  يحققان

$$S(P; \alpha f + \beta g) = \alpha S(P; f) + \beta S(P; g)$$

عندما تستخدم نفس النقط المتوسطة  $x_k$  . وهو المطلوب إثباته

٤٣ - ٦ نظرية . نفرض أن  $f: A \rightarrow R$  قابلة للتكامل على  $A$  وإذا كانت  $f(x) \geq 0$  عند  $x \in A$  ، حينئذ  $\int_A f \geq 0$  .

البرهان . لاحظ أن  $S(P; f) \geq 0$  لأي  $P$  حاصل جمع ديمان وهو المطلوب إثباته

٤٣ - ٧ نظرية . نفرض أن  $f: A \rightarrow R$  دالة محدودة ونفرض أن الدالة  $A$  محتوية صفر . حينئذ  $f$  قابلة للتكامل على  $A$  وأن  $\int_A f = 0$  .

البرهان . نفرض أن  $I$  خلية مغلقة تحتوي  $A$  . إذا كانت  $\varepsilon > 0$  ، ممطاة فنفرض أن  $P_\varepsilon$  تقسيم  $I$  بحيث إن تلك الخلايا في  $P_\varepsilon$  التي تحتوي نقطة من  $A$  لها محتوى كل أقل من  $\varepsilon$  . (وضح أنه يوجد مثل هذا التقسيم  $P_\varepsilon$  ) . الآن إذا كانت  $P$  تكريراً من  $P_\varepsilon$  ، حينئذ يكون لهذه الخلايا في  $P$  التي تحتوي نقطة من  $A$  محتوى كلياً أقل من  $\varepsilon$  .

حينئذ إذا كانت  $|f(x)| \leq M$  عند  $x \in A$  ، نجد أن  $|S(P; f)| \leq M\varepsilon$  لأي حاصل جمع ريمان مناظر إلى  $P$  . لأن  $\varepsilon > 0$  اختيارية ، مما يثبت أن  $\int_A f = 0$  وهو المطلوب إثباته

٤٣ - ٨ نظرية . نفرض أن  $f, g: A \rightarrow R$  دوال محدودة ونفرض أن  $f$  قابلة للتكامل على  $A$  . نفرض أن  $E \subseteq A$  لها محتوى صفر ونفرض أن  $f(x) = g(x)$  لكل  $x \in A \setminus E$  . حينئذ تكون  $g$  قابلة للتكامل على  $A$  ويكون

$$\int_A f = \int_A g$$

البرهان . مد  $g$  و  $f$  إلى الدالتين  $g_I, f_I$  المعرفتين في خلية مغلقة  $I$  تحتوي  $A$  . يدل الفرض على أن الدالة  $h_I = f_I - g_I$  محدودة وتساوى صفراً ماعداً على  $E$  . حسب نظرية ٤٣ - ٧ نستنتج أن  $h_I$  قابلة للتكامل على  $I$  وقيمة تكاملها هي صفر باستخدام نظرية ٤٣ - ٥ ، نستنتج أن  $g_I = f_I - h_I$  قابلة للتكامل على  $I$  وأن

$$\int_A g = \int_I g_I = \int_I (f_I - h_I) = \int_I f_I = \int_A f$$

وهو المطلوب إثباته

## وجود التكامل :

من المتوقع أنه إذا كانت  $f$  متصلة في خلية مغلقة  $I$  إلى  $R$  ، فإن  $f$  قابلة للتكامل على  $I$  . سنثبت نتيجة أقوى تسمح للدالة  $f$  بأن تكون غير متصلة على مكدلة فئة بمحتوى صفر .

٤٣ - ٩ نظرية القابلية للتكامل . نفرض أن  $I \subseteq R^p$  هي خلية مغلقة ونفرض أن  $f: I \rightarrow R$  محدودة . إذا كان يوجد فئة جزئية  $E \subseteq I$  بمحتوى صفر بحيث تكون  $f$  متصلة على  $I \setminus E$  ، فإن  $f$  قابلة للتكامل على  $I$  .

البرهان . نفرض أن  $|f(x)| \leq M$  لكل  $x \in I$  ونفرض أن  $\varepsilon > 0$  مطاة . حينئذ يوجد (لماذا ؟) تقسيم  $P_\varepsilon$  للخلية  $I$  بحيث إن (i) الخلايا في  $P_\varepsilon$  التي تحتوي أي فقط من  $E$  تحتوي هذه النقاط في داخلهم ، وأن (ii) لهذه الخلايا محتوى كل أقل من  $\varepsilon$  الاتحاد  $C$  لخلايا مغلقة في  $P_\varepsilon$  التي لا تحتوي نقاطاً من  $E$  هي فئة جزئية مدجة تكون عليها الدالة  $f$  متصلة . طبقاً لنظرية الاتصال المنتظم ٢٣ - ٣ ، يكون التقييد للدالة  $f$  متصلاً بانتظام على  $C$  . بإحلال  $P_\varepsilon$  بتكرير ، إذا كان ذلك ضرورياً ، ربما نفترض أنه إذا كانت  $J_k$  خلية في  $P_\varepsilon$  ومحتوية في  $C$  ، وإذا كانت  $y \in J_k$  ،  $x$  فإن  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  نفترض أن  $P$  و  $Q$  تكريران للمقدار  $P_\varepsilon$  . إذا كانت  $S'(P; f)$  و  $S'(Q; f)$

ترميزان إلى أجزاء حواصل جمع ريمان الممتدة على الخلايا في  $C$  ، فإن مناقشة مشابهة إلى تلك الموجودة في الجزء التالي من برهان نظرية ٣٠ - ١ ، تنتج

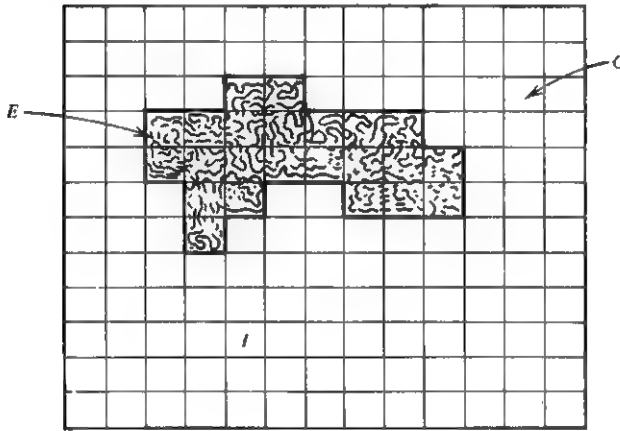
$$|S'(P; f) - S'(Q; f)| \leq |S'(P; f) - S'(P_\varepsilon; f)| + |S'(P_\varepsilon; f) - S'(Q; f)| \leq 2\varepsilon c(I)$$

بالمثل ، إذا كانت  $S''(P; f)$  و  $S''(Q; f)$  ترميزان إلى الجزء الباقي من حواصل جمع ريمان ، فإن •

$$|S''(P; f) - S''(Q; f)| \leq |S''(P; f)| + |S''(Q; f)| \leq 2M\varepsilon$$

لذلك ينتج أن

$$|S(P; f) - S(Q; f)| \leq \varepsilon(2c(I) + 2M)$$



( شكل ٤٣ - ٢ )

بما أن  $\varepsilon > 0$  اختيارية ، فستنتج من معيار كوشي أن  $f$  قابلة للتكامل على  $I$  . وهو المطلوب إثباته

ستعطى الشروط الضرورية والأساسية لقابلية التكامل في (تمرين ٤٣ - ع) ومشروع

٤٤ - أ .

### تمريعات :

٤٣ - (أ) . (أ) نفرض أن  $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$  ونفرض أن  $J = J_1 \times \dots \times J_p$  لها محتوى  $\mathbb{R}^p$  . أثبت أن  $J_1 = [a_1, a_1]$  ،  $\dots$  ،  $J_p = [a_p, a_p]$  هي خلايا في  $\mathbb{R}^p$  . ومن ثم أثبت أن للفترة  $\{a\}$  محتوى صفري في  $\mathbb{R}^p$  .

(ب) إذا أخذنا  $J'_1 = (a_1, a_1)$  حنفذ تكون الخلية  $J' = J'_1 \times J_2 \times \dots \times J_p$  خالية ولها محتوى صفر .

٤٣ - (ب) أثبت أن لفئة  $Z \subseteq \mathbb{R}^p$  محتوى صفر إذا وإذا فقط كان يوجد لكل  $\varepsilon > 0$  فئة محدودة  $K_1, \dots, K_n$  لمكعبات اتحادها يحتوى  $Z$  وبحيث إن  $c(K_1) + \dots + c(K_n) < \varepsilon$

٤٣ - (ج) اكتب تفاصيل البرهان للفرص ، المذكور في مثال ٤٣ - ٢ (و) ، الذى يقول إن المنحنى  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  لدالة متصلة  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  له محتوى صفر .

٤٣ - (د) إذا كانت  $J$  خلية مغلقة في  $\mathbb{R}^2$  وكانت  $g: J \rightarrow \mathbb{R}$  متصلة ، أثبت أن للمنحنى  $\{(x, y, g(x, y)): (x, y) \in J\} \subseteq \mathbb{R}^3$  للدالة  $g$  محتوى صفر .

٤٣ - (هـ) نفرض أن  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  هي فئة تتكون من كل أزواج  $(i/p, j/p)$  حيث  $p$  هو عدد أولى ، وأن  $i, j = 1, 2, \dots, p-1$  . أثبت أن كل خط أفق وأن كل خط رأسى في  $\mathbb{R}^2$  يقطع  $A$  في عدد محدود (غالباً صفراً) من نقاط . هل  $A$  لها محتوى صفر ؟

٤٣ - (و) نفرض أن  $I \subseteq \mathbb{R}^p$  خلية مغلقة ونفرض أن  $P = \{I_1, \dots, I_n\}$  و  $Q = \{J_1, \dots, J_m\}$  تقسيمان للخلية  $I$  إلى خلايا مغلقة . أثبت أن  $R = \{I \cap J_j: i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$

تقسيم للخلية  $I$  وأن  $R$  تكرير لكل من  $Q$  و  $P$  . يسمى التقسيم  $R$  بالتكرير المشترك للتقسيمين  $P$  و  $Q$  .

٤٣ - (ز) إذا كانت  $I \subseteq J$  خلايا في  $\mathbb{R}^p$  وإذا كانت  $P$  تقسيماً للخلية  $I$  ، وضح أنه يوجد تقسيم  $Q$  للمقدار  $J$  بحيث إن كل خلية في  $P$  تنتمى إلى  $Q$  .

٤٣ - (ح) نفرض أن  $Z \subseteq \mathbb{R}^p$  فئة بمحتوى صفر ونفرض أن  $I$  خلية مغلقة محتوية  $Z$  . إذا كانت  $J_1, \dots, J_k$  هي خلايا محتوية في  $I$  التى اتحادها يحتوى  $Z$  ، أثبت أنه يوجد تقسيم  $\tilde{P}$  للخلية  $I$  بحيث إن الإقفال لكل  $J_k$  هو الاتحاد للخلايا في  $P$  .

٤٣ - (ط) نفرض أن  $Z \subseteq \mathbb{R}^p$  فئة بمحتوى صفر ونفرض أن  $I$  خلية مغلقة تحتوى  $Z$  . إذا كانت  $\varepsilon > 0$  ، وضح أنه يوجد تقسيم  $P_\varepsilon$  للخلية  $I$  بحيث إن للخلايا في  $P_\varepsilon$  التى تحتوى نقطاً في  $Z$  محتوى كل أقل من  $\varepsilon$  .

٤٣ - (ى) في التمرين السابق ، وضح أنه يمكننا اختيار  $P_\varepsilon$  بحيث يكون لها الخاصية الإضافية وهى أن الخلايا في  $P_\varepsilon$  التى تحتوى أى نقطة للفئة  $Z$  تحتويها في داخلها .

٤٣ - (ك) في (تمرين ٤٣ - ط) ، إذا كانت  $I$  مكعباً ، أثبت أنه يوجد تقسيم  $Q_\varepsilon$  للمكعب  $I$  إلى مكعبات بحيث إن المكعبات في  $Q_\varepsilon$  التى تحتوى نقطاً في  $Z$  لها محتوى كل أقل من  $\varepsilon$  .

٤٣ - (ل) نفرض أن  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  محدودة ونفرض أن  $I$  و  $J$  خليتان مغلقتان في  $\mathbb{R}^p$  بحيث إن  $A \subseteq I \subseteq J$ . إذا كانت  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  دالة محدودة ، عرف  $f_1: I \rightarrow \mathbb{R}$  (على الترتيب  $f_1: J \rightarrow \mathbb{R}$  لتكون الدالة التي تتفق مع  $f$  على  $A$  وتنعدم على  $I \setminus A$  (على الترتيب  $f_1: J \setminus A$ ). وضح أن تكامل الدالة  $f_1$  على  $I$  موجود إذاً وإذا فقط كان تكامل الدالة  $f$  على  $J$  موجوداً وفي هذه الحالة يكون التكاملان متساويين .

٤٣ - (م) نفرض أن  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  محدودة ونفرض أن  $I_1$  و  $I_2$  خليتان مغلقتان في  $\mathbb{R}^p$  بحيث إن  $A \subseteq I_1 \subseteq I_2$ . نفرض أن  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  دالة محدودة ، وأتينا ، عند  $j = 1, 2$  ، نعرف  $f_j: I_j \rightarrow \mathbb{R}$  بأنها  $f_j(x) = f(x)$  عند  $x \in A$  وأن  $f_j(x) = 0$  عند  $x \in I_j \setminus A$  وضح أن تكامل الدالة  $f_1$  على الخلية  $I_1$  موجود إذاً وإذا فقط كان تكامل الدالة  $f_2$  على  $I_2$  موجوداً ، وفي هذه الحالة يكون التكاملان متساويين .

٤٣ - (ن) أثبت وحدوية تكامل دالة محدودة  $f$  معرفة على خلية مغلقة  $I \subseteq \mathbb{R}^p$  .

٤٣ - (س) اكتب التفاصيل لبرهان معيار كوشي ٤٣ - ٤ .

٤٣ - (ع) نفرض أن  $I \subseteq \mathbb{R}^p$  خلية مغلقة ونفرض أن  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  محدودة . حينئذ تكون الدالة  $f$  قابلة للتكامل على  $I$  إذاً وإذا فقط كان يوجد لكل  $\varepsilon > 0$  تقسيم  $P_\varepsilon$  للخلية  $I$  بحيث إنه إذا كانت  $P = \{J_1, \dots, J_n\}$  تكريراً  $P_\varepsilon$  ، فإن

$$\sum_{j=1}^n (M_j - m_j) c(J_j) < \varepsilon$$

حيث  $M_j = \sup \{f(x) : x \in J_j\}$  و  $m_j = \inf \{f(x) : x \in J_j\}$  عند  $j = 1, \dots, n$  تسمى هذه النتيجة معيار ريمان للقابلية للتكامل (انظر نظرية ٣٠ - ١) .

٣٤ - (ف) نفرض أن  $I \subseteq \mathbb{R}^p$  خلية مغلقة ونفرض أن  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  محدودة بالمقدار  $M$  . إذا كانت  $f$  قابلة للتكامل على  $I$  ، أثبت أن الدالة  $|f|$  تكون قابلة للتكامل على  $I$  وأن  $\int_I |f| \leq M c(I)$  .

٣٤ - (ص) نفرض أن  $I \subseteq \mathbb{R}^p$  خلية مغلقة ونفرض أن  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  قابلة للتكامل على  $I$  . أثبت أن دالة حاصل الضرب  $fg$  قابلة للتكامل على  $I$  .

٤٣ - (ق) نفرض أن  $I \subseteq \mathbb{R}^p$  خلية مغلقة ونفرض أن  $(f_n)$  متتابعة دوال قابلة للتكامل على  $I$  . إذا كانت المتتابعة تتقارب بانتظام على  $I$  إلى  $f$  ، أثبت أن  $f$  قابلة للتكامل على  $I$  وأن

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_I f_n \right)$$

٤٣ - (ر) نفرض أن  $K \subseteq \mathbb{R}^p$  مكعب مغلق ونفرض أن  $f, g: K \rightarrow \mathbb{R}$

متصلة . أثبت أنه إذا كانت  $\varepsilon > 0$  ، فإنه يوجد تقسيم  $P_\varepsilon = \{K_1, \dots, K_r\}$  للمكعب  $K$  إلى مكعبات بحيث إنه إذا كانت  $x_i, y_i$  أى نقط من  $K_j, j = 1, \dots, r$  ، فإن

$$\left| \int_K fg - \sum_{j=1}^r f(x_j)g(y_j)c(K_j) \right| < \varepsilon c(K)$$

٤٢ - (ش) يعطى هذا التمرين مثالا يرجع إلى آى . ج . شونبرج (\*) المنحنى حشو الفراغ نفرض أن  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  متصلة ، زوجية ، بدوره 2 وبحيث إن

$$\varphi(t) = 0 \quad \text{for} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{3}$$

$$= 3t - 1 \quad \text{for} \quad \frac{1}{3} < t < \frac{2}{3},$$

$$= 1 \quad \text{for} \quad \frac{2}{3} \leq t \leq 1$$

(أ) ازمم شكلا تخطيطياً للدالة  $\varphi$  . لاحظ أن  $\|\varphi\|_\infty = 1$ .

(ب) إذا كانت  $t \in I$  ، عرف  $f(t)$  و  $g(t)$  بأنها

$$f(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2^2}\varphi(3^2t) + \frac{1}{2^3}\varphi(3^4t) + \dots$$

$$g(t) = \frac{1}{2}\varphi(3t) + \frac{1}{2^2}\varphi(3^3t) + \frac{1}{2^3}\varphi(3^5t) + \dots$$

أثبت أن هاتين المسلسلتين يتقاربان بانتظام ، أى أن  $f, g$  متصلتان على  $I$  .

(ج) أوجد قيمة  $g(t)$  و  $f(t)$  ، حيث  $t$  لها المفكوك الثلاثى (قاعدة 3) المعطى كما يلى

$$0.2020, \quad 0.0220, \quad 0.0022, \quad 0.2002$$

(د) نفرض أن  $(x, y)$  تنتمى إلى المنحنى  $S = \{(f(t), g(t)) : t \in I\}$  واكتب  $x, y$  فى صورة مفكوكها الثنائى (قاعدة 2) :

$$x = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots, \quad y = 0.\beta_1\beta_2\beta_3\dots$$

حيث  $\alpha_m$  و  $\beta_m$  يساويان إما صفراً أو 1 . نفرض أن  $t$  هى العدد الحقيقى المناظر الذى مفكوكه الثلاثى هو

$$t = 0.(2\alpha_1)(2\beta_1)(2\alpha_2)(2\beta_2)\dots$$

أثبت أن  $x = f(t)$  و  $y = g(t)$  . وإذن كل نقطة فى المكعب  $I \times I$  تنتمى إلى المنحنى  $S$  .

(\*) ابحق ج. شونبرج (١٩٠٣ - ) ولد فى رومانيا وتعلم هناك وفى ألمانيا لعدة سنوات أثناء وجوده فى جامعة بنسلفانيا ، بحث فى نظرية العدد ، التحليل الحقيقى والمركب ، وتفاضل وتكامل المتغيرات .

- ٤٢ - (ت) فئة  $Z \subseteq \mathbb{R}^p$  لها مقياس صفر إذا وجدت لكل  $\varepsilon > 0$  متتامة  $(J_n)$  لخلايا اتحادها يحتوى  $Z$  وبحيث إن  $\sum c(J_n) < \varepsilon$  .
- (أ) بما أن الفئة الخالية هي خلية ، وضح أن فئة لها محتوى صفر يكون لها أيضاً مقياس صفر .
- (ب) أثبت أن كل فئة محسوبة في  $\mathbb{R}^p$  لها مقياس صفر . وإذن الفئة في مثال ٤٣ - ٢ (ز) لها مقياس صفر ( لكن ليس لها محتوى صفر ) .
- (ج) وضح أنه ، في التعريف « المقياس صفر » المعطى أعلى ، يمكن أن نحتاج إلى كون الخلايا مفتوحة ، أو مكعبات .
- (د) أثبت أن لكل فئة مدججة بمقياس صفر أيضاً محتوى صفر .
- (هـ) للاتحاد لعائلة من فئات محسوبة بمحتوى صفر مقياس صفر .

### مشروعات :

- ٤٣ -  $\alpha$  - نفرض أن  $I \subseteq \mathbb{R}^p$  خلية مغلقة ونفرض أن  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  محدودة . إذا كانت  $P = \{J_1, \dots, J_n\}$  تقسيماً لـ  $I$  ، نفرض أن
- $$m_j = \inf \{f(x) : x \in J_j\}, \quad M_j = \sup \{f(x) : x \in J_j\}$$
- عند  $n, \dots, 1$   $j$  وعرف حاصل الجمع العلوى والسفلى للدالة  $f$  عند  $P$  كما يلى
- $$L(P; f) = \sum_{j=1}^n m_j c(J_j), \quad U(P; f) = \sum_{j=1}^n M_j c(J_j)$$
- (أ) إذا كانت  $S(P; f)$  أى حاصل جمع ريمان المناظر إلى  $P$  ، حينئذ
- $$L(P; f) \leq S(P; f) \leq U(P; f)$$
- إذا كانت  $\varepsilon > 0$  ، فإنه يوجد حاصل جمع ريمان  $S_1(P; f)$  و  $S_2(P; f)$  المناظران إلى  $P$  بحيث إن
- $$S_1(P; f) \leq L(P; f) + \varepsilon, \quad U(P; f) - \varepsilon \leq S_2(P; f)$$
- (ب) إذا كانت  $P$  تقسيماً من  $I$  وكانت  $Q$  تكرير  $P$  ، حينئذ
- $$L(P; f) \leq L(Q; f) \leq U(Q; f) \leq U(P; f)$$
- (ج) إذا كانت  $P_1$  و  $P_2$  أى تقسيمين من  $I$  ، حينئذ  $L(P_1; f) \leq U(P_2; f)$
- (د) عرف التكامل الأدنى والأعلى للدالة  $f$  على  $I$  بأنه
- $$L(f) = \sup \{L(P; f)\}, \quad U(f) = \inf \{U(P; f)\}$$



على الترتيب ، حسبت النهاية الأعلى والنهاية الأدنى تكون مأخوذة على كل أجزاء  $I$  . أثبت أن  $L(f) \leq U(f)$  .

(هـ) وضح أن  $f$  قابلة للتكامل ( بمفهوم تعريف ٤٣ - ٣ ) إذا وإذا فقط كان  $L(f) = U(f) = \int_I f$  ، وفي هذه الحالة يكون  $L(f) = U(f)$  .

(و) وضح أن  $f$  قابلة للتكامل إذا وإذا فقط كان يوجد لكل  $\varepsilon > 0$  تقسيماً  $P$  بحيث إن  $U(P; f) - L(P; f) < \varepsilon$  . ( يسمى هذا الشرط أحياناً شرط ريمان ، قارنه بتمرين ٤٣ - ع ) .

٤٣ -  $\beta$  - تطور هذا المشروع تكامل الدوال على خلية مغلفة  $I \subseteq \mathbb{R}^p$  ويقم في  $\mathbb{R}^q$  . إذا كانت  $P = \{J_1, \dots, J_n\}$  تقسيماً للخلية  $I$  ، فإن حاصل جمع ريمان  $S(P; f)$  المناظر إلى  $P$  هو حاصل جمع

$$S(P; f) = \sum_{k=1}^n c(J_k) f(x_k)$$

حيث  $x_k \in J_k$  . يكون  $L \in \mathbb{R}^q$  تكامل ريمان للدالة  $f$  على  $I$  إذا كان يوجد لكل  $\varepsilon > 0$  تقسيم  $P_\varepsilon$  للخلية  $I$  بحيث إنه إذا كانت  $P$  تكرير  $P_\varepsilon$  وكان  $S(P; f)$  هو أى حاصل جمع ريمان مناظر ، فإن  $\|S(P; f) - L\| < \varepsilon$  . افحص أى النظريات الموجودة في هذا الباب تظل صحيحة للدوال بقيم في  $\mathbb{R}^q$  . رضح أن  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^q$  قابلة للتكامل إذا وإذا فقط كانت كل دالة  $f_j = e_j \cdot f$  ،  $j = 1, \dots, q$  قابلة للتكامل . ( هنا  $e_1, \dots, e_q$  هي المتجهات الأساسية القياسية في  $\mathbb{R}^q$  ) .

## الباب الرابع والأربعون — محتوى التكامل :

سنقدم في هذا الباب مجموعة الفئات بمحتويات ، ونميز الدالة المحتوية كدالة حقيقية القيمة معرفة على هذه المجموعة من فئات . سنحصل الآن على بعض خواص أبعد للتكامل على فئات بمحتوى ، ونوضح كيف أنه يمكن حساب التكامل « كتكامل مكرر » .

٤٤ - ١ - تعريف . إذا كانت  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  ، حينئذ نتذكر أن نقطة  $x \in \mathbb{R}^p$  يقال إنها نقطة حدودية للفئة  $A$  إذا احتوى كل جوار  $x$  على كل من نقط في  $A$  ونقط في مكملها  $\mathcal{C}(A)$  . حدود  $A$  هي فئة جزئية من الفراغ  $\mathbb{R}^p$  وتتكون من كل النقط الحدودية من  $A$  ؛ وسيرمز لها بالرمز  $b(A)$  .

نتذكر أنه إذا كانت  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  ، فإن نقطة الفراغ  $\mathbb{R}^p$  هي بالضبط إحدى النقط الآتية : نقطة داخلية من  $A$  ، نقطة حدودية من  $A$  ، أو هي نقطة خارجية عن  $A$  . يتكون الداخل  $A^\circ$  من كل النقط الداخلية من  $A$  ؛ هي فئة مفتوحة في  $\mathbb{R}^p$  كما لاحظنا أعلاه

تحتوى الحدودية  $b(A)$  على كل النقط الحدودية من  $A$  ؛ هي فئة مغلقة في  $R^p$  . إفعال  $A^-$  هو اتحاد  $A \cup b(A)$  ؛ هو فئة مغلقة في  $R^p$  .

نتوقع عادة أن الحدودية لفئة صغيرة ، لكن هذا ناتج بسبب تعودنا التفكير في المستطيلات والدوائر والأشكال الأولية . يوضح مثال ٤٣ - ٢ ( ز ) أن الحدودية لفئة محسوبة في الفراغ  $R^2$  يمكن أن تساوى حدوديتها  $I \times I$  .

## فئات مع محتوى :

سنعرف الآن المحتوى لفئة جزئية من الفراغ  $R^p$  التي حدوديتها لها محتوى صفر .

٤٤ - ٢ تعريف . فئة محدودة  $A \subseteq R^p$  حدوديتها  $b(A)$  والتي لها محتوى صفر يقال إن لها محتوى . سيرمز للمجموعة لكل الفئات الجزئية للفراغ  $R^p$  التي لها محتوى بالرمز  $\mathcal{D}(R^p)$  . إذا كانت  $A \in \mathcal{D}(R^p)$  وإذا كانت  $I$  خلية مغلقة تحتوى  $A$  ، فإن الدالة  $g_I$  المعرفة بأنها

$$\begin{aligned} x \in A, \quad & \text{عند} \quad g_I(x) = 1 \\ x \in I \setminus A \quad & \text{عند} \quad = 0 \end{aligned}$$

متصلة على  $I$  ماعدا إمكانية عدم اتصالها عند نقط من  $b(A)$  . ومن ثم  $g_I$  قابلة للتكامل على  $I$  ونعرف المحتوى  $c(A)$  للفئة  $A$  بأنه يساوى  $\int_I g_I$  . أى أن

$$c(A) = \int_I g_I = \int_A 1$$

لاحظ أنه إذا كانت  $J \subseteq R^p$  خلية ، حينئذ تتكون حدوديتها من الاتحاد لأعداد محدودة من « الأوجه » التي هي خلايا كل لها محتوى صفر . [ مثال ذلك ، إذا كانت  $J = [a, b] \times [c, d]$  ، حينئذ  $b(J)$  هو الاتحاد للأربع خلايا

$$[a, b] \times [c, c], \quad [a, b] \times [d, d]$$

$$[a, a] \times [c, d], \quad [b, b] \times [c, d]$$

هذه الخلايا الأربع نفسها هي أيضاً الحدودية للخلية  $(a, b) \times (c, d)$  [ ينتج أن خلية في  $R^p$  يكون لها محتوى ؛ بالإضافة إلى ذلك ، يكون من السهولة ملاحظة أنه إذا كانت  $J = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_p, b_p]$  ، فإن

$$c(J) = \int_J 1 = (b_1 - a_1) \dots (b_p - a_p)$$

ومن ثم يتفق معنى المحتوى لخلية ، كما أعطى بتعريف ( ٤٤ - ٢ ) ، مع التعريف للمحتوى المختص ترجع بخلية مغلقة في باب ٤٣ . بالمثل تستخدم ملاحظات مماثلة لخلايا أخرى

في الفراغ  $R^n$  ، بوجه خاص ، نلاحظ أنه إذا كانت  $K = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  فإن

$$c(K) = \int_K 1 = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n).$$

سوف نوضح الآن أن المفهوم لمحتوى صفر الذي قدمناه في تعريف (٤٣ - ١) يتفق مع المفهوم للمحتوى الذي قدمناه في تعريف (٤٤ - ٢) .

٤٤-٣ مفترض . يكون للفترة  $A \subseteq R^n$  لها محتوى صفر ( بمفهوم تعريف ٤٣ - ١ إذا وإذا فقط كان لها محتوى ( بمفهوم تعريف ٤٤ - ٢ ) ويكون  $c(A) = 0$  .

البرهان . نفرض أن  $A \subseteq R^n$  لها محتوى صفر . حينئذ ، إذا كانت  $\varepsilon > 0$  ، فيمكننا أن نحصر  $A$  في الاتحاد  $U$  لعدد محدود لخلايا مغلقة بمحتوى كل أقل من  $\varepsilon$  . بما أن هذا الاتحاد  $U$  هو فترة محدودة ، فإن  $A$  محدودة ، بما أن  $U$  مغلقة ، فإنها تحتوي أيضاً  $b(A)$  بما أن  $\varepsilon > 0$  اختيارية ، فنستنتج أن  $b(A)$  لها محتوى صفر ؛ ومن ثم  $A$  لها محتوى وأن

$$c(A) = \int_A 1 \text{ ,}$$

الآن ينتج من مفترض (٤٣ - ٧) أن  $c(A) = 0$  .

وبالعكس ، نفرض أن  $A \subseteq R^n$  لها محتوى وأن  $c(A) = 0$  ، ومن ثم توجد خلية مغلقة  $I$  تحتوي  $A$  وبحيث تكون الدالة

$$\begin{aligned} g_1(x) &= 1 & \text{for } x \in A, \\ &= 0 & \text{for } x \in I \setminus A, \end{aligned}$$

قابلة للتكامل على  $I$  . نفرض  $\varepsilon > 0$  معطاة ونفرض أن  $P_\varepsilon$  تقسيم  $I$  بحيث إن أي حاصل جمع ريمان المناظر إلى  $P_\varepsilon$  يحقق  $0 \leq S(P_\varepsilon; g_1) < \varepsilon$  . إذا أخذنا النقط الوسطى في  $(P_\varepsilon; g_1)$  . لتنتمي إلى  $A$  كلما كان ذلك ممكناً ، فنستنتج أن  $A$  تكون محتوية في الاتحاد لعدد محدود لخلايا في  $P_\varepsilon$  بمحتوى كل أقل من  $\varepsilon$  . أي إن  $A$  لها محتوى صفر بمعنى تعريف (٤٣ - ١) .

٤٤-٤ نظرية . نفرض أن  $A$  و  $B$  تنتميان إلى  $\mathcal{D}(R^n)$  ونفرض أن  $x \in R^n$  .

(أ) الفئتان  $A \cap B$  و  $A \cup B$  تنتميان إلى  $\mathcal{D}(R^n)$  وأن

$$c(A) + c(B) = c(A \cap B) + c(A \cup B)$$

(ب) الفئتان  $A \setminus B$  و  $B \setminus A$  تنتميان إلى  $\mathcal{D}(R^n)$  وأن

$$c(A \cup B) = c(A \setminus B) + c(A \cap B) + c(B \setminus A)$$

(ج) إذا كانت  $x + A = \{x + a : a \in A\}$  ، فإن  $x + A$  تنتمي إلى  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$  وأن

$$c(x + A) = c(A)$$

البرهان . من الفرض ، الحدوديتان  $b(A)$ ،  $b(B)$  لهما محتوى صفر . سنترك كتمرين للقارئ توضيح أن الحدوديات

$$b(A \cap B), \quad b(A \cup B), \quad b(A \setminus B), \quad b(B \setminus A)$$

هي محتوية في  $b(A) \cup b(B)$  . ينتج من هذا ومن مثال ٤٣ - ٧ (ج) أن :  $A \cap B, A \cup B, A \setminus B$  و  $B \setminus A$  تنتمي إلى  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$  .

نفرض الآن أن  $I$  خلية مغلقة تحتوي  $A \cup B$  ونفرض أن  $f_a, f_b, f_i, f_u$  هي الدوال المساوية للواحد الصحيح على  $A, B, A \cap B, A \cup B$  ، على الترتيب ، ومساوية صفراً خلاف ذلك على  $I$  . بما أن كلا من هذه الدوال متصلة ماعداً على ثنات محتوى صفر ، فإنها قابلة للتكامل على  $I$  . بما أن

$$f_a + f_b = f_i + f_u$$

فينتج من نظرية (٤٣ - ٥) وتعريف المحتوى أن

$$\begin{aligned} c(A) + c(B) &= \int_I f_a + \int_I f_b = \int_I (f_a + f_b) \\ &= \int_I (f_i + f_u) = \int_I f_i + \int_I f_u \\ &= c(A \cap B) + c(A \cup B) \end{aligned}$$

كما يثبت القانون المغطى في (أ) ، ويمكن برهنة القانون في (ب) بالمثل .

لبرهان (ج) ، لاحظ أنه إذا كانت  $\varepsilon > 0$  مغطاة وإذا كانت  $J_1, \dots, J_n$  خلايا محتوى كل أقل من  $\varepsilon$  اتحادها يحتوي  $b(A)$  ، حينئذ  $x + J_1, \dots, x + J_n$  خلايا محتوى كل أقل من  $\varepsilon$  اتحادها يحتوي  $b(x + A)$  . بما أن  $\varepsilon > 0$  اختيارية ، فإن الفئة  $x + A$  تنتمي إلى  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$  . لتوضح أن  $c(x + A) = c(A)$  ، نفرض أن  $I$  خلية مغلقة تحتوي  $A$  ، ومن ثم تكون  $x + I$  خلية مغلقة تحتوي  $x + A$  . نفرض أن  $f_1: I \rightarrow \mathbb{R}$  بحيث إن  $f_1(y) = 1$  عند  $y \in A$  وأن  $f_1(y) = 0$  عند  $y \in I \setminus A$  ونفرض أن  $f_2: x + I \rightarrow \mathbb{R}$  بحيث إن  $f_2(z) = 1$  عند  $z \in x + A$  وأن  $f_2(z) = 0$  عند  $z \in (x + I) \setminus (x + A)$  . وضح أنه لكل حاصل جمع ريمان الدالة  $f_1$  يوجد حاصل جمع ريمان مناظر للدالة  $f_2$  ويساويه . وإذن

$$c(A) = \int_I f_1 = \int_{x+I} f_2 = c(x + A)$$

وهو المطلوب إثباته

٤٤ - ٥ نتيجة . نفرض أن  $B$  و  $A$  تنتميان إلى  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$

(أ) إذا كانت  $A \cap B = \emptyset$  فإن  $c(A \cup B) = c(A) + c(B)$

(ب) إذا كانت  $A \subseteq B$  ، فإن  $c(B \setminus A) = c(B) - c(A)$

### تمييز للدالة المحتوية :

قد رأينا أن الدالة المحتوية  $c: \mathcal{D}(\mathbb{R}^p) \rightarrow \mathbb{R}$  موجبة « إضافية » ، « ثابتة تحت إزاحة »  
وتخصص القيمة 1 إلى المكعب « نصف مفتوح » .

$$K_0 = [0, 1) \times [0, 1) \times \cdots \times [0, 1)$$

سنوضح الآن أن هذه الخواص الأربع تميز  $c$  .

٤٤ - ٦ نظرية . نفرض أن  $\gamma: \mathcal{D}(\mathbb{R}^p) \rightarrow \mathbb{R}$  دالة ذات الخواص الآتية :

(i)  $\gamma(A) \geq 0$  لكل  $A \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$

(ii) إذا كانت  $A \cap B = \emptyset$  و  $A, B \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$

فإن  $\gamma(A \cup B) = \gamma(A) + \gamma(B)$

(iii) إذا كانت  $x \in \mathbb{R}^p$  و  $A \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$  فإن  $\gamma(A) = \gamma(x + A)$

(iv)  $\gamma(K_0) = 1$

حينئذ نجد أن  $\gamma(A) = c(A)$  لكل  $A \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$

البرهان . إذا كانت  $n \in \mathbb{N}$  ، نفرض أن  $K_n$  هي المكعب « النصف مفتوح »

$$K_n = [0, 2^{-n}) \times [0, 2^{-n}) \times \cdots \times [0, 2^{-n})$$

نلاحظ أن  $K_0$  هي الاتحاد إزاحات غير متصلة عددها  $2^{np}$  للمكعب  $K_n$  ؛ إذن

$$\gamma(K_n) = 1/2^{np} = c(K_n) \text{ ومنها } 1 = \gamma(K_0) = 2^{np} \gamma(K_n)$$

نفرض أن  $A, B$  تنتميان إلى  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$  ونفرض أن  $A \subseteq B$  . حينئذ يمكننا أن

نكتب  $B = A \cup (B \setminus A)$  بما أن  $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$  ، فينتج من (i), (ii) أن

$$\gamma(B) = \gamma(A) + \gamma(B \setminus A) \geq \gamma(A)$$

ومن ثم تكون  $\gamma$  مطردة بمعنى أنه إذا كانت  $A \subseteq B$  فإن  $\gamma(A) \leq \gamma(B)$  . نفرض الآن

$A \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$  بما أن  $A$  محدودة ، حينئذ ليعض  $M \in \mathbb{N}$  ، تكون الفتة  $A$  محتوية في

داخل مكعب مطلق  $I$  طول نصف ضلعه هو  $2^M$  ومركزه عند 0 . إذا كانت  $\varepsilon > 0$  ،

فيوجد تقسيم للمكعب  $I$  إلى مكعبات صغيرة طول ضلع كل منها  $2^{-n}$  ، مثلاً ، بحيث يكون

محتوى الاتحاد لكل المكعبات  $I_1, \dots, I_r$  المحتوية في  $A$  تزيد عن  $\varepsilon - c(A)$  ، وبحيث

إن محتوى كل الخلايا  $I_1, \dots, I_r$  ( $r \leq s$ ) التي تحتوى نقطاً من  $A$  لا تزيد عن  $c(A) + \varepsilon$  (انظر تمرين ٤٤ - ط) . الآن كل من هذه الفئات  $I$  تختلف عن إزاحة  $x_i + K_n$  بفترة محتوى صفر . حينئذ نحصل على

$$c(A) - \varepsilon \leq c\left(\bigcup_{i=1}^r (x_i + K_n)\right) \leq c(A) \leq c\left(\bigcup_{i=1}^s (x_i + K_n)\right) \leq c(A) + \varepsilon$$

الآن كل من  $\gamma$  و  $c$  لا يتغيران تحت إزاحة الفترة وتتفق مع  $K_n$  . وبالإضافة إلى ذلك  $\gamma$  و  $c$  هما قابلتان للجمع تحت اتحادات محدودة غير متصلة . حينئذ ينتج أن

$$\begin{aligned} c\left(\bigcup_{i=1}^r (x_i + K_n)\right) &= \sum_{i=1}^r c(x_i + K_n) = \sum_{i=1}^r \gamma(x_i + K_n) \\ &= \gamma\left(\bigcup_{i=1}^r (x_i + K_n)\right) \end{aligned}$$

يلتج من هذا وحقيقة كون  $\gamma$  مطردة أن

$$c(A) - \varepsilon \leq \gamma\left(\bigcup_{i=1}^r (x_i + K_n)\right) \leq \gamma(A) \leq \gamma\left(\bigcup_{i=1}^s (x_i + K_n)\right) \leq c(A) + \varepsilon$$

ومنها  $|\gamma(A) - c(A)| \leq \varepsilon$  . بما أن  $\varepsilon > 0$  اختيارية ، فنستنتج أن  $\gamma(A) = c(A)$  . وهو المطلوب إثباته

٤٤ - v نتيجة . نفرض أن  $\mu: \mathcal{D}(\mathbb{R}^p) \rightarrow \mathbb{R}$  هي دالة تحقق الخواص (i) و (ii) و (iii) حينئذ يوجد مقدار ثابت  $m \geq 0$  بحيث إن  $\mu(A) = mc(A)$  لكل  $A \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$

البرهان . بما أن  $\mu$  تحقق الخاصيتين (i) و (ii) ، فن السهل ملاحظة أن  $\mu$  مطردة بمعنى أن  $A \subseteq B$  تضمن أن  $\mu(A) \leq \mu(B)$  . إذا كانت  $\mu(K_0) = 0$  ، فإن  $\mu$  لى فئة محدودة هي صفر ، ومن ثم ينتج أن  $\mu(A) = 0$  لكل  $A \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$  ، لذلك يمكننا أخذ  $m = 0$  . إذا كانت  $\mu(K_0) \neq 0$  ، نفرض أن

$$\gamma(A) = \frac{1}{\mu(K_0)} \mu(A) \quad \text{for all } A \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$$

بما أننا رأينا حالاً أن  $\gamma$  لها الخواص (iv) و (iii) و (ii) و (i) المذكورة في النظرية ، فينتج أن  $\gamma = c$  . وإذن نأخذ  $m = \mu(K_0)$  وهو المطلوب إثباته

## خواص إضافية للتكامل :

سنعطى الآن بعض خواص إضافية للتكامل مفيدة غالباً .

٤٤-٨ نظرية . نفرض أن  $A \in \mathcal{D}(R^p)$  ونفرض أن  $f: A \rightarrow R$  محدودة ومتصلة في  $A$  . حينئذ تكون  $f$  قابلة للتكامل على  $A$  .

البرهان . نفرض أن  $I$  خلية مغلقة حيث  $A \subseteq I$  ونفرض أن  $f: I \rightarrow R$  تساوى الدالة  $f$  على  $A$  وتساوى صفراً على  $I \setminus A$  . بما أن  $f$  محدودة في  $I$  ومتصلة على  $I \setminus b(A)$  فينتج من نظرية القابلية للتكامل (٤٣-٩) أن  $f$  تكون قابلة للتكامل في  $I$  . لذلك تكون  $f$  قابلة للتكامل على  $A$  . وهو المطلوب إثباته .

سنوضح الآن أن التكامل يقبل الجمع بالنسبة إلى الفئة التي يكون التكامل مأخوذاً عليها .

٤٤-٩ نظرية . (أ) نفرض أن  $A_1$  و  $A_2$  تنتمي إلى  $\mathcal{D}(R^p)$  ونفرض أن  $A_1 \cap A_2$  لها محتوى صفر . إذا كانت  $A = A_1 \cup A_2$  وإذا كانت  $f: A \rightarrow R$  قابلة للتكامل على  $A_1$  و  $A_2$  فإن  $f$  قابلة للتكامل على  $A$  وأن

$$(44.1) \quad \int_A f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f$$

(ب) نفرض أن  $A$  تنتمي إلى  $\mathcal{D}(R^p)$  ونفرض أن  $A_1, A_2 \in \mathcal{D}(R^p)$  بحيث إن  $A = A_1 \cup A_2$  وبعيد أن  $A_1 \cap A_2$  لها محتوى صفر . إذا كانت  $f: A \rightarrow R$  قابلة للتكامل على  $A$  ، وإذا كانت تقييدات الدالة  $f$  على  $A_1$  و  $A_2$  قابلة للتكامل ، فإن (٤٤-١) تظل صحيحة .

البرهان . (أ) نفرض أن  $I$  خلية مغلقة محتوية على  $A = A_1 \cup A_2$  ونفرض أن  $f_i: I \rightarrow R, i = 1, 2$  تساوى  $f$  في  $A_i$  وتساوى صفراً في أى مكان آخر في  $I$  . من الفرض  $f_1$  و  $f_2$  قابليتان للتكامل على  $I$  وأن

$$\int_I f_i = \int_{A_i} f, \quad i = 1, 2$$

يفتج من نظرية ٤٣-٥ أن  $f_1 + f_2$  قابلة للتكامل على  $I$  وأن

$$\int_I (f_1 + f_2) = \int_I f_1 + \int_I f_2$$

بما أن  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$  بشرط أن  $x \in A \setminus (A_1 \cap A_2)$  ، فينتج الآن من مفروض ٤٣-٨ أن  $f$  قابلة للتكامل على  $A$  وأن (٤٤-١) تظل صحيحة .

(ب) نحفظ برموز البرهان في (أ) . من الفرض ،  $f_i$  قابلة للتكامل على  $I$  . تكون

الآن  $f_I(x) = f_1(x) + f_2(x)$  ماعدا عند  $x$  في  $A_1 \cap A_2$  ، فئة بمحتوى صفر .  
لذلك ينتج من نظرية ٤٣ - ٥ ومفترض ٨ - ٨ أن

$$\begin{aligned}\int_A f &= \int_I f = \int_I (f_1 + f_2) = \int_I f_1 + \int_I f_2 \\ &= \int_{A_1} f + \int_{A_2} f\end{aligned}$$

وهو المطلوب إثباته

نلاحظ أنه إذا كانت  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  دالة محدودة قابلة للتكامل ، حينئذ يتحقق  
الفرض الموجود في ٤٤ - ٩ (ب) الذي يقول إن تقييد الدالة  $f$  إلى  $A_1$  و  $A_2$  قابلتان  
للتكامل تكون أوتوماتيكياً ( انظر تمرين ٤٤ - ٥ ) .  
النتيجة القادمة مفيدة غالباً لحساب قيمة التكامل .

٤٤ - ١٠ نظرية . نفرض أن  $A \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$  ونفرض أن  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  قابلة  
للتكامل على  $A$  وبحيث إن  $|f(x)| \leq M$  لكل  $x \in A$  . حينئذ

$$(44.2) \quad \left| \int_A f \right| \leq Mc(A)$$

وبصورة أعم ، إذا كانت  $f$  حقيقية القيمة وكانت  $m \leq f(x) \leq M$  لكل  $x \in A$  ، فإن  
(44.3) 
$$mc(A) \leq \int_A f \leq Mc(A)$$

البرهان . نفرض أن  $f_i$  امتداد الدالة  $f$  لخلية مغلقة  $I$  تحتوى  $A$  . إذا كانت  
 $\varepsilon > 0$  مطاة ، فإنه يوجد تقسيم  $P_\varepsilon = \{J_1, \dots, J_n\}$  للخلية  $I$  بحيث إنه إذا كانت  
 $S(P_\varepsilon; f_i)$  هي أى حاصل جمع ريمان المناظر ، فإن

$$S(P_\varepsilon; f_i) - \varepsilon \leq \int_I f_i \leq S(P_\varepsilon; f) + \varepsilon$$

نلاحظ أنه إذا اخترت النقط الوسطى لحاصل جمع ريمان خارج  $A$  كلما كان ذلك ممكناً ،  
فنجده أن

$$S(P_\varepsilon; f) = \sum' f(x_i) c(J_i)$$

حيث يؤخذ حاصل الجمع على هذه الخلايا في  $P_\varepsilon$  المحتوية كلية في  $A$  . ومن ثم

$$S(P_\varepsilon; f) \leq M \sum' c(J_k) \leq Mc(A)$$

لذلك نجد أن



$$\int_A f = \int_I f_i \leq Mc(A) + \varepsilon$$

وبما أن  $\varepsilon > 0$  اختيارية فنحصل على الطرف الأيمن من المتباينة ( ٤٤ - ٣ ) . يثبت الطرف الأيسر بطريقة مماثلة . وهو المطلوب إثباته .

كنتيجة لهذه النتيجة ، نحصل على النظرية الآتية ، التي هي امتداد للنظرية الأولى للقيمة المتوسطة ٣٠ - ٦ .

٤٤ - ١١ نظرية قيمة متوسطة . نفرض أن  $A \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$  فئة متصلة ونفرض أن  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  محدودة ومتصلة على  $A$  . حينئذ توجد نقطة  $p \in A$  بحيث إن

$$(44.4) \quad \int_A f = f(p)c(A)$$

البرهان . إذا كانت  $c(A) = 0$  ، فالاستنتاج بسيط ، لذلك نفرض أن  $c(A) \neq 0$  . نفرض أن

$$m = \inf \{f(x) : x \in A\}, \quad M = \sup \{f(x) : x \in A\}$$

فينتج من الجزء الثاني من النظرية السابقة أن

$$(44.5) \quad m \leq \frac{1}{c(A)} \int_A f \leq M$$

إذا كانت كل من المتباينتين الموجودتين في ( ٤٤ - ٥ ) دقيقتين ، وتنتج النتيجة من نظرية القيمة الوسطى لبولزانو ٢٢ - ٤ .

نفرض الآن أن  $\int_A f = Mc(A)$  . إذا كان حصلنا على النهاية الأعلى  $M$  عند  $p \in A$  ، فينتج المطلوب أيضاً . لذلك نفرض أن النهاية الأعلى  $M$  ليست عند  $A$  . بما أن  $c(A) \neq 0$  ، وتوجد خلية مغلقة  $K \subseteq A$  ، بحيث إن  $c(K) \neq 0$  ( انظر تمرين ٤٤ - ز ) بما أن  $K$  مدمجة وأن  $f$  متصلة على  $K$  ، فتوجد  $\varepsilon > 0$  بحيث إن  $f(x) \leq M - \varepsilon$  لكل  $x \in K$  . بما أن  $A = K \cup (A \setminus K)$  فينتج من نظرية ٤٤ - ٩ ، ٤٤ - ١٠ أن

$$\begin{aligned} Mc(A) &= \int_A f = \int_K f + \int_{A \setminus K} f \\ &\leq (M - \varepsilon)c(K) + Mc(A \setminus K) < Mc(A) \end{aligned}$$

هي تقلص . إذا كانت  $\int_A f = mc(A)$  ، فنستخدم مناقشة مماثلة .

وهو المطلوب إثباته

## التكامل تكامل مكرر :

يكون من المرغوب معرفة أنه إذا كانت  $f$  قابلة للتكامل على خلية مغلقة

$$J = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p]$$

في  $R^p$  ولها قيم في  $R$  ، فإن التكامل  $f$  رد يمكن حسابه بدلالة « تكامل متكرر » لطيات  $p$  :

$$\int_{a_p}^{b_p} \left\{ \cdots \left\{ \int_{a_2}^{b_2} \left\{ \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, x_p) dx_1 \right\} dx_2 \right\} \cdots \right\} dx_p$$

هذه الطريقة لحساب التكاملات الثنائية والثلاثية بطريقة التكاملات المتكررة مألوقة للقارىء. من علم حساب التفاضل والتكامل الأول. سنعطى تحقيقاً لهذه الطريقة : للسهولة سنفترض أن  $p=2$  ، لكن من الواضح أن النتيجة صحيحة في حالة أبعد أكثر .

٤٤ - ١٢ نظرية . إذا كانت  $f$  متصلة على خلية مغلقة  $J = [a, b] \times [c, d]$  إلى  $R$  ،

فإن

$$\begin{aligned} \int_J f &= \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy \\ &= \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx \end{aligned}$$

البرهان . لاحظنا في نظرية التبديل ٣١ - ٩ أن التكاملين المكررين متساويان . لتوضيح أن تكامل الدالة  $f$  على  $J$  يكون معطياً بالتكامل المكرر الأول ، نفرض أن  $F$  معرفة عند  $y \in [c, d]$  بأنها

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

نفرض أن  $c = y_0 \leq y_1 \leq \cdots \leq y_r = d$  تقسيم للفترة  $[c, d]$  ، نفرض أن  $a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_s = b$  تقسيم للفترة  $[a, b]$  ، ونفرض أن  $P$  ترمز إلى التقسيم للفترة  $J$  الناتج من استخدام الخلایا  $[x_{k-1}, x_k] \times [y_{l-1}, y_l]$  . نفرض أن  $y_l^*$  هي أى نقطة في  $[y_{l-1}, y_l]$  ولاحظ أن

$$F(y_l^*) = \int_a^b f(x, y_l^*) dx = \sum_{k=1}^s \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x, y_l^*) dx$$

حسب النظرية الأولى للفترة المتوسطة ٣٦ - ٦ ، يوجد لكل  $k$  و  $l$  نقطة  $x_{jk}^*$  في  $[x_{k-1}, x_k]$  بحيث إن

$$F(y_l^*) = \sum_{k=1}^s f(x_{jk}^*, y_l^*)(x_k - x_{k-1})$$

بالضرب في  $(y_j - y_{j-1})$  ثم الجمع نحصل على

$$\sum_{j=1}^r F(y_j^*)(y_j - y_{j-1}) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^s f(x_{jk}^*, y_j^*)(x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1})$$

الآن يكون المقدار الموجود في الطرف الأيسر لهذا القانون هو حاصل جمع ريمان الاختياري للتكامل

$$\int_c^d F(y) dy = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy$$

قد وضعنا أن حاصل جمع ريمان السابق يساوي حاصل جمع ريمان الخصائص والمناظر للتقسيم  $P$ . بما أن  $f$  قابلة للتكامل على  $J$ ، فنحصل على إثبات وجود التكامل المكرر ومساواته بالتكامل على  $J$ .

تعديل بسيط للبرهان المعطى في النظرية السابقة يعطى النص الأقوى قليلاً.

٤٤ - ١٣ نظرية. نفرض أن  $f$  قابلة للتكامل على المستطيل  $J = [a, b] \times [c, d]$  إلى  $\mathbb{R}$  ونفرض أنه، لكل  $y \in [c, d]$ ، تكون للدالة  $f(x, y)$  للفترة  $[a, b]$  إلى  $\mathbb{R}$  متصلة ما عدا إمكانية عتد عدد محدود من نقط، التي عندها يكون لها نهايات طرف واحد. حينئذ

$$\int_J f = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy$$

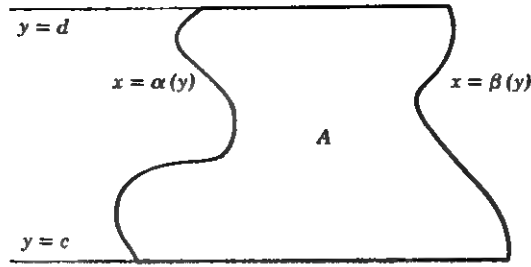
كنتيجة لهذه النظرية، سنحصل على نتيجة تستخدم غالباً لحساب التكاملات لدوال معرفة على فئة محدودة بمنحنيات متصلة. والملائمة، سنقرر النتيجة في الحالة التي فيها تكون للفئة قطع خطوط مستقيمة أفقية كحدود عليا وسفلى لها ومنحنيات متصلة كحدود جانبية. ومن الواضح أن نتيجة مماثلة تظل صحيحة. إذا كانت الحدود الجانبية هي قطع خطوط مستقيمة رأسية وكانت الحدود العليا والسفلى منحنيات. تعامل فئات أكثر تعقيداً بتحليل الفئات إلى الاتحاد لفئات جزئية من هذين النوعين.

٤٤ - ١٤ نظرية. نفرض أن  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  ممطاة كما يلي :

$$A = \{(x, y) : \alpha(y) \leq x \leq \beta(y), c \leq y \leq d\}$$

حيث  $\alpha, \beta$  دالتان متصلتان على  $[c, d]$  بقيم في  $[a, b]$ . إذا كانت  $f$  متصلة على  $A \rightarrow \mathbb{R}$ ، فإن  $f$  قابلة للتكامل على  $A$  وأن

$$\int_A f = \int_c^d \left\{ \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \right\} dy$$



( شكل ٤٤ - ١ )

البرهان . نفرض أن  $J$  خلية مغلقة تحتوي  $A$  ونفرض أن  $f_I$  هي الامتداد للدالة  $f$  إلى  $J$  . يوضح تغيير لمثال ٤٣ - ٢ ( و ) أن حدود الفتة  $A$  لها محتوى صفر ؛ وإذن تكون  $f_I$  قابلة للتكامل على  $J$  . الآن لكل  $y \in [c, d]$  تكون الدالة  $x \mapsto f_I(x, y)$  متصلة ماعدا إمكانية عنده التقطعتين  $\alpha(y)$  و  $\beta(y)$  ، التي عندها يكون لها نهايات طرف واحد . ينتج من النظرية السابقة أن

$$\begin{aligned} \int_A f &= \int_J f_I = \int_c^d \left\{ \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_I(x, y) dx \right\} dy \\ &= \int_c^d \left\{ \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \right\} dy \end{aligned}$$

وهو المطلوب إثباته

### تمارينات :

- ٤٤ - (أ) إذا كانت  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  ، فإن نقطة تكون نقطة حدودية للفتة  $A$  إذا وإذا فقط كانت نقطة حدودية للمكلة  $\mathcal{K}(A)$  للفتة  $A$  . حينئذ  $b(A) = b(\mathcal{K}(A))$  .
- ٤٤ - (ب) نفرض أن  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  ، ونفرض أن  $b(A)$  هي الحدودية للفتة  $A$  .
- (أ) الفتة  $b(A)$  مغلقة في  $\mathbb{R}^p$  .

(ب) الداخل  $A^\circ = A \setminus b(A)$  مفتوح في  $\mathbb{R}^p$  ويحتوي كل فتة مفتوحة  $G$  حيث  $G \subseteq A$

(ج) الإقبال  $A^- = A \cup b(A)$  مغلق في  $\mathbb{R}^p$  ويكون محتوياً في كل فتة مغلقة  $F$  حيث  $A \subseteq F$  .

٤٤ - (ج) نفرض أن  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  ونفرض أن  $A^- = A \cup b(A)$  هو إقبال الفتة  $A$  . وضح أن  $b(A) \subseteq b(A^-)$  . اعط مثالا لتوضح أن التساوي يمكن أن يظل صحيحاً ، ومثالا يوضح أن التساوي يمكن أن يفشل .

٤٤ - (د) نفرض أن  $A, B$  فئتين جزئيتين من  $R^p$ . وضع أن الحدود لكل الفئات

$$A \cap B, \quad A \setminus B, \quad A \cup B$$

يكون محتوياتاً في  $b(A) \cup b(B)$ . (إرشاد:  $b(A) = A^- \cap (\% (A))^-$ ).

٤٤ - (هـ) تكون فئة  $A \subseteq R^p$  مغلقة في  $R^p$  إذا وإذا فقط كانت  $b(A) \subseteq A$

تكون فئة  $B \subseteq R^p$  مفتوحة في  $R^p$  إذا وإذا فقط كان  $B \cap b(B) = \emptyset$

٤٤ - (و) إذا كانت  $A \in \mathcal{D}(R^p)$ ، وضع أن داخلها  $A^0 = A \setminus b(A)$  وإتفاها

$$c(A^0) = c(A) = c(A^-) \quad \text{وأن} \quad \mathcal{D}(R^p) \quad \text{إلى} \quad A^- = A \cup b(A)$$

٤٤ - (ز) إذا كانت  $A \in \mathcal{D}(R^p)$  وكانت  $c(A) > 0$ ، أثبت أنه توجد

خلية مغلقة  $K \subseteq A$  بحيث إن  $c(K) \neq 0$ .

٤٤ - (ح) إذا كانت  $A \subseteq R^p$ ، نعرف المحتوى الداخل والخارجي للفئة  $A$  بأنها

$$c_*(A) = \sup c(U), \quad c^*(A) = \inf c(V),$$

حيث يؤخذ الحد الأعلى على فئة كل للاتحادات المحدودة لخلايا محتوية في  $A$ ، ويؤخذ الحد الأسفل على فئة كل للاتحادات المحدودة لخلايا تحتوى فقط من الفئة  $A$ .

(أ) أثبت أن  $c_*(A) \leq c^*(A)$  وأن  $A$  لها محتوى إذا وإذا فقط كان

$$c_*(A) = c^*(A), \quad \text{في هذه الحالة تكون } c(A) \text{ هي هذه القيمة المشتركة.}$$

(ب) إذا كانت  $A, B$  فئتين جزئيتين غير متصلتين للفراغ  $R^p$ ، وضع أن

$$c^*(A \cup B) \leq c^*(A) + c^*(B)$$

(ج) أعط مثالا لفئتين غير متصلتين  $A, B$  بحيث إن  $c^*(A) = c^*(B) = c^*(A \cup B) \neq 0$

٤٤ - (ط) نفرض أن  $M \in \mathbb{N}$  ونفرض أن  $I_M \subseteq R^p$  هو مكعب بنصف

طوله هو  $2^M$  ومركزه  $0$ . عند  $n \in \mathbb{N}$  نقسم  $I_M$  إلى شبكة  $G_{M,n}$  طولها  $2^{-n}$

المكون بمجموعة كل المكعبات في  $I_M$  بطول جانبي  $2^{-n}$  وبنقط طرفية قياسية زوجية المقام

(أي إن، نقط طرفيه على الصورة  $k/2^n$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$ )

(أ) إذا كانت  $J \subseteq I_M$  خلية مغلقة وكانت  $\varepsilon > 0$ ، وضع أنه يوجد  $n \in \mathbb{N}$

بحيث أن الاتحاد لكل المكعبات في  $G_{M,n}$  التي تكون محتوية في  $J$  له محتوى كل يزيد

عن  $\varepsilon - c(J)$  والاتحاد لكل المكعبات في  $G_{M,n}$  التي تحتوى فقط في  $J$  له محتوى

كل أقل من  $\varepsilon + c(J)$ .

(ب) إذا كانت  $A \subseteq I_M$  لها محتوى وكانت  $\varepsilon > 0$ ، وضع أنه توجد  $n \in \mathbb{N}$

بحيث إن الاتحاد لكل المكعبات في  $G_{M,n}$  التي تكون محتوية في  $A$  لها محتوى كل يزيد عن

$c(A) + \varepsilon$  والاتحاد لكل المكعبات في  $G_{M,n}$  الذي يحتوي نقطا في  $A$  له محتوى كل أقل من  $c(A) + \varepsilon$ .

٤٤ - (ى) نفترض أن  $I \subseteq \mathbb{R}^p$  خلية مغلقة ونفرض أن  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  قابلة للتكامل على  $I$ . إذا كانت  $A \subseteq I$  لها محتوى ، فإن تقييد الدالة  $f$  إلى  $A$  يكون قابلا للتكامل على  $A$ . (إرشاد : استخدم تمرين ٤٣ - ع).

٤٤ - (ك) نفرض أن  $A \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$  ونفرض أن  $g$  و  $f$  قابلتان للتكامل على  $A$  وأن  $g(x) \geq 0$  لكل  $x \in A$ . إذا كانت  $m = \inf f(A)$ ,  $M = \sup f(A)$  فإنه يوجد عدد حقيقى  $\mu \in [m, M]$  بحيث إن

$$\int_A fg = \mu \int_A g$$

٤٤ - (ل) إذا فرضنا بالإضافة إلى الفرض الموجود بالتمرين السابق أن  $A$  موصولة وأن  $f$  متصلة على  $A$  ، حينئذ توجد نقطة  $p \in A$  بحيث إن

$$\int_A fg = f(p) \int_A g$$

٤٤ - (م) نفترض أن  $\{(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}\}$  هي سرد النقط في  $(0, 1) \times (0, 1)$  بإحداثيات قياسية لكل  $n \in \mathbb{N}$  ، نفترض أن  $I_n$  خلية مفتوحة في  $(0, 1) \times (0, 1)$  تحتوي على  $(x_n, y_n)$  ونفرض أن  $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ . أثبت أن  $G$  هي فئة مفتوحة في  $\mathbb{R}^2$  حدودها  $b(G)$  هي  $(0, 1) \times (0, 1) \setminus G$  أثبت أنه إذا كانت  $\sum c(I_n) < 1$  ، فإن الفئة المفتوحة  $G$  ليس لها محتوى .

٤٤ (ن) - استخدم المصطلحات العلمية الموجودة في تمرين (٧ - ك) ، نفترض أن  $A \subseteq [0, 1]$  هي فئة « مثل فئة كنتور » طولها  $\frac{1}{2}$ . إذا كانت  $K = A \times [0, 1]$  أن  $K$  هي فئة جزئية مدجة من  $\mathbb{R}^2$  ، وأن  $b(K) = K$  ، وأن  $K$  ليس لها محتوى .

٤٤ - (س) نفترض أن  $a \leq b$  ونفرض أن  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  متصلة وبحيث  $S_f = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$  نفترض أن  $f(x) \geq 0$  لكل  $x \in [a, b]$  تسمى فئة الأحداثى الرأسى للدالة  $f$ . بفحص حدود الفئة  $S_f$  أثبت أن لها محتوى . أثبت أن

$$c(S_f) = \int_a^b \left\{ \int_0^{f(x)} 1 dy \right\} dx = \int_a^b f(x) dx$$

٤٤ - (ع) نفترض أن  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  هي الفئة المذكورة في تمرين (٢٣ - هـ) ونفرض أن  $f$  معرفة على  $Q = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  بأنها  $f(x, y) = 1$  عند  $(x, y) \in A$  وبأن  $f(x, y) = 0$  فيما عدا ذلك. وضح أن  $A$  ليس لها محتوى وأن  $f$  ليست قابلة للتكامل على  $Q$ . لكن ، التكاملات المكررة موجودة وتحقق

$$\int_0^1 \left\{ \int_0^1 f(x, y) dx \right\} dy = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 f(x, y) dy \right\} dx$$

٤٤ - (ف) نفرض أن  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$  ونفرض أن  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$  معرفة بأنها  $f(x, y) = 0$  إذا كانت  $x$  وإما  $y$  غير قياسية وأن  $f(x, y) = 1/n$  إذا كانت  $y$  قياسية وكانت  $x = m/n$  حيث  $n > 0$  و  $m$  هما عدنان صحيحان أوليان نسبياً .  
وضح أن

$$\int_Q f = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 f(x, y) dx \right\} dy = 0$$

لكن  $\int_0^1 f(x, y) dy$  غير موجود لعدد قياسي  $x$  .

٤٤ - (ص) نفرض أن  $J \subseteq \mathbb{R}^2$  خلية مفتوحة تحتوي  $(0, 0)$  ونفرض أن  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  متصلة على  $J$  . عرف  $F: J \rightarrow \mathbb{R}$  بالتكامل المكرر :

$$F(x, y) = \int_0^x \left\{ \int_0^y f(s, t) dt \right\} ds$$

وضح أن  $D_2 D_1 F(x, y) = f(x, y) = D_1 D_2 F(x, y)$  عند  $(x, y) \in J$

٤٤ - (ق) نفرض أن  $J$  هي كما في التمرين السابق ونفرض أن  $G: J \rightarrow \mathbb{R}$  بحيث إن  $D_2 D_1 G$  متصلة على  $J$  . استخدم هذا التمرين لإثبات أن  $D_1 D_2 G$  موجود ويساوي  $D_2 D_1 G$  .

٤٤ - (ر) نفرض أن  $J = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_p, b_p]$  ونفرض أن  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  متصلة . نفرض أن  $J_{(1)} = [a_2, b_2] \times \dots \times [a_p, b_p]$  في  $\mathbb{R}^{p-1}$  ونفرض أن  $F_{(1)}: J_{(1)} \rightarrow \mathbb{R}$  معرف بأنه

$$F_{(1)}(x_2, \dots, x_p) = \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, x_p) dx_1$$

(أ) وضح أن  $F_{(1)}$  متصلة على  $J_{(1)}$  .

(ب) بأخذ  $(x_2^*, \dots, x_p^*)$  في  $J_{(1)}$  وأى تقسيم :

الفترة  $[a_1, b_1]$  ، أثبت أنه توجد نقط

$x_{1,k}^*$  في الفترة  $[x_{1,k-1}, x_{1,k}]$  بحيث إن

$$F_{(1)}(x_2^*, \dots, x_p^*) = \sum_{k=1}^l f(x_{1,k}^*, x_2^*, \dots, x_p^*) (x_{1,k} - x_{1,k-1})$$

(ج) أثبت أن

$$\begin{aligned} \int_{J_{(1)}} F_{(1)}(x_2, \dots, x_p) d(x_2, \dots, x_p) &= \int_{J_{(1)}} \left\{ \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, x_p) dx_1 \right\} d(x_2, \dots, x_p) \\ &= \int_J f(x_1, \dots, x_p) d(x_1, \dots, x_p) \end{aligned}$$

(د) اعمل امتداداً للنتيجة لمقالة التي فيها تكون لكل نقطة  $(x_2, \dots, x_p)$  في  $J_{(1)}$  الدالة  $x_1 \mapsto F(x_1, x_2, \dots, x_p)$  للفترة  $[a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}$  متصلة ما عدا إمكانية عند عدد محدود من نقط التي عندها لها نهايات طرف واحد .

٤٤ - (ش) (أ) نفرض أن  $\alpha, \beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  متصلة حيث  $\alpha(x) \leq \beta(x)$  لكل  $x \in [a, b]$  . وضح أن الفئة

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

مدجة في  $\mathbb{R}^2$  بمحتوى .

(ب) نفرض الآن أن  $\gamma, \delta: B \rightarrow \mathbb{R}$  دالتان متصلتان حيث  $\gamma(x, y) \leq \delta(x, y)$  لكل  $(x, y) \in B$  . أثبت أن الفئة

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B, \gamma(x, y) \leq z \leq \delta(x, y)\}$$

مدجة في  $\mathbb{R}^3$  بمحتوى .

(ج) إذا كانت  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  متصلة ، أثبت أن  $f$  قابلة للتكامل على  $D$  وأن

$$\int_D f = \int_a^b \left\{ \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \left\{ \int_{\gamma(x, y)}^{\delta(x, y)} f(x, y, z) dz \right\} dy \right\} dx$$

٤٤ - (ت) نفرض أن  $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_p, b_p]$  ولكل  $j = 1, \dots, p$  نفرض أن  $f_j: [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{R}$  هي دالة قابلة للتكامل .

إذا كانت  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  معرفة بأنها  $\varphi(x_1, \dots, x_p) = f_1(x_1) \dots f_p(x_p)$  أثبت أن  $\varphi$  قابلة للتكامل على  $I$  وأن

$$\int_I \varphi = \left\{ \int_{a_1}^{b_1} f_1 \right\} \dots \left\{ \int_{a_p}^{b_p} f_p \right\}$$

٤٤ - (ث) استخدم نظرية تقريب فير اشتراش لتوضح أنه إذا كانت

$$I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_p, b_p] \text{ وإذا كانت } g: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ متصلة ، فإن}$$

$$\int_I g = \int_{a_1}^{b_1} \left\{ \int_{a_2}^{b_2} \dots \left\{ \int_{a_p}^{b_p} g(x_1, x_2, \dots, x_p) dx_p \right\} \dots dx_2 \right\} dx_1$$

٤٤ - (خ) نفرض أن  $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  حيث  $\varphi(0) = 0$  متصلة ، غير محدودة ، وتزايدية بدقة ، ونفرض أن  $\psi$  هي دالتها العكسية . حيث  $\psi$  تكون  $\psi$  أيضاً متصلة وتزايدية بدقة على  $[0, +\infty)$  .

(أ) إذا كانت  $\alpha, \beta$  عددين موجبين ، قارن المساحة للفترة  $[0, \alpha] \times [0, \beta]$  بالمساحة المحصورة بين محور الاحداثيات ومنحنى  $\varphi$  لنحصل على متباينة ينيج :



$$\alpha\beta \leq \int_0^\infty \varphi + \int_0^p \psi$$

(ب) إذا كانت  $q \geq 1$  و  $p \geq 1$  بحيث إن  $(1/p) + (1/q) = 1$  وإذا كانت  $\varphi(x) = x^{p/q}$  وكانت  $\psi(y) = y^{q/p}$  ، استخدم متباينة ينج لإثبات المتباينة

$$\alpha\beta \leq \alpha^p/p + \beta^q/q$$

(ج) إذا كانت  $a_i, b_i, i=1, \dots, n$  أعداداً حقيقية وإذا كانت  $A = (|a_1|^p + \dots + |a_n|^p)^{1/p}$  ،  $B = (|b_1|^q + \dots + |b_n|^q)^{1/q}$  استخدم المتباينة السابقة لاشتقاق متباينة هولدر

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq AB$$

التي حصلنا عليها في مشروع (٨ - ب) .

### مشروعات :

٤٤ -  $\alpha$  نفرض أن  $I \subseteq \mathbb{R}^p$  خلية مغلقة ونفرض أن  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  محدودة . عند  $\alpha > 0$  نفرض أن  $D_\alpha = \{x \in I : \omega_r(x) \geq \alpha\}$  حيث  $\omega_r(x)$  تدل على تذبذب الدالة  $f$  عند  $x$  ( انظر مشروع ٣٣ ) .

(أ) نفرض أن  $D_\alpha$  لها محتوى صفر . نفرض أن  $P_\alpha = \{I_1, \dots, I_n\}$  تقسيم من  $I$  بحيث إن (i) كل نقطة من  $D_\alpha$  تكون محتوية في داخل إحدى الخلايا  $I_1, \dots, I_n$  ( $r \leq n$ ) ، (ii)  $c(I_1) + \dots + c(I_n) \leq \alpha/2 \|f\|_1$  ، (iii) إذا كانت  $x, y \in K_j$  عند  $j=r+1, \dots, n$  فإن  $|f(x) - f(y)| < \alpha$  . إذا كانت  $p$  تكريراً من  $P_\alpha$  أثبت أن  $|S(P; f) - S(P_\alpha; f)| \leq \alpha(c(I) + 1)$

(ب) استنتج أنه إذا كانت  $D_\alpha$  لها محتوى صفر لكل  $\alpha > 0$  ، فإن  $f$  قابلة للتكامل على  $I$  .

(ج) نفرض أنه عند قيمة ما  $\alpha > 0$  ، يكون المحتوى الخارجى  $c^*(D_\alpha) > 0$  . وضع أنه عند تقسيم ما  $P = \{J_1, \dots, J_n\}$  من  $I$  نجد أن

$$\sum_{i=1}^n (M_i - m_i) c(J_i) \geq \alpha c^*(D_\alpha)$$

استنتج أن  $f$  ليست قابلة للتكامل على  $I$  .

(د) استنتج أن  $f$  تكون قابلة للتكامل على  $I$  إذا وإذا فقط كان للفتة  $D_\alpha$  محتوى صفر لكل  $\alpha > 0$

(هـ) تذكر أن  $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_{1/n}$  هي فئة النقط التي عندها  $f$  ليست متصلة . أثبت أن لها مقياس صفر ( بمفهوم تمرين ٤٣ - ت ) إذا وإذا فقط كان لكل فئة  $D_{1/n}$  محتوى صفر .  
(و) استنتج أن  $f$  قابلة للتكامل على  $I$  إذا وإذا فقط كان للفئة  $D$  لنقط عدم اتصال لها مقياس صفر . ( هذه النتيجة هي معيار ليبيج لقابلية التكامل ) .

٤٤ -  $\beta$  يدرس هذا المشروع التكاملين العلوى والسفلى ( المذكورين في ٤٣ -  $\alpha$  ) وتكرارهما إذا فرضنا أن  $I \subseteq \mathbb{R}^p$  و  $J \subseteq \mathbb{R}^q$  خليتان مفلقتان ،  $p = r + s$  ، ونفرض أن  $K = I \times J \subseteq \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$  . نفرض أن  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  محدودة .

(أ) لكل  $x \in I$  ، عرف  $g_x: J \rightarrow \mathbb{R}$  بأنها  $g_x(y) = f(x, y)$  عند  $y \in J$  . نفرض أن  $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$  معرفة بأنها التكامل السفلى  $\lambda(x) = L(g_x)$  وأن  $\mu: I \rightarrow \mathbb{R}$  معرفة بأنها التكامل العلوى  $\mu(x) = U(g_x)$  من  $g_x$  . إذا كانت  $R$  أى تقسيم من  $I$  ، وكانت  $S$  أى تقسيم من  $J$  ، وكان  $P = R \times S$  هو التقسيم الناتج من  $K$  ، حينئذ أثبت أن

$$L(P; f) \leq L(R; \lambda) \leq U(R; \lambda) \leq U(R; \mu) \leq U(P; f)$$

(ب) أثبت أن

$$L(f) \leq L(\lambda) \leq U(\lambda) \leq U(f), \quad L(f) \leq L(\mu) \leq U(\mu) \leq U(f)$$

ومن ثم ، إذا كانت  $f$  قابلة للتكامل على  $K$  ، فإن  $\mu$  و  $\lambda$  قابلتان للتكامل على  $I$  وأن

$$\int_K f = \int_I \lambda = \int_I \mu$$

(ج) لكل  $y \in J$  ، عرف  $h_y: I \rightarrow \mathbb{R}$  بأنها  $h_y(x) = f(x, y)$  عند  $x \in I$  . نفرض أن  $\lambda': J \rightarrow \mathbb{R}$  وأن  $\mu': J \rightarrow \mathbb{R}$  معرفة بأنها

$$\lambda'(y) = L(h_y), \quad \mu'(y) = U(h_y)$$

أثبت أنه إذا كانت  $f$  قابلة للتكامل على  $K$  ، فإن  $\mu'$  و  $\lambda'$  قابلتان للتكامل عند  $J$  وأن

$$\int_K f = \int_J \lambda' = \int_J \mu'$$

(د) إذا كانت  $g_x: J \rightarrow \mathbb{R}$  قابلة للتكامل على  $J$  لكل  $x \in I$  ، فإن  $\lambda = \mu$  وأن

$$\int_K f(x, y) d(x, y) = \int_K f = \int_I \left\{ \int_J f(x, y) dy \right\} dx$$

بالمثل ، إذا كانت  $h_y: I \rightarrow \mathbb{R}$  قابلة للتكامل على  $I$  لكل  $y \in J$  فإن

$$\int_K f(x, y) d(x, y) = \int_K f = \int_I \left\{ \int_I f(x, y) dx \right\} dy$$

٤٤ -  $\gamma$  نفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  مفتوحة ونفرض أن  $\mathcal{D}(\Omega)$  مجموعة من كل الفئات  $A \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$  حيث  $A^- \subseteq \Omega$  ستقدم في هذا المشروع مفهوم الدالة القابلة للجمع على  $\mathcal{D}(\Omega)$  « وكثافتها القوية » يقال لدالة  $G: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  إنها قابلة للجمع إذا كانت

$$G(A \cup B) = G(A) + G(B)$$

طالما  $A, B \in \mathcal{D}(\Omega)$  و  $A \cap B = \emptyset$ .

(أ) إذا كانت  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  قابلة للتكامل على كل فئة في  $\mathcal{D}(\Omega)$  وإذا عرفنا  $F: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  بأنها

$$F(A) = \int_A f$$

حينئذ  $F$  تكون قابلة للجمع على  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

(ب) نفرض أن  $G: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  دالة قابلة للجمع ونفرض أن  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . نقول إن  $g$  كثافة قوية للدالة  $G$ ، إذا كان يوجد لكل  $\varepsilon > 0$  وكل فئة  $A \in \mathcal{D}(\Omega)$ ،  $\delta > 0$  بحيث إنه إذا كانت  $K$  مكعباً مغلقاً طول ضلعه أقل من  $\delta$  محتوي في  $\Omega$  وإذا كانت  $x \in A \cap K$ ، فإن

$$\left| \frac{G(K)}{c(K)} - g(x) \right| < \varepsilon$$

(ج) نفرض أن  $\Omega = \mathbb{R}^p$ . وضع أن الدالة المحتوية  $c: \mathcal{D}(\mathbb{R}^p) \rightarrow \mathbb{R}$  لها كثافة قوية محايدة تساوي الواحد الصحيح على  $\mathbb{R}^p$ .

(د) نفرض أن  $\mu: \mathcal{D}(\mathbb{R}^p) \rightarrow \mathbb{R}$  دالة قابلة للجمع موجبة التي لا تتغير تحت نقل الفئات [أي أن  $\mu(x+A) = \mu(A)$  لكل  $x \in \mathbb{R}^p$ ,  $A \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$ ]. أثبت أن  $\mu$  لها كثافة قوية ثابتة على  $\mathbb{R}^p$ .

(هـ) إذا كانت  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  متصلة وإذا كانت  $F$  معرفة كما في (أ)، أن  $F$  لها كثافة قوية  $f$  على  $\Omega$ .

(و) إذا كانت  $G: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  قابلة للجمع ولها كثافة قوية  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  وضع أن  $g$  متصلة على  $\Omega$ . ومن ثم تكون  $g$  متصلة بانتظام على كل  $A \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

(ز) نفرض أن  $G: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  قابلة للجمع ولها كثافة قوية تساوي صفراً تطابقياً على  $\Omega$ . وضع أنه إذا كانت  $K$  مكعباً مغلقاً وإذا كانت  $\varepsilon > 0$ ، فإنه يوجد تقسيم للمكعب  $K$  إلى مكعبات  $\{K_1, \dots, K_r\}$  بحيث إن  $|G(K_i)| \leq \varepsilon c(K_i)$  عند  $r = 1, \dots, r$

وإذن ينتج أن  $|G(K)| \leq \varepsilon c(K)$  . استنتج أن  $G(K) = 0$  لكل مكعبات مغلقة  $K \subset \Omega$  .  
 (ج) نفرض أن  $F_1$  و  $F_2$  دالتان قابلتان للجمع على  $\mathcal{D}(\Omega)$  بحيث إنه لكل قيمة ما  
 $M > 0$  نجد أن  $|F_1(A)| \leq Mc(A)$  لكل  $A \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,  $j = 1, 2$ .  
 إذا كانت  $F_1(K) = F_2(K)$  لكل مكعب  $K \subseteq \Omega$  ، أثبت أن  $F_1(A) = F_2(A)$  لكل  
 $A \in \mathcal{D}(\Omega)$

## الباب الخامس والأربعون — تحويلات لفئات وتكاملات :

لاحظنا في باب ٤٣ أن الرواسم المتصلة على فترة في  $\mathbb{R}$  يمكن أن تنطى مكعباً مغلقاً في  $\mathbb{R}^2$  . سنوضح أن هذه الظاهرة لا يمكن أن تحدث إذا كان الراسم في صنف  $C^1$  وسوف ندرس الراسم لفئات بمحتوى تحت  $C^1$  رواسم حال الراسم خطى مهمة بوجه خاص . والنتيجة بسيطة بدرجة كافية . في الحالة الراسم غير الخطى ، سيتضح أن جاكوبيان الراسم يدل على درجة التواء التحويل .

سنستخدم هذه النتائج لإثبات نظرية تتعلق « بتغيير المتغير » لتكامل على فئة في  $\mathbb{R}^p$  .  
 نفحص الحالات الخاصة للاحداثيات القطبية والكروية باختصار ، ونعطى نظرية أقوى تستخدم لتحويلات كثيرة تعرض كمية رقيقة من الإفرادات .

٤٥-١ مفترض . الفئة  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  مفتوحة ونفرض أن  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  تنتمي إلى صنف  $C^1(\Omega)$  . نفرض أن  $A$  فئة محدودة حيث  $A^- \subseteq \Omega$  . حينئذ توجد فئة مفتوحة  $\Omega_1$  حيث  $\Omega_1^- \subseteq \Omega_1 \subseteq \Omega_1^- \subseteq \Omega$  ومقدار ثابت  $M > 0$  بحيث إنه إذا كانت  $A$  محتوية في الاتحاد لعدد محدود من مكعبات مغلقة في  $\Omega_1$  بمحتوى كل  $\alpha$  ، على الأكثر ، فإن  $\varphi(A)$  تكون محتواة في الاتحاد لعدد محدود من مكعبات مغلقة بمحتوى كل  $(\sqrt{p}M)^p \alpha$  على الأكثر .

البرهان . إذا كانت  $\Omega = \mathbb{R}^p$  ، نفرض أن  $\delta = 1$  ؛ وإلا نفرض أن  $\delta = \frac{1}{2} \inf \{ \|a - x\| , a \in A , x \notin \Omega \}$  .  
 (لماذا ؟) الآن نفرض أن  $\Omega_1 = \{ y \in \mathbb{R}^p : \|y - a\| < \delta \}$  عند بعض  $a \in A$  أى إن  $\Omega_1$  تكون مفتوحة ومحدودة وأن  $A^- \subseteq \Omega_1$  ، وبما أن  $\Omega_1^- \subseteq \Omega$  ،  $\varphi \in C^1(\Omega)$  ، مدجة ،  
 فينتج أن  $M = \sup \{ \|D\varphi(x)\|_{op} : x \in \Omega_1 \}$  محدودة . إذا كانت  $A \subseteq I_1 \cup \dots \cup I_n$  ، حيث  $I_j$  هي مكعبات مغلقة محتواة في  $\Omega_1$  ، حينئذ ينتج من نتيجة ٤٥-١ أنه عند  
 يكون  $x, y \in I_j$

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq M \|x - y\|$$

نفرض أن طول الضلع للمكعب  $I_j$  هو  $2r_j$  ونأخذ  $x$  مركزاً للمكعب  $I_j$  ؛ حينئذ إذا كانت  $y \in I_j$  ، فإن  $\|x - y\| \leq \sqrt{p} r_j$  وكذلك  $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| < \sqrt{p} M r_j$  أى إن  $\varphi(I_j)$  تكون محتواة في مكعب مطلق طول ضلعه  $2\sqrt{p} M r_j$  . ومن ثم ينتج أن  $\varphi(A)$  تكون محتواة في الاتحاد لعدد محدود لمكعبات متعلقة بمحتوى كلى  $(\sqrt{p} M)^p \alpha$  على الأكثر .

٤٥ - ٢ نظرية . إذا كانت  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  مفتوحة ونفرض أن  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  تنتمي إلى صنف  $C^1(\Omega)$  إذا كانت  $A \subseteq \Omega$  لها محتوى صفر وإذا كانت  $A^- \subseteq \Omega$  ، حينئذ  $\varphi(A)$  لها محتوى صفر .

البرهان : استخدم المفترض عند  $\alpha > 0$  اختيارية . وهو المطلوب إثباته

٤٥ - ٣ نتيجة . نفرض أن  $r < p$  ونفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^r$  مفتوحة ونفرض أن  $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  تنتمي إلى صنف  $C^1(\Omega)$  . إذا كانت  $A \subseteq \Omega$  فئة محدودة حيث  $A^- \subseteq \Omega$  ، حينئذ  $\psi(A)$  لها محتوى صفر في  $\mathbb{R}^p$  .

البرهان . نفرض أن  $\Omega_0 = \Omega \times \mathbb{R}^{p-r}$  بحيث أن  $\Omega_0$  مفتوحة في  $\mathbb{R}^p$  ، وعرف  $\varphi: \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^p$  بأنها

$$\varphi(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_p) = \psi(x_1, \dots, x_r)$$

وضح أن  $\varphi \in C^1(\Omega_0)$  . نفرض  $A_0 = A \times \{0, \dots, 0\}$  بحيث إن  $A_0^- \subseteq \Omega_0$  وأن  $A_0$  لها محتوى صفر في  $\mathbb{R}^p$  . ينتج أن  $\psi(A) = \varphi(A_0)$  لها محتوى صفر في  $\mathbb{R}^p$  . وهو المطلوب إثباته

نلاحظ أن هذه النتيجة تؤكد أن الصورة  $C^1$  لأى فئة محدودة « أقل بعمدية أى لها أبعاد أقل » لها محتوى صفر

بما أن الحدود لفئة  $A$  بمحتوى لها محتوى صفر ، فينتج من نظرية (٤٥ - ٢) أنه إذا كانت  $\varphi$  في الصنف  $C^1$  فإن  $\varphi(b(A))$  لها محتوى صفر . لسوء الحظ  $\varphi(b(A))$  تحتاج إلى علاقة بسيطة ، بوجه عام ، مع  $b(\varphi(A))$  . هذه الملاحظة تحسن الاهتمام بالنتيجتين الآتيتين .

٤٥ - ٤ نظرية . نفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  مفتوحة ونفرض أن  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  تنتمي إلى صنف  $C^1(\Omega)$  نفرض أن  $A$  لها محتوى صفر ، وأن  $A^- \subseteq \Omega$  ، وأن  $J_\varphi(x) \neq 0$  لكل  $x \in A^0$  . حينئذ  $\varphi(A)$  لها محتوى صفر .

البرهان . بما أن  $A^-$  مدمجة وأن  $\varphi$  متصلة ، حينئذ  $\varphi(A) \subseteq \varphi(A^-)$  تكون محدودة لإثبات أن  $\varphi(A)$  لها محتوى سنوضح أن  $b(\varphi(A)) \subseteq \varphi(b(A))$  وأن  $\varphi(b(A))$  لها محتوى صفر .

بما أن  $\varphi(A^-)$  مدمجة ، فنجد أن  $b(\varphi(A)) \subset \varphi(A) = \varphi(A^0 \cup b(A))$  . حينئذ ،  
 إذ كانت  $y \in b(\varphi(A))$  ، فإنه يوجد  $x \in A^0 \cup b(A)$  بحيث إن  $y = \varphi(x)$  . إذا كانت  
 $x \in A^0$  ، فإن  $J_\varphi(x) \neq 0$  وينتج من نظرية الراسم فوق (٤١ - ٦) أن  $y = \varphi(x)$   
 هي نقطة داخلية من  $\varphi(A^0) \subset \varphi(A)$  . لكن هذا يخالف الفرض بأن  $y \in b(\varphi(A))$  .  
 لذلك نستنتج أن  $b(\varphi(A)) \subseteq \varphi(b(A))$

الآن ، بما أن  $A$  لها محتوى ، فإن حدودها  $b(A) \subseteq \Omega$  فئة خالية بمحتوى صفر ،  
 وإذن ينتج من نظرية (٤٥ - ٢) أن  $\varphi(b(A))$  لها محتوى صفر .  
 وهو المطلوب إثباته .

٤٥ - ٥ نتيجة . نفرض  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  مفتوحة ، ونفرض أن  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  تنتمي  
 إلى صنف  $C^1(\Omega)$  وإدخالية في  $\Omega$  . إذا كانت  $A$  لها محتوى ،  $A^- \subseteq \Omega$  ، وكانت  
 $J_\varphi(x) \neq 0$  عند  $x \in A^0$  ، حينئذ  $b(\varphi(A)) = \varphi(b(A))$  .

البرهان . يكفي أن نوضح أن  $b(\varphi(A)) \subseteq \varphi(b(A))$  ، لأن النتيجة العكسية قد أثبتت  
 أثناء برهان النظرية . نفرض أن  $x \in b(A)$  . أي إنه توجد متتابة  $(x_n)$  في  $A$  ومتتابة  
 $(y_n)$  في  $\Omega \setminus A$  ، كل منهما يقترب من  $x$  . بما أن  $\varphi$  متصلة ، فإن  $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x)$   
 وأن  $\varphi(y_n) \rightarrow \varphi(x)$  . بما أن  $\varphi$  إدخالية على  $\Omega$  ، فإن  $\varphi(y_n) \notin \varphi(A)$  ومن ثم  
 $\varphi(x) \in b(\varphi(A))$  . لذلك  $b(\varphi(A)) \subseteq \varphi(b(A))$

## تحويلات برواسم خطية :

سنوضح الآن أن الفئات بمحتوى ترسم براسم خطي في الفراغ  $\mathbb{R}^p$  إلى الفئات محتواها  
 هو مضاعف ثابت للمحتوى الأصل . فبالإضافة إلى ذلك ، هذا المضاعف هو القيمة المطلقة للمحدد  
 المناظر للبراسم الخطي . ( في هذه النظرية سوف نفترض أن المداخل وخواص أولية لمحدد البراسم  
 خطي في  $\mathbb{R}^p$  مألوقة للقارئ ) .

٤٥ - ٦ نظرية . نفرض أن  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$  . إذا كانت  $A \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$  ، فإن  
 $c(L(A)) = |\det L| c(A)$  .

البرهان . إذا كانت  $L$  فريدة ( شاذة أي إنه ، إذا كانت  $\det L = 0$  ) فإن  $L$   
 ترسم  $\mathbb{R}^p$  إلى فراغ جزئي خطي صحيح من الفراغ  $\mathbb{R}^p$  . بما أن هذا الفراغ الجزئي يمكن أيضاً  
 الحصول عليه كصورة لمقدار ما  $L': \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^p$  حيث  $r < p$  ، فينتج من نتيجة (٤٥ - ٣)  
 أن  $c(L(A)) = 0$  لكل  $A \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$  . ومن ثم تكون النظرية صحيحة لبرواسم خطية  
 فريدة ( شاذة )

إذا كان  $L$  ليس فريداً (أى إنه ، إذا كانت  $L \neq 0$  ، حينئذ تدل نظرية (٤-٤٥) على أنه إذا كانت  $A \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$  ، فإن  $L(A) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$  نعرف الآن  $\lambda: \mathcal{D}(\mathbb{R}^p) \rightarrow \mathbb{R}$  بأنها  $\lambda(A) = c(L(A))$  . (i) من الواضح أن  $\lambda(A) \geq 0$  لجميع  $A \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$  (ii) نفرض أن  $A, B \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$  وأن  $A \cap B = \emptyset$  حينئذ

$$\lambda(A \cup B) = c(L(A \cup B)) = c(L(A) \cup L(B))$$

بما أن  $L$  راسم إدخالى ، إذن  $L(A) \cap L(B) = \emptyset$  ومن ثم

$$c(L(A) \cup L(B)) = c(L(A)) + c(L(B)) = \lambda(A) + \lambda(B)$$

(iii) إذا فرضنا أن  $x \in \mathbb{R}^p$  وأن  $A \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$  ؛ فإن

$$\lambda(x + A) = c(L(x + A)) = c(L(x) + L(A)) = c(L(A)) = \lambda(A)$$

لذلك ينتج من نتيجة (٤-٤٦) أنه يوجد مقدار ثابت  $m_L \geq 0$  بحيث إن :

$$\lambda(A) = m_L c(A) \text{ لكل } A \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$$

نبحث بعد ذلك كيفية توقف  $m_L$  على  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$  . نفرض أن  $M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$  ليست فريدة ، حينئذ إذا كانت  $A \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$  ، نجد أن

$$\begin{aligned} m_{L \circ M} c(A) &= c(L \circ M(A)) = c(L(M(A))) \\ &= m_L c(M(A)) = m_L m_M c(A) \end{aligned}$$

ومن ثم يكون  $m_{L \circ M} = m_L m_M$  لجميع  $M, L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$  غير الفريدة

يتبقى أن نوضح أن  $m_L = |\det L|$  لإجراء هذا سوف نستعمل الحقيقة من الجبر الخطى التى تقول إن كل غير فريدة  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$  هى تركيب رواسم خطية على الصور الثلاث الآتية :

$$L_1(x_1, \dots, x_p) = (\alpha x_1, x_2, \dots, x_p) \text{ for some } \alpha \neq 0 \quad (\text{أ})$$

$$L_2(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_p) \quad (\text{ب})$$

$$L_3(x_1, \dots, x_p) = (x_1 + x_2, x_2, \dots, x_p) \quad (\text{ج})$$

لاحظ أنه إذا كانت  $K_0$  هى المكعب النصف مفتوح  $[0, 1) \times \dots \times [0, 1)$  فى الفراغ  $\mathbb{R}^p$  وإذا كانت  $\alpha > 0$  ، فإن  $L_1(K_0) = [0, \alpha) \times [0, 1) \times \dots \times [0, 1)$  ومن ثم ينتج أن

$$\alpha = c(L_1(K_0)) = m_{L_1} c(K_0) = m_{L_1}$$

بالمثل ، إذا كانت  $\alpha < 0$  ، فإن  $L_1(K_0) = (\alpha, 0] \times [0, 1) \times \dots \times [0, 1)$  وأن

$$-\alpha = c(L_1(K_0)) = m_{L_1} c(K_0) = m_{L_1}$$

ومن ثم ، في أى حالة نجد أن  $m_{L_1} = |\alpha| = |\det L_1|$

بما أن  $L_2(K_0) = K_0$  ، فينتج أن  $m_{L_2} = 1 = |\det L_2|$

أخيراً ، نفرض أن  $\Delta_1$  و  $\Delta_2$  هما الفتتان

$$\Delta_1 = \{(x_1, \dots, x_p) : 0 \leq x_i < 1, x_1 < x_2\}$$

$$\Delta_2 = \{(x_1, \dots, x_p) : 0 \leq x_i < 1, x_2 \leq x_1\}$$

من الواضح أن  $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$  و  $K_0 = \Delta_1 \cup \Delta_2$  . بما أنه يمكن ملاحظة أن

$$L_3(K_0) = \Delta_2 \cup \{(1, 0, \dots, 0) + \Delta_1\}$$

فينتج أن

$$\begin{aligned} c(L_3(K_0)) &= c(\Delta_2) + c((1, 0, \dots, 0) + \Delta_1) = c(\Delta_2) + c(\Delta_1) \\ &= c(\Delta_1 \cup \Delta_2) = c(K_0) \end{aligned}$$

ومن ثم  $m_{L_3} = 1 = |\det L_3|$

نفرض الآن أن الراسم الخطي غير الشاذ (الفريد)  $L$  هو تركيب الرواسم الخطية  $L_1, L_2, \dots, L_r$  له إحدى الصور الثلاث السابقة . بما أن

$$\begin{aligned} m_L &= m_{L_1 \circ L_2 \circ \dots \circ L_r} = m_{L_1} m_{L_2} \dots m_{L_r} \\ &= |\det L_1| |\det L_2| \dots |\det L_r| \\ &= |(\det L_1)(\det L_2) \dots (\det L_r)| \\ &= |\det (L_1 \circ L_2 \circ \dots \circ L_r)| = |\det L| \end{aligned}$$

وهو المطلوب . إثباته

تكون النظرية قد برهنت

### تحويل برواسم ليست خطية :

سوف نحصل الآن على امتداد لنظرية ٤٥-٦ للرواسم  $C^1$  غير الخطية . بالطبع ، في هذه الحالة لا يحتاج المحتوى للصورة للفئة اختيارية مضاعف ثابت لمحتوى الفئة المغطاة ، لكن ربما يتغير من نقطة إلى نقطة . تدل نظرية جاكوبيان على أنه إذا كانت  $K$  مكعباً صغيراً بكفاية مركزه  $x$  ، فإن  $c(\Phi(K))$  تساوى تقريباً  $|J_\Phi(x)| c(K)$  . هذه النتيجة قاطعة لإثبات نظرية تغيير المتغيرات . سيكون من المناسب اصطلاحياً اعتبار الحالة الخاصة الآتية أولاً :

٤٥ - ٧ مفترض . نفرض أن  $K \subseteq \mathbb{R}^p$  مكعب مقفل مركزه  $0$  . نفرض أن  $\Omega$  فئة مفتوحة تحتوى  $K$  ونفرض أن  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  تنتمي إلى صنف  $C^1(\Omega)$  وأنه راسم إدخال . نفرض بالإضافة إلى ذلك أن  $J_\psi(x) \neq 0$  عند  $x \in K$  وأن



$$(45.1) \quad \|\psi(x) - x\| \leq \alpha \|x\| \quad \text{for } x \in K$$

حيث  $\alpha$  تحقق  $0 < \alpha < 1/\sqrt{p}$  . حينئذ

$$(1 - \alpha\sqrt{p})^p \leq \frac{c(\psi(K))}{c(K)} \leq (1 + \alpha\sqrt{p})^p$$

البرهان . ينتج من نظرية ٤٥ - ٤ أن  $\psi(K)$  لها محتوى ومن نتيجة ٤٥ - ٥ أن  $b(\psi(K)) = \psi(b(K))$  . إذا كان طول ضلع  $K$  هو  $2r$  وإذا كانت  $x \in b(K)$  ، فنجد من (نظرية ٨ - ١٠) أن  $r \leq \|x\| \leq r\sqrt{p}$  . تدل المتباينة (٤٥ - ١) على أن  $\psi(x)$  هي على مسافة  $\alpha r\sqrt{p}$  من  $x \in b(K)$  . وإذن لا تقطع الفئة المدجة  $\psi(b(K)) = b(\psi(K))$  مكعباً مفتوحاً  $C_i$  بمركز  $0$  وطول ضلع  $2(1 - \alpha\sqrt{p})r$  . إذا فرضنا أن  $A$  (على الترتيب ،  $B$ ) هي الفئة لكل النقط الداخلية (على الترتيب ، النقط الخارجية) من  $\psi(K)$  ، حينئذ  $B$  و  $A$  هما فئتان مفتوحتان غير خاليتين ومنفصلتين باتحاد  $R^p \setminus b(\psi(K))$  . بما أن  $C_i$  موصول في  $R^p$  ، فيجب أن يكون إما  $C_i \subseteq A$  أو  $C_i \subseteq B$  . لكن ، بما أن  $0 \in C_i \cap A$  ، نستنتج أن  $C_i \subseteq A \subseteq \psi(K)$  . يمكن للقارئ بأسلوب مماثل توضيح أنه إذا كان  $C_0$  هو المكعب المقلل بمركز  $0$  وطول ضلع  $2(1 + \alpha\sqrt{p})r$  ، فإن  $\psi(K) \subseteq C_0$  . ينتج المطلوب الآن من هذه التضمينات .

٤٥ - ٨ نظرية جاكوبيان . نفرض أن  $\Omega \subseteq R^p$  مفتوحة ونفرض أن  $\varphi : \Omega \rightarrow R^p$  ينتمي إلى صنف  $C^1(\Omega)$  ، وهو راسم إدخال على  $\Omega$  ، وأن  $J_\varphi(x) \neq 0$  عند  $x \in \Omega$  . نفرض أن  $A$  لها محتوى وأن  $A^- \subseteq \Omega$  . إذا كانت  $\varepsilon > 0$  معطاة ، فإنه يوجد  $\gamma > 0$  بحيث إنه إذا كانت  $K$  مكعباً مقللاً بمركز  $x \in A$  وطول ضلع أقل من  $2\gamma$  ، فإن

$$(45.2) \quad |J_\varphi(x)| (1 - \varepsilon)^p \leq \frac{c(\varphi(K))}{c(K)} \leq |J_\varphi(x)| (1 + \varepsilon)^p$$

البرهان . شيد  $\delta > 0$  ،  $\Omega_1$  كما في برهان مفترض ٤٥ - ١ . بما أن  $\det D\varphi(x) = J_\varphi(x) \neq 0$  لكل  $x \in \Omega$  ، فينتج أن  $L_x = (D\varphi(x))^{-1}$  موجودة ، بما أن  $1 = \det(L_x \circ D\varphi(x)) = (\det L_x)(\det D\varphi(x))$  ، فينتج أن  $\det L_x = 1/J_\varphi(x)$  for  $x \in \Omega$

بما أن الرموز السفلى في تمثيل المصفوفة القياسية  $L_x$  هي دوال متصلة ، فينتج من إدماج (٢١ - ٤) أنه يوجد مقدار ثابت  $M > 0$  بحيث إن  $\|L_x\|_{pp} \leq M$  لجميع  $x \in \Omega_1$  .

نفرض الآن أن  $\varepsilon$  ، حيث  $0 < \varepsilon < 1$  ، معطاة . بما أن الراسم  $x \rightarrow D\varphi(x)$  متصل بانتظام على  $\Omega_1$  ، فتوجد  $\beta$  حيث  $0 < \beta < \delta$  بحيث إنه إذا كانت  $x_1, x_2 \in \Omega_1$  وكانت  $\|x_1 - x_2\| \leq \beta$  ، فإن  $\|D\varphi(x_1) - D\varphi(x_2)\|_{pp} \leq \varepsilon/M\sqrt{p}$  . نفرض الآن

أن  $x \in A$  معطاة ، وإذن إذا كانت  $\|z\| \leq \beta$  فإن  $x+z$  و  $x$  تنتميان إلى  $\Omega_1$  ومن ثم  
ينتج من المفترض ٤١ - ٣ أن

$$(45.3) \quad \|\varphi(x+z) - \varphi(x) - D\varphi(x)(z)\| \leq \|z\| \sup_{0 \leq t \leq 1} \|D\varphi(x+tz) - D\varphi(x)\|_{op} \\ \leq \frac{\varepsilon}{M\sqrt{p}} \|z\|$$

نفرض أن  $x \in A$  وعرف  $\psi(z)$  عند  $\|z\| \leq \beta$  بأنها

$$\psi(z) = L_x[\varphi(x+z) - \varphi(x)]$$

بما أن  $L_x = (D\varphi(x))^{-1}$  ، فإن المتباينة (٤٥ - ٣) تنتج

$$\|\psi(z) - z\| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{p}} \|z\| \quad \text{for } \|z\| \leq \beta$$

نستخدم الآن المفترض السابق حيث  $\alpha = \varepsilon/\sqrt{p}$  لنستنتج أنه إذا كانت  $K_1$  أى مكعب  
مقلل مركزه 0 ومحتوى في كرة مفتوحة نصف قطرها  $\beta$  ، فإن

$$(1-\varepsilon)^p \leq \frac{c(\psi(K_1))}{c(K_1)} \leq (1+\varepsilon)^p$$

ينتج من تعريف  $\psi$  ونظرية ٤٥ - ٦ أنه إذا كانت  $K = x + K_1$  ، فإن  $K$  مكعب  
مقلل مركزه  $x$  وأن  $c(K) = c(K_1)$  وأن

$$c(\psi(K_1)) = |\det L_x| c(\varphi(x+K_1) - \varphi(x)) \\ = \frac{1}{|J_\varphi(x)|} c(\varphi(K))$$

ومن ثم ، إذا كانت  $K$  مكعباً مقللاً مركزه  $x \in A$  وطول ضلع أقل من  $2\gamma$  (حيث  
 $\gamma = \beta/\sqrt{p}$ ) ، فإن المتباينة (٤٥ - ٣) تظل صحيحة . وهو المطلوب إثباته

### تغيير المتغيرات :

سوف نستخدم الآن نظرية جاكوبيان لنحصل على نظرية هامة التي تعطي الحالة العامة في  $\mathbb{R}^p$   
لنظرية تغيير المتغيرات ٣٠ - ١٢ . تؤكد النتيجة السابقة أنه إذا كانت  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$   
لها مشتقة متصلة وأنه إذا كانت الدالة  $f$  متصلة على مدى  $\varphi$  ، فإن

$$(45.4) \quad \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi) \varphi'$$

تختص النتيجة التي سنقررها براسم إدخال  $\varphi$  معرف على فئة جزئية مفتوحة  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$   
بقم في  $\mathbb{R}^p$  . سنفرض أن  $\varphi \in C^1(\Omega)$  وأن محدد جاكوبيان لها

$$J_{\varphi}(x) = \det [D_j \varphi_i(x)]$$

لا ينعدم على  $\Omega$  . سيتضح أنه إذا كانت  $A$  لها محتوى ، وإذا كانت  $A^- \subseteq \Omega$  ، وإذا كانت  $f$  محدودة ومتصلة على  $\varphi(A)$  إلى  $\mathbb{R}$  ، حينئذ  $\varphi(A)$  لها محتوى ويكون

$$(45.5) \quad \int_{\varphi(A)} f = \int_A (f \circ \varphi) |J_{\varphi}|$$

سيلاحظ أن الفروض تقيدية بدرجة أكثر قليلاً عن الحالة التي فيها  $p = 1$  . في الحقيقة ، في (٤٥ - ٤) لا نفترض أن  $\varphi$  إدخالية أو أن  $\varphi'(x) \neq 0$  عند  $x \in [\alpha, \beta]$  . إذا حدث وكانت  $\varphi$  راسماً إدخالياً ، نلاحظ أن التماثل الصحيح للنتيجة (٤٥ - ٥) في الحالة  $p = 1$  هو

$$\int_A f = \int_a^b (f \circ \varphi) |\varphi'|$$

حيث  $A = \inf \{\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\}$  ،  $B = \sup \{\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\}$  ، وطبعاً ، إذا كانت  $\varphi'(x) > 0$  عند  $\alpha \leq x \leq \beta$  ، فيختزل قانون (٤٥ - ٥) إلى (٤٥ - ٤) ؛ بينما إذا كانت  $\varphi'(x) < 0$  عند  $\alpha \leq x \leq \beta$  ، فيختزل قانون (٤٥ - ٥) إلى

$$\int_{\varphi(B)} f = \int_a^b (f \circ \varphi) (-\varphi')$$

ومن ثم ننتج (٤٥ - ٤) أيضاً . التفسير لهذا الاختلاف هو أن التكامل على الفترات في  $\mathbb{R}$  هو «محدد» بالمعنى الذي نعرف به .

$$\int_a^b f = - \int_b^a f$$

لأي عددين حقيقيين « $a$ » و« $b$ » . لما يعرف مثل هذا التحديد لتكاملات على  $\mathbb{R}^p$  .

البرهان المطلى يرجع أصلاً إلى ج. ت. اشفارتز (\*) وهو أولي بمعنى أنه لا يستفيد من أي النتائج من نظرية القياس . لكن ، المناقشة دقيقة جداً وتستخدم عدداً من خواص أعمق لدوال متصلة ، ومدجة وفئات مرتبطة ، وخواص التكامل . حتى أيضاً ، النظرية التي ستبرهن ليست كافية تماماً لكل الحالات الهامة التي تظهر وسننمينا فيما يلي بصورة أقوى تسمح بانعدام ويجعل  $f \circ \varphi$  غير متصلة على فئته بمحتوى صفر .

٤٥ - ٩ نظرية تغيير المتغيرات . نفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  مفتوحة ونفرض أن

$$J_{\varphi}(x) \neq 0 \quad \text{وأن} \quad \varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p \quad \text{تنتمي إلى صنف} \quad C^1(\Omega) \quad \text{، هي راسم إدخال على} \quad \Omega$$

(\*) ج. ت. اشفارتز ( ١٩٣٠ - ) تخرج من CCNY وحصل على الدكتوراه من جامعة ييل ، وهو أستاذ بمعهد كورانت بجامعة نيويورك . مع أنه معروف جيداً بعمله في التحليل الدالي ، فقد ساهم أيضاً في المعادلات التفاضلية ، الهندسية ، ولغات الكمبيوتر ، ومظاهر متعددة للفيزياء الرياضية والاقتصاديات الرياضية .

عند  $x \in \Omega$  . نفرض أن  $A$  لها محتوى ،  $A \subseteq \Omega$  ، وأن  $f: \varphi(A) \rightarrow \mathbf{R}$  محدودة ومتصلة . حينئذ .

$$(45.5) \quad \int_{\varphi(A)} f = \int_A (f \circ \varphi) |J_\varphi|$$

البرهان . ينتج من نظرية ٤٥ - ٤ أن  $\varphi(A)$  لها محتوى . بما أن اندوال المراد تكاملها متصلة ، فينتج أن التكاملات في (٤٥ - ٥) موجودة ؛ يبقى إثبات المتساوية . بفرض  $f = f^+ - f^-$  ، حيث  $f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$  ونفرض  $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$  وباستخدام خطية التكامل ، يكفي أن نفرض أن  $f(y) \geq 0$  لكل  $y \in \varphi(A)$

نفرض الآن أن  $\Omega_1$  كما في مفترض ٤٥ - ١ ونفرض أن

$$M_\varphi = \sup \{ \|D\varphi(x)\|_{pp} : x \in \Omega_1 \},$$

$$M_f = \sup \{ f(y) : y \in \varphi(A) \},$$

$$M_J = \sup \{ |J_\varphi(x)| : x \in A \}$$

نفرض أن  $\varepsilon > 0$  اختيارية ماعدا عند  $0 < \varepsilon < 1$  ، نفرض أن  $I$  خلية مغلفة تحتوي على  $A$  ، ونفرض أن  $\{K_i : i = 1, \dots, M\}$  تقسم  $I$  إلى مكعبات مغلفة غير متداخلة بطول ضلع أقل من  $2\gamma$  ، حيث  $\gamma$  هو الثابت في نظرية جاكوبيان . بفرض أن هذه المكعبات المحتوية بالكامل في  $A$  هي  $K_1, \dots, K_m$  ؛ نفرض أن تلك التي لها نقط في كل من  $A$  وتكملتها هي  $K_{m+1}, \dots, K_n$  ، ونفرض أن تلك المكعبات المحتوية بالكامل في مكملة  $A$  هي  $K_{n+1}, \dots, K_M$  . بما أن  $A$  له محتوى ، فيمكننا فرض أن التقسيم قد اختير دقيقاً بكفاية بحيث إن

$$(i) \quad c(A) \leq \sum_{i=1}^m c(K_i) + \varepsilon, \quad \sum_{i=m+1}^n c(K_i) < \varepsilon$$

نفرض أن  $B = K_1 \cup \dots \cup K_m$  بحيث إن  $B \subseteq A$  . بما أن  $c(A \setminus B) = c(A) - c(B) < \varepsilon$  ، فنجد أن

$$(ii) \quad \left| \int_A (f \circ \varphi) |J_\varphi| - \int_B (f \circ \varphi) |J_\varphi| \right| = \left| \int_{A \setminus B} (f \circ \varphi) |J_\varphi| \right| \leq M_f M_J c(A \setminus B) \leq [M_f M_J] \varepsilon$$

ينتج من مفترض ٤٥ - ١ أن  $c(\varphi(A \setminus B)) \leq (\sqrt{p} M_\varphi)^p \varepsilon$  ، بحيث إن

$$(iii) \quad \left| \int_{\varphi(A)} f - \int_{\varphi(B)} f \right| = \left| \int_{\varphi(A \setminus B)} f \right| \leq [M_f (\sqrt{p} M_\varphi)^p] \varepsilon$$

إذا كانت  $x_j$  هي مركز  $K_i$  ،  $i = 1, \dots, m$  ، فينتج من نظرية چاكوبيان أن

$$|J_\varphi(x_i)| (1 - \varepsilon)^p \leq \frac{c(\varphi(K_i))}{c(K_i)} \leq |J_\varphi(x_i)| (1 + \varepsilon)^p$$

الآن بما أن  $0 < \varepsilon < 1$  ، يتضح أن  $1 - 2^p \varepsilon \leq (1 - \varepsilon)^p$  ،  $(1 + \varepsilon)^p \leq 1 + 2^p \varepsilon$  ، لذلك يمكننا أن نكتب هذه المتباينة في الصورة

$$(iv) \quad |c(\varphi(K_i)) - |J_\varphi(x_i)| c(K_i)| \leq [c(K_i) M_J 2^p] \varepsilon$$

الآن بسبب اتصال الدوال المراد تكاملها على الفئة المدجة  $B$  ، ينتج أننا يمكننا فرض أنه لأي نقطة  $y_i \in K_i$  ، يكون

$$(v) \quad \left| \int_B (f \circ \varphi) |J_\varphi| - \sum_{i=1}^m (f \circ \varphi)(y_i) |J_\varphi(x_i)| c(K_i) \right| < \varepsilon c(B)$$

(لأنه ، إذا كان ضروريا ، يمكننا تقسيم المكعبات  $K_1, \dots, K_m$  إلى مكعبات صغيرة ، انظر تمرين ٤٣ - ر) .

بما أن  $\varphi$  راسم أحادي فإن فئتين من  $\{\varphi(K_i) : i = 1, \dots, m\}$  تتقاطعان على الأكثر في فئة  $\varphi(K_i \cap K_j)$  لها محتوى صفر لأن  $c(K_i \cap K_j) = 0$  . أيضاً ، بما أن  $\varphi(K_i)$  لها محتوى ، فإن  $f$  قابلة للتكامل على  $\varphi(K_i)$  ، ومن ثم ينتج من نظرية ٤٤ - ٩ (ب) أن

$$\int_{\varphi(B)} f = \sum_{i=1}^m \int_{\varphi(K_i)} f$$

الآن بما أن  $K_i$  موصولة ، فإن  $\varphi(K_i)$  موصولة . بما أن  $f$  محدودة ومتصلة على  $\varphi(K_i)$  فينتج من نظرية القيمة المتوسطة ٤٤ - ١١ أنه يوجد  $p_i \in \varphi(K_i)$  بحيث إن

$$\int_{\varphi(K_i)} f = f(p_i) c(\varphi(K_i)), \quad i = 1, \dots, m$$

بما أن  $p_i \in \varphi(K_i)$  ، يوجد  $y_i \in K_i$  وحيدة حيث  $p_i = \varphi(y_i)$  ،  $i = 1, \dots, m$  ومن ثم نجد أن

$$(vi) \quad \int_{\varphi(B)} f = \sum_{i=1}^m (f \circ \varphi)(y_i) c(\varphi(K_i))$$

لكن بما أن (iv) ، فينتج من (iv) أن

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^m (f \circ \varphi)(y_i) c(\varphi(K_i)) - \sum_{i=1}^m (f \circ \varphi)(y_i) |J_\varphi(x_i)| c(K_i) \right| \\ \leq \left[ M_J 2^p \sum_{i=1}^m (f \circ \varphi)(y_i) c(K_i) \right] \varepsilon \\ \leq \left[ M_J M_f 2^p \sum_{i=1}^m c(K_i) \right] \varepsilon \leq [M_J M_f 2^p c(A)] \varepsilon \end{aligned}$$

إذا ربطنا هذه العلاقة الأخيرة مع (v) ، (vi) ، نحصل على

$$(vii) \quad \left| \int_{\varphi(B)} f - \int_B (f \circ \varphi) |J_{\varphi}| \right| \leq (1 + M_f M_f 2^p) c(A) \varepsilon$$

يربط (vii) مع (ii) ، (iii) ، نحصل على

$$\left| \int_{\varphi(A)} f - \int_A (f \circ \varphi) |J_{\varphi}| \right| \leq [M_f (\sqrt{p} M_{\varphi})^p + (1 + M_f M_f 2^p) c(A) + M_f M_f] \varepsilon$$

بما أن  $\varepsilon$  عدد اختياري حيث  $0 < \varepsilon < 1$  ، فإن المعادلة  $(\varepsilon - \varepsilon)$  تكون أثبتت وهو المطلوب إثباته

### تطبيقات :

الاستخدام النظرية على تغيير المتغيرات عند  $p > 1$  يختلف عادة عن التطبيق للنظرية المناظرة عند  $p = 1$  . مثال ذلك ، في حساب

$$\int_0^1 x(1+x^2)^{1/2} dx$$

نلاحظ عادة أنه إذا قمنا  $\varphi(x) = 1 + x^2$  فإن  $\varphi'(x) = 2x$  ، ومن ثم نأخذ الدالة المراد تكاملها الصورة  $\frac{1}{2}(\varphi(x))^{1/2} \varphi'(x)$  وكذلك

$$\begin{aligned} \int_0^1 x(1+x^2)^{1/2} dx &= \frac{1}{2} \frac{2}{3} (\varphi(x))^{3/2} \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{1}{3} (1+x^2)^{3/2} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} (2^{3/2} - 1) \end{aligned}$$

وإذن يكون إجراء التكامل بملاحظة أن الدالة المعطاة المراد تكاملها هي تركيب لدالة ما والدالة  $\varphi$  ، مضروبة في مشتقة الدالة  $\varphi$  . ويمكن إعادة إجراء تطبيقات ماثلة لحساب التكاملات لأكثر من متغير واحد فقط في الحالة التي فيها حد الجاكوبيان ثابت (أو بسيط جداً) مثال ذلك ، تكامل على الصورة .

$$\iint_A f(x+2y, 2x-3y) d(x, y)$$

يمكن إجراؤه بادخال التحويل الخطي  $\varphi(x, y) = (x+2y, 2x-3y)$  هنا

$$J_{\varphi}(x, y) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = -3 - 4 = -7$$

وأيضاً نجد أن

$$\int_A f(x+2y, 2x-3y) d(x, y) = \frac{1}{7} \int_{\varphi(A)} f(u, v) d(u, v)$$

هذا التكامل الثانى ربما يكون أبسط إذا كانت  $f(u, v)$  أبسط [ مثال ذلك ، إذا كانت  $f(u, v) = g(u)h(v)$  ، أو إذا كانت  $\varphi(A)$  بسيطة ( مثال ذلك ، إذا كانت خلية ) .  
وخلاف ذلك ، ربما لا يبسط التحويل الأشياء بدرجة كبيرة جداً .

استخدام نمطى أكثر للنظرية هو حساب تكامل متعدد  $\int_D f$  بملاحظة أن الفئة  $D$  هي الصورة لفئة أبسط  $A$  ( مثال ذلك ، خلية ) تحت راسم مناسب  $\varphi$  .

٤٥ - ١٠ أمثلة . ( أ ) نفرض أن  $D$  تدل على المستطيل الذى رؤوسه  $(0, 0), (2, 2), (-1, 1), (1, 3)$  ، أى إن ، المنطقة محدودة بالخطوط التى معادلتها هي  $y = x, y = -x + 4, y = x + 2, y = -x$

إذا أخذنا  $u = y - x$  و  $v = y + x$  فإن هذه الخطوط تصبح

$$u = 0, v = 4, u = 2, v = 0$$

ومن ثم ، إذا كانت  $\varphi$  هي الراسم  $\varphi(u, v) = (x, y)$  ، حينئذ  $\varphi$  ترسم الخلية  $A = [0, 2] \times [0, 4]$  إلى  $D$  . سنترك للقارئ إثبات أن

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) d(x, y) &= \iint_A f\left[\frac{1}{2}(v-u), \frac{1}{2}(u+v)\right] \frac{1}{2} d(u, v) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 \left\{ \int_0^2 f\left[\frac{1}{2}(v-u), \frac{1}{2}(u+v)\right] du \right\} dv \end{aligned}$$

(ب) نفرض أن  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  هي فئة النقط في  $\mathbb{R}^2$  المغطاة بما يلي

$$D = \{(u, v) : 1 \leq u^2 - v^2 \leq 9, 1 \leq uv \leq 4\}$$

وإذن  $D$  محدودة بأربعة قطوع زائدية . إذا عرفنا  $\psi : (u, v) \mapsto (x, y)$  بأنها

$$x = u^2 - v^2, \quad y = uv$$

حينئذ من الواضح أن  $\psi$  ترسم هذه القطوع الزائدية فى مستوى  $(u, v)$  إلى الخطوط  $x = 1, x = 9, y = 1, y = 4$  فى المستوى  $(x, y)$  . مع أن  $\psi$  ليست إدخالية على جميع  $\mathbb{R}^2$  ، فهى إدخالية على الفئة  $Q = \{(u, v) : u > 0, v > 0\}$  وأن  $J_\psi(u, v) = 2(u^2 + v^2)$  . وبالإضافة إلى ذلك  $\psi(Q) = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$

ومن ثم نعرف  $\varphi$  على  $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$  إلى  $Q \subseteq \mathbb{R}^2$  فإن تكون عكس  $\psi$  مما سبق يتضح أن  $\varphi$  ترسم المستقيمت  $x = 1, x = 9, y = 1, y = 4$  إلى القطوع الزائدية .

$$u^2 - v^2 = 1, \quad u^2 - v^2 = 9, \quad uv = 1, \quad uv = 4$$

على الترتيب ، وأن الفئة  $D$  هي الصورة تحت  $\phi$  المحلية  $A = [1, 9] \times [1, 4]$  . يوضح حساب مباشر أن  $\phi$  تكون على الصورة  $\phi(x, y) = (u, v)$  حيث

$$(45.6) \quad u = \left[ \frac{x + (x^2 + 4y^2)^{1/2}}{2} \right]^{1/2}, \quad v = \left[ \frac{-x + (x^2 + 4y^2)^{1/2}}{2} \right]^{1/2}$$

ينتج من هذا أن  $u^2 + v^2 = (x^2 + 4y^2)^{1/2}$  بحيث إن  $J_\phi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + 4y^2)^{-1/2}$  .  
[ تنتج هذه الحقيقة أيضاً من المطابقة  $(u^2 + v^2)^2 = (u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 = x^2 + 4y^2$  ]  
أى إن

$$\iint_D f(u, v) d(u, v) = \iint_A \frac{f(u(x, y), v(x, y))}{2\sqrt{x^2 + 4y^2}} d(x, y)$$

حيث أعطيت  $A = [1, 9] \times [1, 4]$  حيث  $u(x, y)$  و  $v(x, y)$  في (٤٥ - ٦) .

## الاحداثيات القطبية والكروية :

من المناسب غالباً تعيين النقط في المستوى  $R^2$  بإعطائها « إحداثياتها القطبية » نتصور عادة المستوى كما لكل من الإحداثيات الكارتيزية ( المعطاة بخطين رأسى وأفقى ) والنظام القطبى . ( المعطى بأشعة من نقطة الأصل ودوائر مركزها المشترك هو نقطة الأصل ) وعلى التماق ، يمكننا اعتبار الإحداثيات القطبية كراسم  $(r, \theta) \in R^2$  إلى  $(x, y) \in R^2$  المعطاة بما يلى

$$(45.7) \quad (x, y) = \phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

يسمى أى زوج من الأعداد  $(r, \theta) \in R^2$  بحيث إن  $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  فئة الاحداثيات القطبية للنقطة  $(x, y)$  . نطلب عادة  $r \geq 0$  ؛ حتى إذا تحقق هذا ، فإن لكل نقطة  $(x, y)$  في  $R^2$  فئات كثيرة عددها لانهاى للاحداثيات القطبية .

مثال ذلك ، إذا كانت  $(x, y) = (0, 0)$  ، فإن  $(0, \theta)$  هي فئة إحداثيات قطبية للنقطة  $(0, 0)$  لكل  $\theta \in R$  ؛ إذا كانت  $(x, y) \neq (0, 0)$  وكانت  $(r, \theta)$  هي فئة إحداثيات قطبية للنقطة  $(x, y)$  ، حينئذ لكل  $n \in Z$  يكون الزوج  $(r, \theta + n2\pi)$  هو أيضاً فئة إحداثيات قطبية للنقطة  $(x, y)$  .

إذا كانت  $(x, y) \neq (0, 0)$  فيسمى الزوج ( الفريد ) الوحيد  $(r, \theta)$  حيث  $r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$  بالفتة الأساسية للاحداثيات القطبية للنقطة  $(x, y)$  . أى إن الدالة  $\phi$  تنتج راسماً إدخالياً من  $[0, 2\pi) \times (0, +\infty)$  إلى  $R^2 \setminus \{(0, 0)\}$  . وتعطى أيضاً راسماً من  $[0, 2\pi) \times (0, +\infty)$  إلى  $R^2$  لكنها ليست إدخالية حيث إنها ترسل كل النقط  $(0, \theta), 0 \leq \theta < 2\pi$  إلى  $(0, 0)$  لاحظ أيضاً أن الجاكوبيان هو



$$(45.8) \quad J_{\phi}(r, \theta) = \det \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \\ = r(\cos \theta)^2 + r(\sin \theta)^2 = r$$

الذى ينعدم عند  $r = 0$ .

من الواضح أن  $\phi$  ترسم الخلية  $A = [0, 1] \times [0, 2\pi]$  في المستوى  $(r, \theta)$  إلى وحدة القرص  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$  لكن بما أن  $\phi$  ليست إدخالية على  $A$  وبما أن  $J_{\phi}$  تنعدم عند  $r = 0$ ، فلا يمكننا استخدام نظرية تغيير المتغيرات (٩ - ٤٥) لتحويل تكامل على  $D$  إلى تكامل على  $A$ .

نلاق صمويات مائلة للاحداثيات الكروية في  $\mathbb{R}^3$  نتذكر تعريف إحداثيات كروية براسم  $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  حيث :

$$(45.9) \quad \Phi(r, \theta, \phi) = (r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi)$$

نسمى أى ثلاثة من الأعداد  $(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3$  بحيث إن  $(x, y, z) = \Phi(r, \theta, \phi)$  تسمى بفئة الاحداثيات الكروية للنقطة  $(x, y, z)$ . يحتاج الشخص عادة  $r \geq 0$ ، لكن حتى بهذا التقييد يكون لكل نقطة في  $\mathbb{R}^3$  فئات كثيرة عددها لانهاى من إحداثيات كروية.

مثال ذلك، إذا كانت  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  فإن  $(0, \theta, \phi)$  هي فئة إحداثيات كروية لجميع  $\theta \in \mathbb{R}, \phi \in \mathbb{R}$ ؛ إذا كانت  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  وكانت  $(r, \theta, \phi)$  هي فئة إحداثيات قطبية للنقطة  $(x, y, z)$ ، فإنه لكل  $m, n \in \mathbb{Z}$ ، الثلاثيات  $(r, \theta + 2m\pi, \phi + 2n\pi)$  و  $(r, \theta + (2m+1)\pi, \phi + (2n+1)\pi)$  هي فئات بإحداثيات كروية لهذه النقطة.

إذا كانت  $(x, y, z)$  بحيث إن  $(x, y) \neq (0, 0)$ ، حينئذ يسمى الثلاثى الوحيد  $(r, \theta, \phi)$  حيث  $r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 < \phi < \pi$  بالفئة الأساسية للاحداثيات الكروية للنقطة  $(x, y, z)$ . أى إن الدالة  $\Phi$  تنتج راسماً أحادياً من  $(0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times (0, \pi)$  إلى  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ . فوقيا التقييد على  $\Phi$  إلى  $[0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$  يعطى راسماً فوقياً إلى جميع  $\mathbb{R}^3$  لكنه ليس أحادياً، حيث يرسل كل النقط  $(0, \theta, \phi)$  إلى  $(0, 0, 0)$  وأنه، إذا كانت  $\phi = 0$  أو  $\phi = \pi$ ، حينئذ كل النقط  $(r, \theta, \phi)$  ترسم إلى  $(0, 0, r \cos \phi)$ . لاحظ أيضاً أن

$$(45.10) \quad J_{\Phi}(r, \theta, \phi) = \det \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{bmatrix} \\ = -r^2 \sin \phi$$

لاحظنا حالا أن  $\Phi$  ترسم الخلية  $A = [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$  في الفراغ  $(r, \theta, \phi)$  إلى وحدة الكرات  $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$  لكن بما أن  $\Phi$  ليست أحادية على  $A$  وأن  $J_\Phi$  يتعلم عند  $r^2 \sin \phi = 0$  ، فلا يمكننا استخدام نظرية تغير المتغيرات (٩ - ٤٥) لتحويل تكامل على  $D$  إلى تكامل على  $A$  .

سنقدم الآن نظرية تمكننا من معالجة الصعوبات التي نلاحظها في استخدام الاحداثيات القطبية والاحداثيات الكروية وهي مفيدة غالباً في « تحويلات » أخرى « بإفرادات أو شواذ » سيلاحظ أن النظرية لا تتطلب كون  $\Phi$  أحادية على الفئة  $A$  ، مع أنها أحادية على  $A^0$  .

٩٥ - ١١ نظرية تغير المتغيرات (صورة أقوى) . إذا فرضنا  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  مفتوحة ونفرض أن  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^p : \Phi$  تنتمي إلى صنف  $C^1(\Omega)$  . نفرض أن  $\Omega_0$  فئة مفتوحة بمحتوى بحيث إن  $\Omega_0^- \subseteq \Omega$  وبحيث إن  $\Phi$  أحادية على  $\Omega_0$  . نفرض أن  $E \subseteq \Omega$  فئة إدماجية بمحتوى صفر بحيث إن  $J_\Phi(x) \neq 0$  عند  $x \in \Omega_0 \setminus E$  . نفرض أن  $A \subseteq \Omega$  لها محتوى ،  $A^- \subseteq \Omega_0^-$  ، وأن  $f: \Phi(A) \rightarrow \mathbb{R}$  محدودة ، وأن  $f$  متصلة على  $\Phi(A \setminus E)$  . حينئذ

$$(45.5) \quad \int_{\Phi(A)} f = \int_A (f \circ \Phi) |J_\Phi|$$

البرهان . بما أن  $b(A)$  و  $b(\Omega_0)$  مدجتان ولهما محتوى صفر ، فيمكننا فرض أنهما محتويان في  $E$  ؛ وإذاً  $A^0 \setminus E \subseteq \Omega_0 \setminus E$  . بما أن  $E$  و  $A$  لها محتوى ، والفئة  $A \setminus E$  لها محتوى ؛ وبالإضافة إلى ذلك ، بما أن  $E$  مغلقة ، فإن  $(A \setminus E)^0 = A^0 \setminus E$  . نستنتج أن  $J_\Phi(x) \neq 0$  عند  $x \in (A \setminus E)^0$  . لذلك بتطبيق نظرية (٩٥ - ٤) على  $A \setminus E$  ، نستنتج أن  $\Phi(A \setminus E)$  لها محتوى . ينتج من نظرية (٩٥ - ٢) أن  $\Phi(E)$  لها محتوى صفر ، وبما أن  $\Phi(A) = \Phi((A \setminus E) \cup (A \cap E)) = \Phi(A \setminus E) \cup \Phi(A \cap E)$  فإن  $\Phi(A)$  لها محتوى . بما أن  $f$  محدودة على  $\Phi(A)$  ومتصلة ماعداً على فئة جزئية من  $\Phi(E)$  ، فنستنتج أن  $f$  قابلة للتكامل على  $\Phi(A)$  . وبالإضافة إلى ذلك ، بما أن  $\Phi^0$  متصلة ماعداً على فئة جزئية من  $E$  ، فنستنتج أن  $|J_\Phi| \circ \Phi$  قابلة للتكامل على  $A$  . يتبقى أن نوضح أن هذين التكاملين متساويان .

نطبق الآن مفترض (٩٥ - ١) على  $E$  للحصول على فئة مفتوحة محدودة  $\Omega_1$  حيث  $E \subseteq \Omega_1 \subseteq \Omega_1^- \subseteq \Omega$  وثابت  $M_1 > 0$  ، بخاصية أنه إذا كانت  $E$  محتوية في اتحاد عدد محدود لمكعبات مغلقة في  $\Omega_1$  بمحتوى  $\alpha > 0$  على الأكثر فإن  $\Phi(E)$  تكون محتوية في اتحاد محدود مناظر لمكعبات مغلقة بمحتوى  $(\sqrt{p} M_1)^p \alpha$  على الأكثر .

نفرض الآن أن  $\varepsilon > 0$  معطاة ونحصر  $E$  في اتحاد محدود  $U_\varepsilon$  لمكعبات مفتوحة في  $\Omega_1$  حيث  $c(U_\varepsilon) < \varepsilon$  وبحيث إن الاتحاد  $W_\varepsilon$  لإقتالات المكعبات في  $U_\varepsilon$  تظل محتوية في  $\Omega_1$  .

حينئذ  $c(W_\varepsilon) < \varepsilon$  وينتج من مفترض (٤٥-١) أن  $(\sqrt{p} M_1)^p \varepsilon \leq c(\varphi(W_\varepsilon)) \leq c(\varphi(U_\varepsilon))$  الآن نفرض أن  $B = A \setminus U_\varepsilon$  بحيث إن  $B$  لها محتوى . الآن بما أن  $U_\varepsilon$  مفتوح ويحتوى  $b(\Omega_0)$  و  $E$  ، فسننتج أن  $B^- \subseteq \Omega_0 \setminus E$  نطبق الآن نظرية تغيير المتغيرات (٤٥-١) على  $E \setminus \Omega_0$  بدلا من  $\Omega$  ، لنحصل على

$$\int_{\varphi(B)} f = \int_B (f \circ \varphi) |J_\varphi|$$

لاحظنا الآن حالا أن  $\varphi(A) \setminus \varphi(B) \subseteq \varphi(A \cap U_\varepsilon)$  ، وإذن

$$\begin{aligned} \left| \int_{\varphi(A)} f - \int_{\varphi(B)} f \right| &\leq \left| \int_{\varphi(A \cap U_\varepsilon)} f \right| \leq M_f c(\varphi(A \cap U_\varepsilon)) \\ &\leq (\sqrt{p} M_1)^p M_f \varepsilon \end{aligned}$$

بالمثل نجد أن

$$\begin{aligned} \left| \int_A (f \circ \varphi) |J_\varphi| - \int_B (f \circ \varphi) |J_\varphi| \right| &\leq \int_{A \cap U_\varepsilon} (f \circ \varphi) |J_\varphi| \\ &\leq M_f M_J c(A \cap U_\varepsilon) \leq M_f M_J \varepsilon \end{aligned}$$

ينتج أن

$$\left| \int_{\varphi(A)} f - \int_A (f \circ \varphi) |J_\varphi| \right| \leq [(\sqrt{p} M_1)^p M_f + M_f M_J] \varepsilon$$

بما أن  $\varepsilon > 0$  اختيارية ، فينتج المطلوب وهو المطلوب إثباته

لإحداثيات قطبية، نأخذ  $\Omega_0$  كقبة مفتوحة بمحتوى محتوي في  $(0, +\infty) \times (0, 2\pi)$  لإحداثيات كروية نأخذ  $\Omega_0$  لتكون قبة مفتوحة بمحتوى محتوي في  $(0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$

## تمرينات :

٤٥ - (أ) نفرض أن  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  قبة مفتوحة ونفرض أن  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$  تحقق شرط لبشز على  $\Omega$  ؛ أى إنه ، عند قيمة ما  $M > 0$  ، تكون  $\|f(x) - f(y)\| \leq M \|x - y\|$  لكل  $x, y \in \Omega$  . إذا كانت  $K \subseteq \Omega$  مكعباً بطول ضلع  $s > 0$  ، أثبت أن  $f(K)$  تكون محتوية في مكعب بطول ضلع  $M\sqrt{p}s$  . أثبت أنه إذا كانت  $A \subseteq \Omega$  قبة مدجة بمحتوى صفر ، فإن  $f(A)$  لها محتوى صفر ، وإذا كانت  $B \subseteq \Omega$  قبة مدجة بمحتوى ، فإن  $f(B)$  لها محتوى .

٤٥ - (ب) اعتبر راسم الاحداثى القطبى  $(x, y) = \varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  المعروف على  $\mathbb{R}^2$  ، وسلوكه على القبة  $A = [0, 1] \times [0, 2\pi]$  . استخدم نظرية (٤٥-٤) .

للحصول على معلومات تؤكد للمرة الثانية أن الصورة  $D = \varphi(A)$  ، التي هي وحدة القرص  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$  لها محتوى . افحص الطريقة التي فيها ترسم  $\varphi$  حدود الفئة  $A$  . أثبت أن حدود  $D$  هي الصورة تحت  $\varphi$  لجانب واحد فقط للفئة  $A$  ، وأن الجوانب الثلاثة الأخرى للفئة  $A$  ترسم إلى داخل  $D$  .

٤٥ - (ج) اعتبر الراسم  $(x, y) = \psi(u, v) = (\sin u, \sin v)$  المعروف على  $R^2$  . حدد الصورة لحدود  $B = [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi] \times [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$  تحت  $\psi$  وحدود  $\psi(B)$  . أثبت أن معظم ، مع أن ، ليست جميعها تماماً ، النقاط الحدودية للمنطقة  $\psi(B)$  هي صور لنقاط داخلية من  $B$  .

٤٥ - (د) إذا علم أن المساحة لقرص دائري  $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$  تساوى  $\pi$  أوجد المساحتين لقرصين قطاعي ناقصين معادلتهما

$$\{(x, y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\} \quad (أ)$$

$$\{(x, y) : 2x^2 + 2xy + 5y^2 \leq 1\} \quad (ب)$$

$$(إرشاد :  $2x^2 + 2xy + 5y^2 = (x + 2y)^2 + (x - y)^2$ )$$

٤٥ - (هـ) نفرض أن  $B$  هي الفئة  $\{(x, y) : 0 \leq x, 0 \leq y, 1 \leq x + y \leq 2\}$  . نفرض أن  $u = x + y, v = y$  هي الصورة تحت الراسم  $(x, y) = \varphi(u, v) = (u - v, v)$  . لشبه المنحرف  $C = \{(u, v) : 1 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq u\}$  . أثبت أن  $\varphi$  أحادية على كل من  $R^2$  وأن  $J_\varphi(u, v) = 1$  . استنتج أن

$$\iint_B (x + y) d(x, y) = \iint_C u d(u, v) = \frac{7}{2}$$

٤٥ - (و) نفرض أن  $B = \{(u, v) : 0 \leq u + v \leq 2, 0 \leq v - u \leq 2\}$  باستخدام التحويل  $(x, y) \mapsto (u, v) = (x - y, x + y)$  ، احسب التكامل

$$\iint_B (v^2 - u^2) e^{(u^2 + v^2)/2} d(u, v)$$

٤٥ - (ز) - احسب التكامل المكرر .

$$\int_1^3 \left\{ \int_{x^2}^{x^2+1} xy dy \right\} dx$$

مباشرة . حينئذ استخدم التحويل  $(x, y) \mapsto (u, v) = (x, y - x^2)$  لحساب هذا التكامل .

٤٥ - (ح) احسب مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيات

$$xy = 1, \quad xy = 2, \quad y = x^2, \quad y = 2x^2$$

بتقديم متغير مناسب للمتغير .

٤٥ - (ط) نفرض أن  $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  معرفة بأنها  $(u, v) = \psi(x, y) = (x^2 - y^2, x^2 + y^2)$  لاحظ أن الصورة العكسية تحت  $\psi$  للنقط المستقيم  $u = a > 0$  هي قطع زائد ، والصورة العكسية تحت  $\psi$  للنقط المستقيم  $v = c > 0$  هي دائرة . أثبت أن  $\psi$  ليست أحادية على  $\mathbb{R}^2$  ، لكن تقيدها إلى  $Q = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$  هو راسم أحادي وفوق إلى  $\{(u, v) : v > |u|\}$  . افرض أن  $\varphi$  هي عكس تقييد  $Q$  على  $\psi$  وأثبت أنه إذا كانت  $0 < a < b < c < d$  ، فإن  $\varphi$  يرسم المستطيل  $A = [a, b] \times [c, d]$  إلى المنطقة .

$$\varphi(A) = \{(x, y) : a \leq x^2 - y^2 \leq b, c \leq x^2 + y^2 \leq d\}$$

وضح أنه إذا كانت  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$  متصلة ، فإن

$$\iint_{\varphi(A)} f(x, y) d(x, y) = \iint_A f\left(\left(\frac{u+v}{2}\right)^{1/2}, \left(\frac{v-u}{2}\right)^{1/2}\right) \frac{1}{4(v^2 - u^2)^{1/2}} d(u, v)$$

بوجه خاص ، نجد أن

$$\iint_{\varphi(A)} xy d(x, y) = \iint_A \frac{1}{8} d(u, v) = \frac{1}{8}(b-a)(d-c)$$

٤٥ - (ي) - نفرض أن  $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  هي كما في التمرين السابق . أثبت أن  $\psi$  يرسم المنطقة المثلثية  $\Delta = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$  إلى المنطقة المثلثية

$$\Delta_1 = \psi(\Delta) = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 1, u \leq v \leq 2-u\}$$

هنا  $J_\psi(x, y) = 8xy$  . إذا كانت  $\Omega_0 = (0, 2) \times (0, 2)$  وإذا كانت  $f$  متصلة على  $\Delta_1$  استخدم نظرية (٤٥ - ١١) لإثبات أن

$$\iint_{\Delta} f(u, v) d(u, v) = \iint_{\Delta} f \circ \psi(x, y) |J_\psi(x, y)| d(x, y)$$

وفي حالة خاصة ، أثبت أن

$$\iint_{\Delta} (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{1/2} xy d(x, y) = \frac{1}{8} \iint_{\Delta_1} uv^{1/2} d(u, v)$$

٤٥ - (ك) - نفرض أن  $\alpha < \beta$  تنتمي إلى  $[0, 2\pi]$  ونفرض أن  $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  متصلة وبحيث إن  $h(\theta) \geq 0$  عند  $\theta \in [\alpha, \beta]$  . نفرض أن  $H = \{(\theta, r) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq \theta \leq \beta, 0 \leq r \leq h(\theta)\}$  هي فئة الاحداثى الصادى من  $h$  ( انظر تمرين ٤٤ - س ) ، بحيث إن  $H$  لها محتوى . المنحنى القطبي المتولد من  $h$  هو المنحنى في  $\mathbb{R}^2$  المعروف بأنه  $\theta \mapsto (h(\theta) \cos \theta, h(\theta) \sin \theta)$  وأن فئة الاحداثى الرأسى لهذا المنحنى هو الفئة

$$H_1 = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq \theta < \beta, 0 \leq r \leq h(\theta)\}$$

لاحظ أن  $H_1$  هي صورة  $H$  تحت الراسم القطبي (العكسي)  $\varphi_1(\theta, r) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  واستخدم نظرية (٤٥ - ١١) لإثبات أن

$$c(H_1) = \frac{1}{2} \int_a^b (f(\theta))^2 d\theta$$

٤٥ - (ك) نفرض أن  $a < b$  ونفرض أن  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  متصلة بحيث إن  $f(x) \geq 0$  لكل  $x \in [a, b]$ . كما في تمرين (٤٤ - س)، نفرض أن  $S_f = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$  هي فئة الاحداثى الصادى للدالة  $f$ . نفرض أن  $\rho_x: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  معرفة بأنها  $\rho_x(x, y, \theta) = (x, y \cos \theta, y \sin \theta)$  ونفرض أن  $X_f$  هي الصورة  $S_f \times [0, 2\pi]$  تحت  $\rho_x$ . (تسمى الفئة  $X_f$  « بالجسم الدوراني الناتج من دوران فئة الاحداثى الصادى  $S_f$  حول محور  $x$  » استخدم نظرية (٤٥ - ١١) لإثبات أن

$$c(X_f) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

٤٥ - (م) نفرض أن  $0 \leq a < b$  ونفرض أن  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  وأن  $S_f$  هي كما في التمرين السابق. نفرض أن  $\rho_y: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  معرفة بأنها  $\rho_y(x, y, \theta) = (x \cos \theta, y, x \sin \theta)$  ونفرض أن  $Y_f$  هي صورة  $S_f \times [0, 2\pi]$  تحت  $\rho_y$ . (تسمى الفئة  $Y_f$  « بالجسم الدوراني الناتج من دوران فئة الاحداثى الصادى  $S_f$  حول محور  $y$  »). استخدم نظرية (٤٥ - ١١) لإثبات أن

$$c(Y_f) = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

٤٥ - (ن) بالتحويل إلى إحداثيات قطبية، أثبت أن

$$\iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2})$$

حيث  $C_R = \{(x, y) : 0 \leq x, 0 \leq y, x^2 + y^2 \leq R^2\}$

(ب) إذا كانت  $B_L = \{(x, y) : 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L\}$ ، أثبت أن

$$\iint_{B_L} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) = \left( \int_0^L e^{-x^2} dx \right)^2$$

(ج) من الحقيقة التي تقول إن  $C_R \subseteq B_R \subseteq C_{R\sqrt{2}}$ ، أثبت أن

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

ومن ثم ينتج أن  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

٤٥ - (س) نفرض أن  $B = \{(x, y) : 4x^2 + 9y^2 \leq 4\}$  . استخدم تغيير متغيرات مناسباً لحساب

$$\iint_B e^{-(4x^2+9y^2)} d(x, y) = \frac{\pi}{6} (1 - e^{-4})$$

٤٥ - (ع) لاحظ أن الفئة  $\{(x, y, z) : 0 < x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}, (x^2 + y^2)^{1/2} \leq z \leq (1 - x^2 - y^2)^{1/2}\}$  هي « قطاع مخروطي مقطوع بوحدة الكرات » و الفراغ  $R^3$  . اوجد هذه الفئة كالصورة تحت راسم الإحداثى الكروى  $\Phi$  المحلية  $[0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, \frac{1}{2}\pi]$

(أ) أثبت أن المحتوى لهذه الفئة في  $R^3$  يساوى  $\pi(2 - \sqrt{2})/3$  .

(ب) أوجد المحتوى لهذه الفئة باستخدام راسم الإحداثى الرأسى الأسطوانى

$$\Gamma : (r, \theta, z) \rightarrow (x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

٤٥ - (ف) نفرض أن  $a > 0$  ونفرض أن  $A$  هي تقاطع الفئتين

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2\} \quad \text{و} \quad \{(x, y, z) : z \geq a\}$$

(أ) استخدم راسم إحداثى كروى لإثبات أن  $c(A) = 5\pi a^3/3$

(ب) استخدم راسم إحداثى صادى أسطوانى لإيجاد قيمة  $c(A)$  .

٤٥ - (ص) نفرض أن  $B$  هي تقاطع الفئتين

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\} \quad \text{و} \quad \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$$

(أ) استخدم لراسم الإحداثى الرأسى الكروى لتوضح أن  $c(B) = \pi(4\sqrt{2} - 3)/3$

(ب) استخدم راسم الإحداثى الرأسى الأسطوانى لحساب  $c(B)$  .

٤٥ - (ق) - نفرض أن  $B_p(r) = \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\| \leq r\}$  هي الكرة بنصف قطر  $r > 0$

في الفراغ  $\mathbb{R}^p$  . سوف نحسب المحتوى  $\omega_p(r)$  من  $B_p(r)$  .

(أ) استخدم تغيير المتغيرات لإثبات أن  $\omega_p(r) = r^p \omega_p(1)$

(ب) إذا كانت  $p \geq 3$  ، عبر عن تكامل  $\omega_p(1)$  كتكامل مكرر واستخدم جزء (أ)

لإثبات أن

$$\begin{aligned} \omega_p(1) &= \omega_{p-2}(1) \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 (1-r^2)^{(p/2)-1} r dr \right\} d\theta \\ &= \omega_{p-2}(1) 2\pi/p \end{aligned}$$

(ج) استنتج أنه إذا كانت  $p = 2k$  زوجية ، فإن  $\omega_p(1) = \pi^k/k!$  . إذا كانت

$p = 2k - 1$  فردية ، فإن  $\omega_p(1) = 4^k \pi^{k-1} k! / (2k)!$  بدلالة دالة جاما ، نجد أن

$$\omega_p(1) = \pi^{p/2} / \Gamma(\frac{1}{2}p + 1)$$

(د) أثبت النتيجة الشهيرة  $\lim (\omega_p(1)) = 0$

٤٥ - (ر) سوف نحصل على نتيجة التمرين السابق بطريقة مختلفة . نفرض أن  $p \in \mathbb{N}$  ونفرض أن  $\sigma: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  معرفة بأنها

$$\sigma(\theta) = \sigma(\theta_1, \dots, \theta_p) = (\cos \theta_1, \sin \theta_1 \cos \theta_2, \dots, \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{p-1} \cos \theta_p)$$

(أ) أثبت أن  $\|\sigma(\theta)\|^2 \leq 1$  وأن  $\|\sigma(\theta)\| = 1$  فقط عندما  $\theta_j = 0$  أو  $\theta_j = \pi$  لقيمة ما من  $j = 1, \dots, p$

(ب) أثبت أن  $\sigma$  هي راسم أحادي وفوق  $(0, \pi)^p = (0, \pi) \times \cdots \times (0, \pi)$  مرات عددها  $p$  إلى الداخل  $\{x \in \mathbb{R}^p : \|x\| < 1\}$  لوحدة الكرات  $B_p(1)$ . أثبت أيضاً أن  $\sigma$  ترسم  $[0, \pi]^p$  فوقياً إلى وحدة الكرات لكن ليست أحادية على الحدود .

(ج) بحساب قيمة جاكوبيان الراسم  $\sigma$  ، نحصل على

$$J_\sigma(\theta) = (-1)^p (\sin \theta_1)^p (\sin \theta_2)^{p-2} \cdots (\sin \theta_{p-1})^2 (\sin \theta_p)$$

ومن ثم  $J_\sigma(\theta) \neq 0$  for  $\theta \in (0, \pi)^p$

(د) استخدم قانون حاصل ضرب واليس للتكامل  $\int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^k d\theta$  الذى حصلنا عليه في مشروع (٣٠ - ٧) ، استنبط التعبير للمحتوى  $\omega_p(1)$  في المثال السابق

## مشروع :

٤٥ (أ) - هذا المشروع مؤسس على مشروع (٤٤ - ٧) ويمدنا باقتراب تبادلي لنظرية تغيرات المتغيرات (٤٥ - ٩) أن نفرض  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  مفتوحة ، ونفرض أن  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  تنتمي إلى صنف  $C^1(\Omega)$  أحادية على  $\Omega$  وبحيث إن  $J_\varphi(x) \neq 0$  لكل  $x \in \Omega$  للتبسيط ، نفترض أيضاً أنه يوجد  $M > 0$  بحيث إن  $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq M \|x - y\|$  عند  $x, y \in \Omega$ .

(أ) إذا كانت  $\Phi: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  معرفة بأنها  $\Phi(A) = c(\varphi(A))$  عند  $A \in \mathcal{D}(\Omega)$  فإن  $\Phi$  تقبل الجمع على  $\mathcal{D}(\Omega)$  ولها كثافة قوية تساوى  $|J_\varphi|$  . بالإضافة إلى ذلك عند قيمة ما  $M_1 > 0$  ، نجد أن  $\Phi(A) \leq M_1 c(A)$  لكل  $A \in \mathcal{D}(\Omega)$  .

(ب) إذا كانت  $f$  دالة محدودة قابلة للتكامل على كل فئة  $\varphi(A)$  ، عندما  $A \in \mathcal{D}(\Omega)$  ، إذا كانت  $\Psi: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  معرفة بأنها

$$\Psi(A) = \int_{\varphi(A)} f$$



فإن  $\Psi$  تقبل الجمع على  $\mathcal{D}(\Omega)$  . بالإضافة إلى ذلك ، عند قيمة ما  $M_2 > 0$  ، نجد أن

$$|\Psi(A)| \leq M_2 c(A) \quad \text{لكل } A \in \mathcal{D}(\Omega) .$$

(ج) إذا كانت  $f$  دالة محدودة ومتصلة على  $\varphi(\Omega)$  ، وإذا كانت  $\Psi$  معرفة كما في (ب) أثبت أن  $\Psi$  لها كثافة قوية تساوي  $(f \circ \varphi) |J_\varphi|$  .

(د) إذا كانت  $f$  كما في (ج) ، أثبت أن

$$\int_{\varphi(A)} f = \int_A (f \circ \varphi) |J_\varphi| \quad \text{for } A \in \mathcal{D}(\Omega)$$



## المراجع

تحتوى هذه القائمة عددا من الكتب والمقالات التى وردت فى النص وبعض المراجع الاضافية التى ستساعد فى الدرامات المقبلة .

- Apostol, T. M., *Mathematical Analysis*, Second Edition, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.
- Bartle, R. G., *The Elements of Integration*, Wiley, New York, 1966.
- Boas, R. P., Jr., *A Primer of Real Functions*, Carus Monograph Number 13, Math. Assn. of America, 1960.
- Bruckner, A. M., "Differentiation of Integrals," *Amer. Math. Monthly*, Vol. 78, No. 9, Part II, 1-51 (1971). (H. E. Slaught Memorial Paper, Number 12.)
- Burkill, J. C., and H. Burkill, *A Second Course in Mathematical Analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1970.
- Cartan, H. P., *Cours de Mathématiques*, I. *Calcul Différentiel*; II. *Formes Différentielles*, Hermann, Paris, 1967. (English translation, Houghton-Mifflin, Boston, 1971.)
- Cheney, E. L., *Introduction to Approximation Theory*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- Dieudonné, J., *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York, 1960.
- Dunford, N., and J. T. Schwartz, *Linear Operators*, Part I, Wiley-Interscience, New York, 1958.
- Finkbeiner, D. T., II, *Introduction to Matrices and Linear Transformations*, Second Edition, W. H. Freeman, San Francisco, 1966.
- Gelbaum, B. R., and J. M. H. Olmsted, *Counterexamples in Analysis*, Holden-Day, San Francisco, 1964.
- Halmos, P. R., *Naive Set Theory*, Van Nostrand, Princeton, 1960. (Republished by Springer-Verlag, New York, 1974.)
- Hamilton, N. T., and J. Landin, *Set Theory*, Allyn-Bacon, Boston, 1961.
- Hardy, G. H., J. E. Littlewood, and G. Polya, *Inequalities*, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1959.
- Hewitt, E., and K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1965.

- Hoffman, K., and R. Kunze, *Linear Algebra*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1961.
- Kelley, J. L., *General Topology*, Van Nostrand, New York, 1955.
- Knopp, K., *Theory and Application of Infinite Series* (English translation), Hafner, New York, 1951.
- Lefschetz, S., *Introduction to Topology*, Princeton University Press, Princeton, 1949.
- Luxemburg, W. A. J., "Arzelà's Dominated Convergence Theorem for the Riemann Integral," *Amer. Math. Monthly*, Vol. 78, 970-979 (1971).
- McShane, E. J., "A Theory of Limits," published in *MAA Studies in Mathematics*, Vol. 1, R. C. Buck, editor, Math. Assn. America, 1962.
- , "The Lagrange Multiplier Rule," *Amer. Math. Monthly*, Vol. 80, 922-925 (1973).
- Royden, H. L., *Real Analysis*, Second Edition, Macmillan, New York, 1968.
- Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, Second Edition, McGraw-Hill, New York, 1964.
- Schwartz, J., "The Formula for Change of Variables in a Multiple Integral," *Amer. Math. Monthly*, Vol. 61, 81-85 (1954).
- Simmons, G. F., *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1963.
- Spivak, M., *Calculus on Manifolds*, W. A. Benjamin, New York, 1965.
- Stone, M. H., "The Generalized Weierstrass Approximation Theorem," *Mathematics Magazine*, Vol. 21, 167-184, 237-254 (1947/48). (Reprinted in *MAA Studies in Mathematics*, Vol. 1, R. C. Buck, editor, Math. Assn. America, 1962.)
- Suppes, P., *Axiomatic Set Theory*, Van Nostrand, Princeton, 1961.
- Titchmarsh, E. C., *The Theory of Functions*, Second Edition, Oxford University Press, London, 1939.
- Varberg, D. E., "Change of Variables in Multiple Integrals," *Amer. Math. Monthly*, Vol. 78, 42-45 (1971).
- Woll, J. W., Jr., *Functions of Several Variables*, Harcourt, Brace and World, New York, 1966.
- Wilder, R. L., *The Foundations of Mathematics*, Wiley, New York, 1952.

## ارشادات لتمرينات مختارة :

نحث القارئ على عدم النظر في هذه الإرشادات ما لم يكن مخرجاً ، يحتاج كثير من التمرينات إلى البراهين ، ويوجد أكثر من حل واحد صحيح ، حتى إذا أعطى القارئ نقاشاً مختلفاً كلية فربما يكون نقاشه صحيحاً تماماً . لكن ، لكي تساعد القارئ على فهم المادة العلمية وتطوير مهارته الفنية ، نقدم بعض إرشادات وبعض حلول . سيلاحظ وجود تفصيلات أكثر للمادة المذكورة في الأبواب الأولى .

### باب (1) :

١- (د) حسب تعريف  $A \cap B \supseteq A$  ، إذا كانت  $A \subseteq B$  فإن  $A \cap B \subseteq A$  أي أن  $A \cap B = A$  وبالعكس ، إذا كانت  $A \cap B = A$  فإن  $A \cap B \supseteq A$  ومن ثم ينتج إن  $B \supseteq A$  .

١- (هـ ، و) الاختلاف المتماثل للمقدارين  $A$  و  $B$  هو اتحاد الفئتين  $\{x : x \in A \text{ and } x \notin B\}$  و  $\{x : x \notin A \text{ and } x \in B\}$

١- (ح) إذا كانت  $x$  تنتمي إلى  $E \cap \bigcup A_i$  فإن  $x \in E$  وأن  $x \in \bigcup A_i$  ، لذلك ،  $x \in E \cap A_i$  عند قيمة واحدة للمقدار  $i$  . على الأقل يدل هذا على أن  $x \in E \cap A_i$  لقيمة واحدة للمقدار  $i$  ، بحيث إن

$$E \cap \bigcup A_i \subseteq \bigcup (E \cap A_i)$$

يرهن الاستنتاج العكسي بمكس هذه الخطوات . يعامل التساوى الآخر بالمثل .

١- (ل) إذا كانت  $x \in \mathcal{C}(\bigcap \{A_i : i \in J\})$  ، فإن  $x \notin \{A_i : i \in J\}$  . هذا يدل على أنه يوجد  $k \in J$  بحيث إن  $x \notin A_k$  . لذلك  $x \in \mathcal{C}(A_k)$  ومن ثم  $x \in \bigcup \{\mathcal{C}(A_i) : i \in J\}$  . يرهن هذا  $\mathcal{C}(\bigcap A_i) \subseteq \bigcup \mathcal{C}(A_i)$  . يرهن الاستنتاج العكسي بمكس هذه الخطوات . برهان التساوية الأخرى مائل .

## باب (٢) :

٢- (أ) إذا كانت  $(a, c)$  و  $(a, c')$  تنتمي إلى  $g \circ f$  ، فإنه توجد  $b, b'$  في  $B$  بحيث إن  $(a, b)$  و  $(a, b')$  تنتمي إلى  $f$  وأن  $(b, c)$  و  $(b', c')$  تنتمي إلى  $g$ . بما أن  $f$  دالة ، فإن  $b = b'$  ؛ بما أن  $g$  دالة ، فإن  $c = c'$  .

٢- (ب) لا . كلا من  $(0, 1)$  و  $(0, -1)$  تنتمي إلى  $C$

٢- (د) افرض  $f(x) = 2x, g(x) = 3x$

٢- (هـ) إذا كانت  $(b, a), (b, a')$  تنتمي إلى  $f^{-1}$  ، فإن  $(a', b), (a, b)$  تنتمي إلى  $f$  . بما أن  $f$  غير أحادية ، فإن  $a = a'$  . ومن ثم تكون  $f^{-1}$  دالة .

٢- (ز) إذا كانت  $f(x_1) = f(x_2)$  فإن  $x_1 = g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) = x_2$  ومن ثم تكون  $f$  غير أحادية .

٢- (ح) استخدم تمرين (٢- ز) مرتين .

## باب (٣) :

٣- (أ) افرض  $f(n) = n/2, n \in E$

٣- (ب) افرض  $f(n) = (n+1)/2, n \in O$

٣- (ج) افرض  $f(n) = n+1, n \in N$

٣- (هـ) افرض  $A_n = \{n\}, n \in N$  . حينئذ لكل فئة  $A_n$  نقطة وحيدة ، لكن  $\bigcup \{A_n : n \in N\}$  لانهائية .

٣- (و) - إذا كانت  $A$  لانهائية وكانت  $B = \{b_n : n \in N\}$  فئة جزئية من  $A$  ، حينئذ الدالة معرفة بأنها .

$$\begin{aligned} f(x) &= b_{n+1}, & x &= b_n \in B \\ &= x_n, & x &\in A \setminus B \end{aligned}$$

هي راسم أحادي وترسم  $A$  إلى  $A \setminus \{b_1\}$  فوقياً .

٣- (ح) إذا كانت  $f$  راسماً أحادياً يرسم  $A$  إلى  $B$  فوقياً وكانت  $g$  راسماً أحادياً يرسم  $B$  إلى  $C$  فوقياً ، حينئذ تكون  $g \circ f$  راسماً أحادياً يرسم  $A$  إلى  $C$  فوقياً .

## باب (٤) :

٤- (ز) اعتبر ثلاث حالات :  $p = 3k, p = 3k + 1, p = 3k + 2$

## باب (٥) :

- ٥- (أ) بما أن  $a^2 \geq 0, b^2 \geq 0$  ، فإن  $a^2 + b^2 = 0$  تدل على أن  $a^2 = b^2 = 0$  .
- ٥- (د) إذا كانت  $c = 1 + a$  حيث  $a > 0$  ، فإن :
- $$c^n = (1 + a)^n \geq 1 + na \geq 1 + a = c$$
- ٥- (ز) لاحظ أن  $2^1 = 2 < 1$  . إذا كانت  $k < 2^k$  عند  $k \geq 1$  ، فإن  $n \in \mathbb{N}$  لكل  $n < 2^n$  وإذن  $k + 1 \leq 2k < 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$
- ٥- (ح) لاحظ أن  $b^n - a^n = (b - a)(b^{n-1} + \dots + a^{n-1}) = (b - a)p$  ، حيث  $p > 0$  .
- ٥- (م)  $\{(x, y) : y = \pm x\}$
- ٥- (ن) مربع برنوس  $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$

## باب (٦) :

- ٦- (أ) إذا كانت  $A = \{x_i\}$  ، فإن  $x_i = \sup A$  .
- إذا كانت  $A = \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$  وإذا كانت  $u = \sup \{x_1, \dots, x_n\}$  وضع أن  $\sup \{u, x_{n+1}\}$  هو أعلى  $A$  .
- ٦- (ج) افرض  $S = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$
- ٦- (أ) في الحقيقة  $\sup A \cup B = \sup \{\sup A, \sup B\}$
- ٦- (ح) إذا كانت  $S = \sup \{f(x, y) : x \in X, y \in Y\}$  فإن  $f_i(x) \leq S$  لجميع  $x \in X, y \in Y$  وإذن  $f(x, y) \leq S$  لجميع  $x \in X$
- ومن ثم  $\sup \{f_i(x) : x \in X\} \leq S$  . وبالعكس ، إذا كانت  $\varepsilon > 0$  فإنه توجد  $(x_0, y_0)$  بحيث إن  $S - \varepsilon < f(x_0, y_0)$  وإذن  $S - \varepsilon < f_i(x_0)$  ويكون :
- $$S - \varepsilon < \sup \{f_i(x) : x \in X\}$$
- بما أن  $\varepsilon > 0$  اختيارية ، فنستنتج أن :
- $$S \leq \sup \{f_i(x) : x \in X\}$$
- ٦- (ك) بما أن  $f(x) \leq \sup \{f(z) : z \in X\}$  ، فينتج أن :
- $$f(x) + g(x) \leq \sup \{f(z) : z \in X\} + \sup \{g(z) : z \in X\}$$
- لذلك يكون  $\sup \{f(x) + g(x) : x \in X\}$  أقل من أو يساوي الطرف الأيمن .
- بالمثل ، إذا كانت  $x \in X$  ، فإن :
- $$\inf \{f(z) : z \in X\} + g(x) \leq f(x) + g(x)$$

إذا استخدمنا (٦-٥) ، نستنتج أن

$$\inf \{f(z) : z \in X\} + \sup \{g(x) : x \in X\} \leq \sup \{f(x) + g(x) : x \in X\}.$$

تبرهن المطلوبات الأخرى بطريق مماثلة .

## باب (٧) :

٧-٧ (ب) نفرض أن  $a \in A$  ؛ إذا كانت  $a \notin A$  فإن  $a \in B$  وإذن  $a \leq \xi' < \xi$  ما يخالف الفرض وإذن  $a \in A'$  وبما أن  $a \in A$  اختيارية فيكون  $A \subseteq A'$  . بما أن  $\xi' < \xi$  ، فإنه توجد  $x \in \mathbb{R}$  حيث  $\xi < x < \xi'$  . بما أن  $\xi < x$  فيجب أن يكون  $x \in B$  . لكن بما أن  $x \in A'$  نستنتج أن  $A \neq A'$  .

٧-٧ (ج) افرض :

$$A = \{x : x < 1\}, B = \{x : x \geq 1\} \text{ and } A' = \{x : x \leq 1\}, B' = \{x : x > 1\}$$

٧-٧ (د) إذا كانت  $x \in I_n$  لكل  $n$  ، فينتج تناقض لخاصية أرشميدس ٦-٦ .

٧-٧ (و) إذا كانت  $x \in J_n$  لكل  $n$  ، فينتج تناقض لنتيجة ٧-٦ (ب) .

٧-٧ (ح) كل عنصر في  $F_1$  له مفكوك ثلاثة . أول رقم فيه هو إما صفر أو 2 . اللفظ في الفترات الأربع الجزئية من  $F_2$  لها مفكوكات ثلاثية تبدأ كالاتي :

$$0.00 \dots, 0.02 \dots, 0.20 \dots, 0.22 \dots$$

إلى آخره

٧-٧ (ى) إذا كانت  $n$  كبيرة كبراً كافياً فإن  $1/3^n < b - a$  ،

٧-٧ (ك) قريباً من ١ كالمطلوب .

## باب (٨) :

٨-٨ (أ) لا تتحقق خاصية ٨-٣ (ii)

٨-٨ (ح) الفتحة  $S_1$  هي الداخل للمربع الذى رؤوسه  $(0, \pm 1), (\pm 1, 0)$  والفتحة  $S_2$

هي الداخل للمربع الذى رؤوسه  $(1, \pm 1), (-1, \pm 1)$

٨-٨ (ك) خذ  $a = 1/\sqrt{p}, b = 1$

٨-٨ (ل) خذ  $a = 1/p, b = 1$

٨-٨ (م) عندنا  $|x \cdot y| \leq \sum |x_i| |y_i| \leq \{\sum |x_i|\} \sup |y_i| \leq \|x\|_1 \|y\|_\infty$  لكن

$|x \cdot y| \leq p \|x\|_\infty \|y\|_\infty$  وإذا كانت  $x = y = (1, 1, \dots, 1)$  فإننا نصل إلى التساوى .

٨-٨ (ن) العلاقة المنصوبة تدل على أن



$$\|x\|^2 + 2(x \cdot y) + \|y\|^2 = \|x + y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \\ - \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

ومن ثم  $x \cdot y = \|x\|\|y\|$  ويظل شرط التساوى الموجود في نظرية ( ٨ - ٧ ) قائماً بشرط كون المتجهات لا تساوى صفراً .

٨ - (ع) بما أن  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \cdot y) + \|y\|^2$  . فإن العلاقة المذكورة تظل صحيحة إذا وإذا فقط

٨ - (ف) تسمى فئة  $K$  محدبة إذا وإذا فقط كانت تحتوى جزء الخط المستقيم الواصل بين أى نقطتين في  $K$  . إذا كانت  $x, y \in K$  ، حينئذ :

$$\|tx + (1-t)y\| \leq t\|x\| + (1-t)\|y\| \leq t + (1-t) = 1$$

كذلك  $tx + (1-t)y \in K$  عند  $0 \leq t \leq 1$  . النقطتان  $(\pm 1, 0)$  تنتميان إلى  $K_4$  ، لكن نقطة المنتصف  $(0, 0)$  لا تنتمى إلى  $K_4$  .

٨ - (ص) إذا كانت  $x, y$  تنتمى إلى  $K_\alpha$  ، فإن  $x, y \in K_\alpha$  لكل  $\alpha$  . ومن ثم  $tx + (1-t)y \in K_\alpha$  لكل  $\alpha$  ومنها ينتج أن  $K_\alpha \cap K_\beta$  محدبة . اعتبر الاتحاد لفترتين غير متصلتين .

## باب (٩) :

٩ - (أ) إذا كانت  $x \in G$  ، افرض  $r = \inf\{x, 1-x\}$  حينئذ ، إذا كانت  $|y-x| < r$  ، نحصل على  $x-r < y < x+r$  ومنها  $0 \leq x-r < y < x+r \leq 1$  بحيث إن  $y \in G$  . إذا كانت  $z = 0$  ، فإنه لا يوجد عدد حقيقى  $r > 0$  بحيث إن كل نقطة  $y$  في  $R$  تحقق  $|y| < r$  تنتمى إلى  $F$  . بالمثل عند  $z = 1$  .

٩ - (ب) إذا كانت  $x \in G$  ، خذ  $r = 1 - \|x\|$  . إذا كانت  $x \in H$  ، خذ  $r = \inf\{\|x\|, 1 - \|x\|\}$  . إذا كانت  $z = (1, 0)$  إذن لكل  $r > 0$  ، توجد نقطة  $y$  في  $\mathcal{G}(F)$  بحيث إن  $\|y-z\| < r$  .

٩ - (ز) أسرد النقط في الفئة المفتوحة التى جميع إحداثياتها أعداد قياسية . حينئذ استخدم خطوات البرهان لنظرية ( ٩ - ١١ ) مستخدماً كوراً مفتوحة مركزها عند هذه النقط القياسية .

٩ - (ح) ناقش كما في التمرين السابق ، لكن استخدم هذه المرة كوراً منغلقة

٩ - (ط) خذ المكملات واستخدم ٩ . ح .

٩ - (ى) الفئة  $A^0$  هي اتحاد لمجموعة جميع الفئات المفتوحة في  $A$  . ومن ثم أى فئة مفتوحة  $G \subseteq A$  يجب أن تكون محتوية في  $A^0$  . حسب تعريفها يجب أن يكون  $A^0 \subseteq A$  . ينتج أن

$(A^0)^0 \subseteq A^0$  . بما أن  $A^0$  مفتوحة وأن  $(A^0)^0$  هي الاتحاد لجميع الفئات المفتوحة في  $A^0$  ، يجب أن يكون  $A^0 \subseteq (A^0)^0$  . وإذن  $(A^0)^0 = A^0$  . بما أن  $A^0 \subseteq A$  و  $B^0 \subseteq B$  ، فينتج أن :  $A^0 \cap B^0 \subseteq A \cap B$  ، لكن بما أن  $A^0 \cap B^0$  مفتوحة فهذا يدل على أن  $(A^0 \cap B^0)^0 \subseteq (A \cap B)^0$  . ومن زاوية أخرى تكون  $(A \cap B)^0$  فئة مفتوحة محتوية في  $A, B$  ؛ وإذن  $(A \cap B)^0 \subseteq A^0$  و  $(A \cap B)^0 \subseteq B^0$  ، ومنها  $(A \cap B)^0 \subseteq A^0 \cap B^0$  وبالتالي  $A^0 \cap B^0 = (A \cap B)^0$  . بما أن  $R^0$  مفتوحة ، فإن  $(R^0)^0 = R^0$  .

نفرض أن  $A$  هي فئة جميع الأعداد القياسية في  $(0, 1)$  ، وأن  $B$  هي فئة كل الأعداد غير القياسية في  $(0, 1)$  . حينئذ  $A^0 \cup B^0 = \emptyset$  . بينما  $(A \cup B)^0 = (0, 1)$  .

٩ - (ل) ناقش كما في ٩ . ي ، أوخذ المكملات واستخدم ٩ .

٩ - (ن) إذا كانت  $p = 1$  ، خذ  $A = Q$  في  $R^0$  ، خذ  $Q^0$  .

٩ - (س) افرض أن  $A, B$  مفتوحتان في  $R$  . نفرض أن  $(x, y) \in A \times B$  بحيث  $x \in A$  و  $y \in B$  . توجد  $r > 0$  بحيث إنه إذا كانت  $|x' - x| < r$  فإن  $x' \in A$  ،  $s > 0$  فإن  $|y' - y| < s$  و  $y' \in B$  . افرض الآن  $t = \inf \{r, s\}$  الكرة المفتوحة التي نصف قطرها  $t$  تكون محتوية في  $A \times B$  . العكس يكون مشابهاً .

## باب (١٠) :

١٠ - (ج) إذا كانت  $x$  نقطة حشد من  $A$  في  $R^0$  وكان  $N$  جواراً من  $x$  ، حينئذ  $N \cap \{y \in R^0 : \|y - x\| < 1\}$  تحتوي نقطة  $a_1 \in A, a_1 \neq x$  . تحتوي الفئة  $N \cap \{y \in R^0 : \|y - x\| < \|a_1\|\}$  نقطة  $a_2 \in A, a_2 \neq a_1$  وأيضاً  $a_2 \neq a_1$  أكمل هذه الطريقة .

١٠ - (و) كل جوار  $x$  يحتوي قطعاً كثيرة عددها لا نهائي للفئة  $A \cup B$  . ومن ثم إما  $A$  أو  $B$  (أو ربما كليهما) يجب أن يكون له عدد لا نهائي من العناصر في هذا الجوار .

## باب (١١) :

١١ - (أ) افرض أن  $G_n = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1 - 1/n\}$  عند  $n \in \mathbb{N}$  .

١١ - (ب) افرض أن  $G_n = \{(x, y) : x^2 + y^2 < n^2\}$  عند  $n \in \mathbb{N}$  .

١١ - (ج) افرض أن  $\mathcal{G} = \{G_n\}$  غطاء مفتوحاً للدالة  $F$  وافرض أن  $G = \mathcal{G}(F)$  ، أى إن  $G$  مفتوحة في  $R^0$  . إذا كانت  $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G} \cup \{G\}$  ، فإن  $\mathcal{G}_1$  غطاء مفتوح للفئة  $K$  ، حينئذ يكون للفئة  $K$  غطاء جزئى محدود  $\{G, G_0, G_1, \dots, G_n\}$  . وإذن يكون  $\{G_n, G_0, \dots, G_n\}$  غطاء جزئياً من  $\mathcal{G}$  للفئة  $F$  .

١١ - (د) لاحظ أنه إذا كانت  $G$  مفتوحة في  $R$  ، فإنه توجد فئة جزئية مفتوحة  $G_1$  من  $R^2$  بحيث إن  $G = G_1 \cap R$  . استخدم نظرية هاین بورال - بالتناوب .

١١- (أ) نفرض أن  $\mathcal{G} = \{G_n\}$  غطاء مفتوحاً لوحدة الفترات المغلقة  $J$  في  $\mathbb{R}$  اعتبر تلك الأعداد الحقيقية  $x$  بحيث إن المربع  $[0, x] \times [0, x]$  يكون محتوياً في الاتحاد لعدد محدود لفئات في  $\mathcal{G}$  وافرض  $x^*$  هو أعلاها .

١١- (ز) افرض أن  $x_n \in F_n, n \in \mathbb{N}$  . إذا كان يوجد فقط عدد محدود من نقاط في  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  ، حينئذ يحدث واحدة منها على الأقل غالباً مرات عددها لا نهائياً وتكون نقطة مشتركة . إذا كان يوجد فقط كثيرة عددها لا نهائياً في الفئة المحدودة  $\{x_n\}$  ، حينئذ توجد نقطة حشد  $x$  . بما أن  $x_m \in F_n$  عند  $m \geq n$  وبما أن  $F_n$  مغلقة ، فإن  $x \in F_n$  لكل  $n \in \mathbb{N}$  .

١١- (ح) إذا كانت  $d(x, F) = 0$  ، فإن  $x$  نقطة حشد للفئة المغلقة  $F$  .

١١- (ى) لا . افرض  $F = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| = r\}$  ، حينئذ كل نقطة من  $F$  تقع على نفس المسافة من  $x$  .

١١- (ك) افرض أن  $G$  فئة مفتوحة وافرض أن  $x \in \mathbb{R}^n$  . إذا كانت :  $H = \{y - x : y \in G\}$  فإن  $H$  فئة مفتوحة في  $\mathbb{R}^n$  .

١١- (م) اتبع النقاش في ١١ - ٧ ، ما عدا استخدام خلايا مفتوحة بدلاً من كور مفتوحة .

١١- (ف) افرض أن  $Q = \bigcap \{G_n : n \in \mathbb{N}\}$  ، حيث  $G_n$  مفتوحة في الفراغ  $\mathbb{R}$  . المكمل  $F_n$  للفئة  $G_n$  فئة مغلقة لا تحتوى أى فئة جزئية مفتوحة غير خالية ، حسب نظرية ٦ - ١٠ . ومن ثم تكون الفئة لعناصر غير قياسية هي اتحاد عائلة معدودة لفئات مغلقة لا تحتوى أى واحدة منها على فئة مفتوحة غير خالية ، لكن هذا يخالف تمرين ١١ . ع .

## باب (١٢) :

١٢- (ب) افرض أن  $A$  و  $B$  قطع عند  $C' = CU\{x\}$  . حينئذ  $B \cap C' \cap A \cap C' = \emptyset$  . غير مرتبطين ، غير خاليتين ، ولهما اتحاد  $C'$  يجب أن تحتوى إحدى هاتين الفئتين على  $x$  ، افرض أنها  $B$  . بما أن  $B$  فئة مفتوحة ، فتحوى أيضاً نقطة من  $C$  أى إن  $C \cap (B \setminus \{x\}) \neq \emptyset$  لكن حينئذ تكون  $A, B \setminus \{x\}$  قطعاً من  $C$  .

١٢- (أ) عدل برهان النظرية ١٢ - ٤ .

١٢- (ز) حسب نظرية ١٢ - ٨ ، تكون الفئتان  $C_1, C_2$  فترتين . من السهل ملاحظة أن  $C_1 \times C_2$  محبة أى أن ١٢ - (أ) تطبيق .

## باب (١٣) .

- ١٣- (أ) اختبر الوضع الهندسي  $iz = (-y, x)$  بدلالة  $z = (x, y)$  .  
 ١٣- (ب) لاحظ أن  $cz = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$  ، وهذا يناظر دوران عكس عقرب الساعة بزاوية نصف قطرية  $\theta$  . وحول نقطة الأصل .

- ١٣- (ج) ترسم الدائرة  $|z - c| = r$  إلى الدائرة  $|w - (ac + b)| = |a| r$  يمكننا كتابة  $z = a^{-1}w - a^{-1}b$  وتحسب  $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$  بدلالة  $u = \operatorname{Re} w, v = \operatorname{Im} w$  .  
 بإجراء هذا نجد من السهل ملاحظة أن المعادلة  $ax + by = c$  تتحول إلى معادلة في الصورة  $Au + Bv = C$  .

- ١٣- (د) تترك دائرة كما هي ثابتة بواسطة  $g$  إذا وإذا فقط كان مركزها يقع على المحور الحقيقي . الخطوط التي تركت ثابتة بواسطة  $g$  هما فقط المحور الحقيقي والمحور التخيلي .  
 ١٣- (هـ) ترسل دوائر مارة بنقطة الأصل إلى خطوط بواسطة  $h$  . ترسل كل الخطوط التي تمر بنقطة الأصل إلى دوائر مارة بنقطة الأصل ، ترسل كل الخطوط المارة بنقطة الأصل إلى خطوط مارة بنقطة الأصل .

- ١٣- (و) كل نقطة من  $\mathbb{C}$  ، ماعدا نقطة الأصل ، من الصورة تحت  $g$  لعنصرين من  $\mathbb{C}$  . إذا كانت  $\operatorname{Re} g(z) = k$  ، فإن  $x^2 - y^2 = k$  . إذا كانت  $\operatorname{Im} g(z) = k$  ، فإن  $2xy = k$  . إذا كانت  $|g(z)| = k$  ، فإن  $k \geq 0$  وأن  $|z| = \sqrt{k}$  .

## باب (١٤) :

- ١٤- (ب) لاحظ أن  $0 \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n}$  .  
 ١٤- (د) لدينا  $0 \leq \|x_n\| - \|x\| \leq \|x_n - x\|$  .  
 ١٤- (ط) افرض أن  $r \in \mathbb{R}$  بحيث إن  $r < 1$  بما أن الفترة  $(-1, r)$  هي جوار هذه النهاية ، فتوجد  $K \in \mathbb{N}$  بحيث إن  $0 < x_{n+1}/x_n < r$  لكل  $n \geq K$  . وضع الآن أن  $0 < x_n < Cr^n$  عند بعض  $C$  ،  $n \geq K$  .  
 ١٤- (ك) اعتبر  $(n)$  و  $(1/n)$  .  
 ١٤- (ل) المتتابعات (أ) ، (ب) ، (هـ) ، (و) تتقارب ؛ المتتابعان (ج) ، (د) تتباعدان .

- ١٤- (م) افرض أن  $r \in \mathbb{R}$  بحيث إن  $r < 1$  بما أن الفترة  $(-1, r)$  جوار هذه النهاية ، فتوجد  $K \in \mathbb{N}$  بحيث إن  $0 < x_n^{1/n} < r$  ، ومنها  $0 < x_n < r^n$  لكل  $n \geq K$  .

## باب (١٥) :

- ١٥- (أ) اعتبر  $z_n = y_n - x_n$  ، استخدم مثال ١٥-٥ (ج) ونظرية ١٥-٦ (أ) .  
 ١٥- (ج) (أ) تتقارب إلى ١ . (ب) تتباعد . (و) تتباعد .  
 ١٥- (د) افرض  $Y = -X$  .  
 ١٥- (و) اعتبر حالتين :  $x = 0$  و  $x > 0$  .  
 ١٥- (ز) نعم  
 ١٥- (ح) استخدم الإرشاد في (تمرين ١٥-٦ و) .  
 ١٥- (ل) لاحظ أن  $b \leq x_n \leq b2^{1/n}$  .

## باب (١٦) :

- ١٦- (أ) بالاستنتاج يكون  $1 < x_n < 2$  عند  $n \geq 2$  . بما أن :  
 $x_{n+1} - x_n = (x_n - x_{n-1}) / (x_n x_{n-1})$  فإن المتتابة مطردة .  
 ١٦- (ج) المتتابة رتيبة ومحدودة . النهاية هي  $(1 + (1 + 4a)^{1/2}) / 2$   
 ١٦- (د) المتتابة  $X$  تتناقص باطراد ومحدودة .  
 ١٦- (هـ) يسمى عنصر  $x_k$  من  $X = (x_n)$  « قبة »  $X$  إذا كانت  $x_k \geq x_n$  عندما  $n > k$  .  
 إذا كانت هناك قم كثيرة لا نهائية بأدلة  $k_1 < k_2 < \dots$  ، فإن المتتابة  $(x_{k_j})$  للقم متتابة جزئية متناقصة من  $X$  .  
 إذا كان يوجد فقط عدد محدود من قم بأدلة  $k_1 < \dots < k_r$  ، افرض أن  $m_1 > k_r$  بما أن  $x_{m_1}$  ليست قبة ، فتوجد  $m_2 > m_1$  بحيث إن  $x_{m_1} < x_{m_2}$  .  
 بالاستمرار بهذه الطريقة نحصل على متتابة جزئية متزايدة بدقة  $(x_{m_j})$  من  $X$  .  
 ١٦- (ز) المتتابة تزايدية ،  $x_n \leq n/(n+1) < 1$  .  
 ١٦- (ك) توجد  $K \in \mathbb{N}$  بحيث إنه إذا كانت  $n \geq K$  ، فإن :  

$$L - \varepsilon \leq x_{n+1}/x_n \leq L + \varepsilon$$
  
 استخدم الآن نقاشاً مشابهاً للنقاش الموجود في تمرين ١٤-١ .  
 ١٦- (م) (أ)  $e^{1/2}$  ،  $e$   
 (ج) إرشاد :  $(1 + 2/n) = (1 + 1/n)(1 + 1/(n+1))$   
 (د)  $e^3$  .

١٦ - (ع) - أوجد أن  $y_n \in F$  بحيث إن  $\|x - y_n\| < d + 1/n$  . إذا كانت  $y = \lim (y_n)$  فإن  $\|x - y\| = d$

### باب (١٧) :

١٧ - (أ) - الجميع .

١٧ - (ج) - إذا كانت  $x \in \mathbb{Z}$  ، فإن النهايات ؛ إذا كانت  $x \notin \mathbb{Z}$  ، فإن النهاية صفر .

١٧ - (د) - إذا كانت  $x = 0$  ، فإن النهاية  $= 1$  ؛ إذا كانت  $x \neq 0$  ، فإن النهاية  $=$  صفر .

١٧ - (ز) - إذا كانت  $0 < \varepsilon < \pi/2$  و  $x > 0$  ، فإن  $(\pi/2 - \varepsilon) > 0$  . ويكون  $\pi/2 - \varepsilon \leq \text{Arc tan } nx \leq \pi/2$  . لكل  $n \geq n_\varepsilon$  ، التي منها ينتج أن :  $\tan(\pi/2 - \varepsilon) \leq nx \leq \tan(\pi/2)$

١٧ - (ح) - إذا كانت  $x > 0$  ؛ فإن  $e^{-x} < 1$  (١٧ - (ي) ليس ضرورياً .

١٧ - (م) - اعتبر المتابعة  $(1/n)$  أو لاحظ أن  $\|f_n\|_0 \geq \frac{1}{2}$

١٧ - (ع) نعم ١٧ - (ف) نعم .

### باب (١٨) :

١٨ - (أ) (أ)  $\pm 1$  . (ب)  $0$  . (ج)  $\pm 1$  (د)  $\pm 1$

١٨ - (هـ) - افرض أن  $p \in \mathbb{N}$  ،  $p \leq m$  ، حيث  $v_m(X+Y) = \sup \{x_n + y_n : n \geq p\}$

$$\geq m\} \leq \sup \{x_n : n \geq m\} + \sup \{y_n : n \geq m\} = v_m(X) + v_m(Y) \leq v_p(X) + v_m(Y)$$

$$\text{وإذن } (x+y)^* = \inf \{v_m(X+Y) : m \in \mathbb{N}\} \leq v_p(X) + y^*$$

بما أن هذا يكون صحيحاً لكل  $p \in \mathbb{N}$  ، نستنتج أن  $(x+y)^* \leq x^* + y^*$

١٨ - (ز) (أ)  $\pm \infty$  . (ج)  $0, +\infty$

### باب (١٩) :

١٩ - (أ) - إذا كانت  $n \leq j$  ، فإن  $x_j(1 + 1/n) \leq x_j + (1/n)x_{n+1}$  و  $x_j \leq x_{n+1}$

الآن اجمع .

١٩ - (ط) - إذا كانت  $X$  تزايدية وغيرها تقاربية في  $\mathbb{R}$  ، فإن  $X$  غير محدودة .

١٩ - (ك) (أ) لا يوجد . (ب ، ج) كل الثلاثة متساوية .

(د) النهايتان المكررتان مختلفتان والنهاية المزدوجة غير موجودة

(هـ) النهاية المزدوجة تساوى نهاية مكررة واحدة .

(و) النهايتان المكررتان متساويتان ، لكن النهاية المزدوجة غير موجودة .

١٩- (ل) افرض أن  $x_{mn} = n$  إذا كانت  $m = 1$  وأن  $x_{mn} = 0$  إذا كانت  $m > 1$

١٩- (ن) في (ب ، ج ، د) .

١٩- (س) طبق نتيجة ١٩-٧ إلى  $x = \sup \{x_{mn} : m, n \in \mathbb{N}\}$

١٩- (ع) افرض  $x_{mn} = 0$  عند  $m < n$  وأن  $x_{mn} = (-1)^m/n$  عند  $m \geq n$

## باب (٢٠) :

٢٠- (أ) إذا كانت  $a = 0$  خذ  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^2$  . إذا كانت  $a > 0$  ، استخدم التقدير

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}}$$

٢٠- (ب) استخدم مثال ٢٠ - ٥ (ب) ونظرية ٢٠ - ٦ .

٢٠- (ج) استخدم تمرين ٢٠ - (ب) ونظرية ٢٠ - ٦ .

٢٠- (د) أثبت أن  $|f(x) - f(\frac{1}{2})| = |x - \frac{1}{2}|$

٢٠- (و) كل عدد حقيقي هو نهاية متتابعة لأعداد قياسية .

٢٠- (ي) توجد متتابعتان  $(x_n), (y_n)$  بحيث إن  $\lim (h(x_n)) = 1$  ،  $\lim (h(y_n)) = -1$

٢٠- (ل) أثبت أن  $f(a+h) - f(a) = f(h) - f(0)$  . إذا كانت  $f$  مطردة على

$\mathbb{R}$  ، فإنها تكون متصلة عند نقطة ما .

٢٠- (م) أثبت أن  $f(0) = 0$  وأن  $f(n) = nc$  عند  $n \in \mathbb{N}$  . أيضاً

$f(m/n) = mf(1/n)$  وبما أن  $f(n) = nc$  عند  $n \in \mathbb{Z}$  ، ولذا  $f(n) + f(-n) = 0$

فنتج بأخذ  $m = n$  ، أن  $f(1/n) = c/n$  ، إذن  $f(m/n) = c(m/n)$  . الآن استخدم اتصال  $f$  .

٢٠- (ن) أما  $g(0) = 0$  وفي هذه الحالة  $g(x) = 0$  لكل  $x \in \mathbb{R}$  ، أو  $g(0) = 1$

وفي هذه الحالة  $g(a+h) - g(a) = g(a)\{g(h) - g(0)\}$

## باب (٢١) :

٢١- (ج)  $f(1, 1) = (3, 1, -1)$  ،  $f(1, 3) = (5, 1, -3)$

٢١- (د) متجه  $(a, b, c)$  في مدى الدالة  $f$  إذا وإذا فقط  $a - 2b + c = 0$

٢١- (ز) إذا كانت  $\Delta = 0$  ، فإن  $f(-b, a) = (0, 0)$  . إذا كانت  $\Delta \neq 0$

فإن الحل الوحيد للمعادلتين

$$ax + by = 0, \quad cx + dy = 0$$

$$(x, y) = (0, 0) \text{ هو}$$

$$21 - (ط) \text{ لاحظ أن } g(x) = g(y) \text{ إذا وإذا فقط كانت } g(x - y) = \theta$$

$$21 - (ع) \text{ لاحظ أن } c_0 = e_1 \cdot f(e_1) \text{ واستخدم متباينة شيفارتز .}$$

## باب (٢٢) :

$$22 - (ج) \text{ إذا كانت } f(x_0) > 0, \text{ فإن } V = \{y \in \mathbb{R} : y > 0\} \text{ جوار } f(x_0).$$

$$22 - (ح) \text{ افرض أن } f(s, t) = 0 \text{ إذا } f(s, t) = 1 \text{ فإن } st = 0 \text{ إذا كانت } st \neq 0.$$

$$22 - (ل) \text{ افرض أن معامل أكبر قوة موجب . أثبت أنه يوجد } x_1 < 0 < x_2 \text{ بحيث إن } f(x_1) < 0 < f(x_2)$$

$$22 - (م) \text{ افرض أن } f(x) = x^n. \text{ إذا كانت } c > 1, \text{ فإن } f(0) = 0 < c < f(c)$$

$$22 - (ن) \text{ إذا كانت } f(c) > 0, \text{ فيوجد جوار من } c \text{ تكون عليه } f \text{ موجبة , ومن ثم } c \neq \sup N. \text{ بالمثل إذا كانت } f(c) < 0.$$

$$22 - (س) \text{ بما أن } f \text{ متزايدة بدقة , وأن } a < b, \text{ فإن } f \text{ ترسم الفترة المفتوحة } (a, b) \text{ في نمط أحادي فوق الفترة المفتوحة } (f(a), f(b)), \text{ التي منها ينتج أن } f^{-1} \text{ متصلة .}$$

$$22 - (ع) \text{ نعم . افرض أن } a < b \text{ ثابتة وافرض أن } f(a) < f(b). \text{ إذا كانت } c \text{ بحيث إن } a < c < b, \text{ فإنه إما (i) } f(c) = f(a), \text{ (ii) } f(c) < f(a), \text{ أو (iii) } f(a) < f(c). \text{ حالة (i) مرفوضة من الفرض . إذا كانت (ii), \text{ فإنه توجد } a_1 \text{ في } (c, b) \text{ بحيث أن } f(a_1) = f(a), \text{ وهذا يخالف . حينئذ تظل (iii) صحيحة بالمثل } f(c) < f(b) \text{ وأن } f \text{ متزايدة بدقة .}$$

$$22 - (ف) \text{ افرض أن } g \text{ متصلة وافرض أن } c_1 < c_2 \text{ هما النقطتان في } I \text{ التي عندهما تصل } g \text{ لأعلاها . إذا كانت } c_1 < 0, \text{ اختر عددين } a_1, a_2 \text{ بحيث إن } 0 < a_1 < c_1 < a_2 < c_2 \text{ افرض أن } k \text{ تحقق } g(a_1) < k < g(c_1). \text{ حينئذ توجد ثلاثة أعداد } b_1, b_2 \text{ بحيث إن } a_1 < b_1 < c_1 < b_2 < a_2 < b_3 < c_2 \text{ وحيث } k = g(b_1), \text{ بما يخالف الفرض . لذلك , يجب أن يكون } c_1 = 0 \text{ و } c_2 = 1. \text{ استخدم الآن نفس النمط من المناقشة عند النقط التي عندها تصل } g \text{ لأدناها لتحصل على تخالف .}$$

$$22 - (ق) \text{ لاحظ أن } \phi^{-1}(S) \text{ ليست مدمجة . أيضاً } \phi^{-1} \text{ ليست متصلة عند } (1, 0).$$



## باب (٢٣) :

- ٢٣- (أ) الدالة في مثال ٢٠ - (أ ، ب ، ط) متصلة بانتظام على  $\mathbb{R}$  .  
 ٢٣- (ز) الدالة  $g$  محدودة ومتصلة بانتظام على  $[0, p]$  .  
 ٢٣- (ط) إذا كانت  $(x_n)$  متتابعة في  $(0, 1)$  حيث  $x_n \rightarrow 0$  حينئذ  $(f(x_n))$  هي متتابعة كوشي ولذلك تكون تقاربية في  $\mathbb{R}$  .  
 ٢٣- (ك) خذ  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = x$  عند  $x \in \mathbb{R}$  .

## باب (٢٤) :

- ٢٤- (ب) خذ  $(f(1/n))$  حيث  $f$  كما في مثال ٢٠ - (ز) .  
 ٢٤- (ج) أحصل على الدالة في مثال ٢٠ - (ح) بهذه الطريقة .  
 ٢٤- (أ) التقارب منتظم على  $[0, 1]$  .  
 (ب) التقارب منتظم على أى فئة منغلقة لا تحتوي 1 .  
 (ج) التقارب منتظم على  $[0, 1]$  أو على  $[c, +\infty)$ ,  $c > 1$  .  
 ٢٤- (ى) - ينتج أن  $f$  متزايدة باطراد . حيث  $f$  متصلة بانتظام ، إذا كانت  $\varepsilon > 0$  ، افرض أن  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$  بحيث إن  $f(x_i) - f(x_{i-1}) < \varepsilon$  وافرض أن  $n_j$  بحيث إنه إذا كانت  $n \geq n_j$  فإن  $|f(x_i) - f_n(x_i)| < \varepsilon$  . إذا كانت  $n \geq \sup \{n_0, n_1, \dots, n_n\}$  أثبت أن  $|f(x) - f_n(x)| < 3\varepsilon$  لكل  $x \in I$  .  
 ٢٤- (ق) أى كثيرة الحدود (أو نهاية منتظمة لمتتابعة كثيرات الحدود) تكون محدودة على فترة محددة .

## باب (٢٥) :

- ٢٥- (ز) (ب) إذا كانت  $\varepsilon > 0$  ، فتوجد  $\delta(\varepsilon) > 0$  بحيث أنه إذا كانت  $|f(x) - b| < \varepsilon$  ، فإن  $c < x < c + \delta(\varepsilon)$ ,  $x \in D(f)$  .  
 (ج) إذا كانت  $(x_n)$  أى متتابعة في  $D(f)$  بحيث إن  $c < x_n$  وكانت  $c = \lim (x_n)$  فإن  $b = \lim (f(x_n))$  .  
 ٢٥- (ى) (أ) إذا كانت  $M > 0$  ، فإنه توجد  $m > 0$  بحيث إنه إذا كانت  $x \geq m$  وكانت  $x \in D(f)$  ، فإن  $f(x) \geq M$  .  
 (ب) إذا كانت  $M < 0$  ، فإنه توجد  $\delta > 0$  بحيث إنه إذا كانت  $0 < |x - c| < \delta$  ، فإن  $f(x) < M$  .

٢٥- (ل) (أ) افرض أن  $\varphi(r) = \sup \{f(x) : x > r\}$  وضع  $L = \lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r)$  بالتناوب إذا كانت  $\varepsilon > 0$  فإنه توجد  $m(\varepsilon)$  بحيث إنه إذا كانت  $x \geq m(\varepsilon)$  ، حينئذ  $|\sup \{f(x) : x > r\} - L| < \varepsilon$

٢٥- (م) استخدم مفترض ٢٥ - ١٢ .

٢٥- (ن) اعتبر الدالة  $f(x) = -1/|x|$  عند  $x \neq 0$  ،  $f(0) = 0$  .

٢٥- (ع) اعتبر مثال ٢٠ - (ح) .

٢٥- (ص) ليس ضرورياً . اعتبر  $f_n(x) = -x^n$  عند  $x \in I$  .

٢٥- (ق) نعم .

### باب (٢٦) :

٢٦- (ب) أثبت أن مجموعة  $\mathcal{A}$  لكثيرات الحدود في  $\cos x$  تحقق فرض نظرية ستون-فاير-شراس .

٢٦- (أ) إذا كانت  $f(0) = f(\pi) = 0$  ، أولاً قرب  $f$  بدالة  $g$  تتلاقى على بعض فترات  $[0, \delta]$  و  $[\pi - \delta, \pi]$  . حينئذ اعتبر  $h(x) = g(x)/\sin x$  عند  $x \in (0, \pi)$  ،  $h(x) = 0$  عند  $x = 0, \pi$  .

٢٦- (ط) اعتبر  $f(x) = \sin(1/x)$  عند  $x \neq 0$  .

٢٦- (ك) - استخدم نظرية هاين-بورال أو نظرية غطاء لبسيج كما في برهان نظرية الاتصال المنتظم .

٢٦- (ف) (أ) نطاق مدمج ، متتابعة متساوية الاتصال بانتظام لكن غير محدودة .  
(ب) نطاق مدمج ، متتابعة محدودة لكن ليست متساوية الاتصال بانتظام .  
(ج) نطاق ليس محدوداً ، متتابعة محدودة ، ومتساوية الاتصال بانتظام .

### باب (٢٧) :

٢٧- (د) لاحظ أن  $g'(0) = 0$  وأن  $g'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$  عند  $x \neq 0$  .

٢٧- (أ) نعم .

٢٧- (ل) يمكننا كتابة

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{x - c}{x - y} \cdot \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - \frac{y - c}{x - y} \cdot \frac{f(y) - f(c)}{y - c}$$

٢٧- (ق) (ب) إذا كانت  $b \neq 0$  ، حينئذ عندما  $n \in \mathbb{N}$  تكون كبيرة بكفاية بإعطاء  $x > n$  ، فإنه توجد  $x_n > n$  بحيث إن

$$|(f(x) - f(n))/x| = |(x - n)/x| |f'(x_n)| \geq |(x - n)/x| |b|/2.$$

### باب (٢٨) :

٢٨- (و) بين جذور  $p'$  المتتالية تكون كثيرة الحدود مطردة دقيقة . إذا كانت  $x_0$  جذراً تكرارياً مفرد الكثيرة الحدود من  $p'$  ، فإن  $x_0$  هي نقطة نهاية عظمى دقيقة لكثيرة الحدود  $p$  .

٢٨- (ح) للدالة  $f$  جذور مكررة عددها  $n$  عند كل من  $x = \pm 1$  ؛ الدالة  $f'$  لها جذور مكررة عددها  $n - 1$  عند كل من  $x = \pm 1$  ، ولها جذر بسيط داخل  $(-1, 1)$  ؛ الخ .

٢٨- (س) استخدام تمرين ٢٧ - س

### باب (٢٩) :

٢٩- (د) إذا كانت  $\varepsilon > 0$  ، فإنه توجد أعداد قياسية  $r_1, \dots, r_m$  في  $I$  بحيث إن  $0 \leq f(x) < \varepsilon$  إذا كانت  $x \neq r_k$  . افرض أن  $P$  تقسماً بحيث يكون طول كل من (على الأكثر  $2m$ ) فترات جزئية تحتوى واحداً من الأعداد  $r_1, \dots, r_m$  أقل من  $\varepsilon/2m$  . أثبت أن  $0 \leq S(P; f, g) \leq 2\varepsilon$

٢٩- (ى) إذا كانت  $f_1(x) = f(x)$  عند  $x \in \{c_1, \dots, c_m\}$  وكانت  $\varepsilon > 0$  ، افرض أن  $P$  هي تقسماً بحيث أن طول كل من الفترات الجزئية المحتوية على واحد من  $c_1, \dots, c_m$  أقل من  $\varepsilon/2mM$  ، حيث  $M \geq \sup \{\|f\|, \|f_1\|\}$  . باستخدام نفس النقط الوسطى ، نحصل على  $|S(P; f, g) - S(P; f_1, g)| < \varepsilon$  حيث  $g(x) = x$  عند  $x \in J$

٢٩- (ن) افرض أن  $c \in (a, b)$  ؛ حينئذ تكون  $f$  قابلة للتكامل على  $[a, c]$  ، إذا كانت  $g_1$  هي قيد  $g$  على  $[a, c]$  ، فينتج من ٢٧ (ن) أن  $g'_1$  متصلة على  $[a, c]$  ؛ بالمثل للقيد  $g_2$  من  $g$  على  $[c, b]$  . ينتج من نظرية ٢٩ - ٨ أن  $fg'_1$  قابلة للتكامل على  $[a, c]$  وأن  $fg'_2$  قابلة للتكامل على  $[c, b]$  وأن

$$\int_a^c f dg = \int_a^c fg'_1, \quad \int_c^b f dg = \int_c^b fg'_2.$$

افرض الآن أن  $(fg')(x) = f(x)g'_1(x)$  عند  $a \leq x \leq c$  وأن  $(fg')(x) = f(x)g'_2(x)$  عند  $c < x \leq b$  .

٢٩ (ع) - إذا كانت  $\|P\| < \delta$  وإذا كانت  $Q$  تكريراً  $P$  ، حينئذ  $\|Q\| < \delta$  .

٢٩- (ص) إذا كانت  $\varepsilon > 0$  ، افرض أن  $P_\varepsilon = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  هو تقسيم  $J$  بحيث إنه إذا كانت  $P \supseteq P_\varepsilon$  ، وكانت  $S(P; f)$  أى حاصل جمع ريمان المناظر ، حينئذ  $|S(P; f) - \int_a^b f| < \varepsilon$  . افرض أن  $\|f\|_J = M$  ، وافرض  $\delta = \varepsilon/4nM$  . إذا كانت  $Q = (y_0, y_1, \dots, y_m)$  تقسيميا بمسود  $\|Q\| < \delta$  ، افرض أن  $Q^* = Q \cup P_\varepsilon$  ، بحيث  $Q^* \supseteq P$  وإن  $Q^* \supseteq P$  وبموجب يكون لها على الأكثر  $n-1$  نقطة أزيد من نقط  $Q$  . أثبت أن  $S(Q^*; f) - S(Q; f)$  تختزل إلى  $2(n-1)$  حداً على الأكثر في الصورة :

$$\pm \{f(\xi) - f(\eta)\} (x_i - y_k) \quad \text{حيث} \quad |x_i - y_k| < \delta$$

### باب (٣٠) :

٣٠- (ج) إذا كانت  $\varepsilon > 0$  مطاة ، افرض  $P_\varepsilon$  كافى برهان ٣٠ - ٢ . إذا كانت  $P$  أى تكرير من  $P_\varepsilon$  فإن

$$|S(P_\varepsilon; f, g) - S(P; f, g)| \leq \sum |f(u_k) - f(v_k)| |g(x_k) - g(x_{k-1})|$$

حيث  $|u_k - v_k| < \delta(\varepsilon)$  وإذن يكون المقدار  $\varepsilon M$  سائدا لهذا المجموع .  
الآن استخدم معيار كوشى .

٣٠- (ب) حساب مباشر يعطى

$$\left( \int_a^b (f(x))^n dx \right)^{1/n} \leq M(b-a)^{1/n}.$$

وبالعكس ،  $f(x) \geq M - \varepsilon$  على فترة جزئية ما من  $[a, b]$  .

٣٠- (ح) إذا كانت  $m \leq f(x) \leq M$  عند  $\alpha \leq x \leq \beta$  فإنه يوجد  $A$  حيث  $m \leq A \leq M$  بحيث أن

$$F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta f dg = A\{g(\beta) - g(\alpha)\}.$$

٣٠- (ط) افرض أن  $f(x) = -1$  عند  $x \in [-1, 0)$  وأن  $f(x) = 1$  عند  $x \in [0, 1]$

٣٠- (ى) استخدم نظرية القيمة المتوسطة ٢٧-٢٦ للحصول على  $F(b) - F(a)$  .  
كحاصل جمع ريمان لتكامل  $f$  .

٣٠- (م) إذا كانت  $m \leq f(x) \leq M$  عند  $x \in J$  ، فإن

$$m \int_a^b p \leq \int_a^b fp \leq M \int_a^b p.$$

استخدم الآن نظرية بولتزانو ٢٢ - ٤ .

٣٠- (ع) الدالتان  $\varphi, \varphi^{-1}$  أحاديتان ومتصلتان . التقسيمات الفترة  $[c, d]$  هي تناظر أحادى مع التقسيمات الفترة  $[a, b]$  وحواصل جمع ريمان - اشتلتجز للتركيب  $f \circ g$  بالنسبة إلى  $\varphi \circ g$  في تناظر أحادى مع تلك الدالة  $f$  بالنسبة إلى  $g$  .

٣٠- (ت) (أ)  $\frac{3}{4}$  . (ج) 9 . (هـ)  $\frac{\pi}{2}$  .

### باب (٣١) :

٣١- (ك) بما أن  $f_n(x) - f_n(c) = \int_c^x f_n'(t) dt$  فيمكننا استخدام نظرية ٣١ - ٢ لنحصل على  $f(x) - f(c) = \int_c^x g(t) dt$  لكل  $x \in J$  . أثبت أن  $g = f'$  .

٣١- (ق) استخدم نظرية ٣٠ - ٩ إلى (٣١-٢) حيث  $h(t) = (b-t)^{n-1}$  .

٣١- (ت) أثبت أن الدالتين  $H$  و  $G$  متصلتان . يكون الباقي من البرهان كما في ٣١ - ٩ .

٣١- (خ) الدالة  $f$  متصلة بانتظام على  $J_1 \times J_2$  .

٣١- (ذ) افرض أن  $g_2(0) = 0, g_2(x) = \frac{1}{2}$  عند  $0 < x < 1, g_2(x) = 1$  .

### باب (٣٢) :

٣٢- (د) (أ) ، (ب) ، (د) ، (هـ) تقاربية .

٣٢- (هـ) (أ) تقاربية عند  $p, q > -1$  (ب) تقاربية عند  $p + q > -1$

٣٢- (و) (أ) ، (ج) تقاربان مطلقان . (ب) تباعدية .

٣٢- (ز) (أ) تقاربية مطلقة إذا كانت  $q > p + 1$

(ب) تقاربية إذا كانت  $q > 0$  وتقاربية مطلقة إذا كانت  $q > 1$  .

### باب (٣٣) :

٣٣- (أ) إذا كانت  $0 \leq t \leq \beta$  فإن  $x'e^{-t} \leq x^{\beta}e^{-\beta}$  .

٣٣- (ب) استخدم اختبار درشلت ٣٣ - ٤ .

٣٣- (ج) (أ) تقاربية بانتظام عند  $|t| \geq a > 0$  .

(ب) تباعدية إذا كانت  $t \leq 0$  وتكون تقاربية بانتظام إذا كانت  $t \geq c > 0$  .

(ج) ، (هـ) تقاربيتان بانتظام لجميع  $t$  .

٣٣- (و)  $\sqrt{\pi}$  .

### باب (٣٤) :

٣٤- (ج) جمع الحدود في المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$  لتنتج تقارباً إلى ١ - وإلى صفر .

٣٤- (ز) اعتبر  $\sum ((-1)^n n^{-1/2})$  . لكن ، اعتبر أيضاً الحالة حيث  $a_n \geq 0$  .

٣٤- (ح) إذا كانت  $a, b \geq 0$  ، فإن  $2(ab)^{1/2} \leq a+b$  ،

٣٤- (ط) أثبت أن  $b_1 + b_2 + \dots + b_n \geq a_1(1 + \frac{1}{2} + \dots + 1/n)$

٣٤- (ي) استخدم تمرين ٣٤ - و (أ) .

٣٤- (ك) وضح أن  $a_1 + a_2 + \dots + a_{2^n}$  محدودة من أسفل بالقدر

$\frac{1}{2}\{a_1 + 2a_2 + \dots + 2^n a_{2^n}\}$  ومن أعلى بالقدر :

$$a_1 + 2a_2 + \dots + 2^{n-1}a_{2^{n-1}} + a_{2^n}$$

٣٤ (س) - اعتبر حواصل الجمع الجزئية  $s_k$  حيث  $n/2 \leq k \leq n$  استخدم معيار كوشي .

### باب (٣٥) :

٣٥- (ج) (أ) ، (ب) تباعدتان . (ب) تقاربية .

٣٥- (د) (ب) ، (ج) ، (ب) تباعدية .

٣٥- (ز) (أ) تقاربية . (ج) تباعدية .

٣٥- (ل) إذا كانت  $r < 1$  فإن  $m < \log(m+1) - r/m$  عندما  $m \in \mathbb{N}$  تكون

كبيرة بكفاية أثبت أن المتسلسلة  $(x_n \log n)$  متزايدة .

### باب (٣٦) :

٣٦- (أ) استخدم اعتبار درشلت .

٣٦- (د) (أ) تقاربية . (ب) تباعدية .

٣٦- (ب) (ج) إذا كانت  $\sum (a_n)$  تقاربية مطلقة ، كذلك تكون  $\sum (b_n)$  . إذا

كانت  $a_n = 0$  ماعدا عندما تكون  $\sin n$  قريبة من  $\pm 1$  ، فيمكن أن نحصل على مثال عكسي

(د) اعتبر  $a_n = 1/n(\log n)^2$  .

٣٦- (ط) إذا كانت  $m > n$  ، فإن  $s_{mn} = +1$  ؛ إذا كانت  $m = n$  فإن :

$$s_{mn} = -1 \text{ ، فإن } m > n \text{ كانت}$$

٣٦- (ك) لاحظ أن  $2mn \leq m^2 + n^2$

### باب (٣٧) :

٣٧- (أ) (أ) ، (ج) تتقاربان بانتظام لكل  $x$  (ب) تتقارب عند  $x \neq 0$

وبانتظام عندما تقع  $x$  في مكلة أي جوار  $x = 0$  (د) تتقارب عند  $x > 1$  وبانتظام عند

$x \geq 0$  حيث  $a > 1$  .

٣٧- (ج) إذا كانت المتسلسلة تقاربية بانتظام ، فإن

$$|c_n \sin nx + \dots + c_{2n} \sin 2nx| < \varepsilon,$$

بشرط أن تكون  $n$  كبيرة بكفاية . أحصر الآن الانتباه بحيث تقع  $x$  في فترة تحقق

$$kx > \frac{1}{2} \quad \text{عند} \quad n \leq k \leq 2n$$

٣٧- (ح) (أ)  $\infty$  ، (ج)  $1/e$  ، (و)  $1$  .

٣٧- (ل) استخدم نظرية الحدودية ٣٧ - ١٧ .

٣٧- (ن) أثبت أنه إذا كانت  $n \in \mathbb{N}$  ، فإنه توجد كثيرة حدود  $P_n$  بحيث أنه

$$f^{(n)}(x) = e^{-1/x^2} P_n(1/x) \quad \text{فإن} \quad x \neq 0$$

٣٧- (ر) المتسلسلات  $A(x) = \sum (a_n x^n)$  ،  $B(x) = \sum (b_n x^n)$  ، and  $C(x) = \sum (c_n x^n)$

تتقارب لدوال متصلة على  $I$  من نظرية الضرب ٣٧ - ٨ ، نجد أن  $C(x) = A(x) B(x)$

عند  $0 \leq x < 1$  ، ومن الاتصال نجد أن  $C(1) = A(1) B(1)$  .

٣٧- (ش) متتابعة حواصل الجمع الجزئية تزايدية على الفترة  $[0, 1]$  .

٣٧- (ت) إذا كانت  $\varepsilon > 0$  ، فإن  $|a_n| \leq \varepsilon p_n$  ، عند  $n > N$  . قم حاصل

الجمع  $\sum (a_n x^n)$  إلى حاصل جمع على  $n = 1, \dots, N$  وحاصل جمع على  $n > N$  .

## باب (٣٨) :

٣٨- (ب) (ب) إذا كانت  $a_n = 0$  ، فإن

$$\begin{aligned} F(x+2\pi) &= \int_c^{x+2\pi} f(t) dt = \int_c^x f(t) dt + \int_x^{x+2\pi} f(t) dt \\ &= F(x) + 0 = F(x) \end{aligned}$$

لكل  $x \in \mathbb{R}$  .

٣٨- (أ) (ج) احسب  $f_2(0)$  بطريقتين .

٣٨- (ز) (أ) إذا كانت  $k_1$  متصلة ، فإن  $k_1(-\pi) = -\pi^3$  ، لكن بما أن  $k_1$

لها دورة  $2\pi$  حينئذ  $k_1(\pi) = k_1(-\pi) = -\pi^3$  .

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left[ \frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right] \quad \text{(ب) - (ط) ٣٨}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\cos x^0}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \dots \right] \quad \text{(ج)}$$

$$\frac{\pi^2}{6} - \left[ \frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \dots \right] \quad \text{(أ)}$$

$$38 - (ك) (ب) \left[ \frac{\sin 2x}{1 \cdot 3} + \frac{2 \sin 4x}{3 \cdot 5} + \frac{3 \sin 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right]$$

$$(أ) \left[ \frac{8}{\pi} \left[ \frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots \right] \right]$$

$$38 - (ن) (د) \text{ استخدم تمرين ٣٨ - ز (ب) .}$$

$$38 - (و) (أ) \left[ \frac{4}{\pi} \left[ \frac{\sin \frac{1}{2}\pi x}{1} - \frac{\sin \pi x}{2} + \frac{\sin \frac{3}{2}\pi x}{3} - \dots \right] \right]$$

$$(ب) \left[ 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2\pi} \cos \frac{n\pi x}{4} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{4} \right] \right]$$

$$38 - (ق) \text{ استخدم نظرية فيجور ٣٨ - ١٢ نظرية ١٩ - ٣}$$

$$38 - (ر) \text{ عدل برهاني ٣٨ - ٧ ، ٣٨ - ١٢}$$

### باب (٣٩) :

$$39 - (ز) \text{ لدينا } |G(u, v) - G(0, 0)| \leq |u^2 + v^2| = \|(u, v)\|^2 \text{ بحيث أن :}$$

$$DG(0, 0)(u, v) = 0 \text{ ، إذا كانت } (x, y) \neq (0, 0) \text{ ، فإن :}$$

$$D_1 G(x, x) = 2x \sin(2x^2)^{-1} - x^{-1} \cos(2x^2)^{-1}$$

وهي غير محدودة عند  $x \rightarrow 0$  .

$$39 - (ل) (أ) \nabla_{(a,b,c)} f_1 = (2a, 2b, 2c)$$

$$(ج) \nabla_{(a,b,c)} f_3 = (bc, ac, ab)$$

$$39 - (م) (أ) 3/\sqrt{2} \text{ ، (ج) صفر .}$$

$$39 - (س) (أ) \text{ عند } (1, 2) \text{ يكون } \{(x, y, z) : z - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2)\}$$

$$(ج) \text{ عند } (1, 1) \text{ يكون } \{(x, y, z) : z - \sqrt{2} = -(x + y - 2)/\sqrt{2}\}$$

$$39 - (ف) (أ) \text{ عند } t = 0 \text{ يكون } \{(x, y, z) : x = t, y = 0, z = 0\} \text{ ، عند } t = 1$$

$$\text{يكون } \{(x, y, z) : x = 1 + s, y = 1 + 2s, z = 1 + 3s\}$$

$$(ج) \text{ عند } t = \frac{1}{2} \pi \text{ يكون } \{(x, y, z) : x = -2s, y = 2, z = \frac{1}{2}\pi + s\}$$

$$39 - (ق) (ب) \text{ عند النقطة } (3, -1, -3) \text{ مناظرة إلى } (1, -2) \text{ نجد أن}$$

$$S_h = \{(x, y, z) : x = 3 + (s - 1) + (t - 2), y = -1 + (s - 1) - (t - 2), \\ z = -3 + 2(s - 1) - 4(t - 2)\}$$

$$(د) \text{ عند النقطة } (1, 0, 0) \text{ المناظرة إلى } (0, \frac{1}{2} \pi) \text{ نجد أن}$$



$$S_h = \{(x, y, z) : x = 1, y = s, z = -(t - \frac{1}{2}\pi)\}$$

٣٩- (ت) لاحظ أنه إذا كانت  $y \in \mathbb{R}^q$ ,  $z \in \mathbb{R}^r$  فإن  $(y, z) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r = \mathbb{R}^{q+r}$  بحيث أن  $\|(y, z)\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$

## باب (٤٠) :

$$F'(t) = 2(3t+1)3 + 2(2t-3)2 = 26t-6 \quad (أ) - ٤٠$$

$$D_1 F(s, t) = (\sin s \cos t + \sin t)(-\sin s) + (\cos s + \sin t)(\cos s \cos t) + 0 \quad (د) - ٤٠$$

$$D_1 F(x, y) = f'(xy)y, \quad D_2 F(x, y) = f'(xy)x \quad (أ) (ز) - ٤٠$$

$$D_1 F(x, y) = f'(x^2 - y^2)(2x), \quad D_2 F(x, y) = f'(x^2 - y^2)(-2y) \quad (د)$$

٤٠- (ك) (ب) بما أن  $g'(t) = D_1 f(tc) c_1 + \dots + D_p f(tc) c_p$  فينتج من علاقة أولر أن

$$tg'(t) = (tc_1)D_1 f(tc) + \dots + (tc_p)D_p f(tc) = kf(tc) = kg(t)$$

لذلك يكون  $g(t) = Ct^k$  لماذا ؟) لثابت ما  $C$ . بما أن  $f(c) = g(1) = C$  فلنستنتج أن  $f(tc) = g(t) = t^k f(c)$  ومنها تكون  $f$  متجانسة من درجة  $k$ .  
٤٠- (م) بما أن

$$\|B(x+u, y+v) - B(x, y) - (B(x, v) + B(u, y))\| \\ = \|B(u, v)\| \leq M \|u\| \|v\| \leq \frac{1}{2} M (\|u\|^2 + \|v\|^2) = \frac{1}{2} M \|(u, v)\|^2$$

ينتج أن  $B(x, v) + B(u, y)$  موجودة وتساوي  $DB(x, y)(u, v)$ .

٤٠- (ع)  $Dg(c)(u) = (ug'_1(c), \dots, ug'_p(c)) = ug'(c)$  عند  $u \in \mathbb{R}$  ينتج من قاعدة السلسلة أن

$$Dh(c)(u) = Df(g(c))(Dg(c)(u)) = Df(g(c))(ug'(c)) = uDf(g(c))(g'(c))$$

$$h'(c) = Df(g(c))(g'(c)) \text{ ومنها}$$

٤٠- (ف) إذا كانت  $f = (f_1, \dots, f_q)$  فإنه توجد نقط  $c_i \in S$  بحيث أن :

$$[D_j f_i(c_i)] \text{ لها تمثيل المصفوفة } L \text{ أن } f_i(b) - f_i(a) = Df_i(c_i)(b - a)$$

٤٠- (ص) بنظرية ١٢-٧ تكن لأي نقطتين في  $\Omega$  اتصالها بمنحنى مضلعي يقع داخل  $\Omega$ . طبق نظرية القيمة المتوسطة على كل ضلع من هذا المنحنى.

$$D_x f(x, y) = y(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{-1} + 4x^2 y^3 (x^2 + y^2)^{-2} \quad (ش) - ٤٠$$

$$D_{xx} f(0, 0) = +1 \quad \text{بينما} \quad D_{yy} f(0, 0) = -1$$

٤٠- (ث) إذا كانت  $\varphi : (-\varepsilon, 1 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^q$  معرفة بأنها  $\varphi(t) = f(a + t(b - a))$

فإن  $\varphi'(t) = Df(a + t(b-a))(b-a)$  اكتب  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$  حيث  $\varphi_j(t) = f_j(a + t(b-a))$  ولاحظ أن  $\varphi_1(1) - \varphi_1(0) = \int_0^1 \varphi'_1(t) dt$

## باب (٤١) :

٤١- (أ) استخدم تمرين ٢١ . ع .

٤١- (د) هنا  $Df(0) = 0$  . لا .

٤١- (هـ) اعتبر تمرين ٢٧ - ح ، ٢٢ - س

٤١- (و) اعتبر تمرين ٤٠ . ل .

٤١- (ي) أوجد النهاية العظمى النسبية قرب 0 .

٤١- (ف) (أ) عند  $(1, 1, 2)$  يكون  $S_F\{(x, y, z) : 2x + 2y - z = 2\}$

(ج) عند  $(4, \frac{1}{2}, 2)$  يكون  $S_F = \{(x, y, z) : x + 8y - 2z = 4\}$

٤١- (ق) إذا كانت  $D_1 f$  متلاشيان على فئة مفتوحة ، استخدم تمرين ٤٠ - ق .

إذا كانت  $D_1 f(x_0, y_0) \neq 0$  حينئذ اعتبر  $F(x, y) = (f(x, y), y)$  قرب  $(x_0, y_0)$  .

٤١- (ر) إذا كانت  $D_1 g(c) \neq 0$  ، حينئذ اعتبر  $G(x, y) = g(x) + (0, y)$  ، حينئذ

٤١- (ت) وضع ، كما في برهان ٤١ - ٦ ، أنه إذا كانت  $\|y\| < m/2$  حينئذ

يوجد متجه  $x \in \mathbb{R}^p$  حيث  $\|x\| \leq 1$  بحيث أن  $y = L_1(x)$  .

٤١- (ث) إذا كانت  $y \in \mathbb{R}^p$  ، افرض أن  $x_0 = 0$  وأن

$$x_{n+1} = x_n - (f(x_n) - f(x_{n-1}) - (x_n - x_{n-1}))$$

وضح ، كما في برهان ٤١ - ٦ ، أن  $\bar{x} = \lim (x_n)$  موجودة وأن  $f(\bar{x}) = y$  .

## باب (٤٢) :

٤٢- (أ) (أ) نقطة ركوب عند  $(0, 0)$

(ب) نهاية صغرى نسبية دقيقة عند  $(-2, \frac{1}{2})$  .

(ج) نقطة ركوب عند  $(0, -1)$  ، نهاية صغرى نسبية دقيقة عند  $(0, 3)$

(و) نقطة ركوب عند  $(0, 0)$  ، نهاية صغرى نسبية دقيقة عند  $(0, -1)$  ،

$(0, 2)$  .

٤٢- (د) إذا لم تكن  $f$  ثابتة ، حينئذ إما الأعلى أو الأدنى للدالة  $f$  على

$S = \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\| \leq 1\}$  ليس صفرا . بما أن  $S$  مدجة فإن هذا الأعلى أو الأدنى يكون

عند نقطة  $c \in S$  . الفرض يلغى إمكانية كون  $\|c\| = 1$  .

- ٤٢- (و) (أ، د) نهاية صغرى نسبية عند (0, 0) . (ب، ج، هـ) نقطة ركوب عند (0, 0) (و) نهاية صغرى نسبية دقيقة عند (0, 0) .
- ٤٢- (ز) نقطة ركوب عند (1, 1) .
- ٤٢- (ح) القروود لها ذيول .
- ٤٢- (ط)  $\frac{2}{3}$  . ٤٢- (ك)  $\frac{2}{3}$  .
- ٤٢- (ق) (أ) نهاية عظمى = ١ ، تحدث عند (±1, 0) ؛ بأنها صغرى = -1 ، تحدث عند (0, ±1) .
- (ب) نهاية عظمى = 3 ، تحدث عند (1, 0) ، قيمة صغرى = -1 ، تحدث عند (-1, 0) .
- (ج) نهاية عظمى = 4 ، تحدث عند (1, ±1) ، نهاية صغرى = -1 ، تحدث عند (-1, 0) .
- (د) نهاية عظمى = 1 ، تحدث عند (0, π/2) ، قيمة صغرى = -1 ، تحدث عند (0, -π/2) .
- ٤٢- (ش) نهاية عظمى = 1 ، تحدث عند (0, 0, 1) ، نهاية صغرى = 5/9 ، تحدث عند  $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$  .

### باب (٤٣) :

- ٤٣- (ب) إذا كانت  $p \in \mathbb{N}$  معطاة ، افرض أن  $n > (2^{2p} - 1)^{-1}$  . إذا كانت الأطوال الجانبية لخلية  $I$  في  $\mathbb{R}^p$  هي  $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_p$  ، افرض أن  $c = a_1/n$  فإن تكون  $I$  محتوية في الاتحاد  $n([a_2/c] + 1) \dots ([a_p/c] + 1)$  مكعبات بطول جانبي  $c$  ، وله محتوى كل أقل من  $2(a_1 \dots a_p) = 2c(I)$  . حينئذ ، إذا كانت  $Z$  محتوية في الاتحاد الخلايا محتوى كل أقل من  $\varepsilon$  ، فإنها تكون محتوية في الاتحاد لمكعبات بمحتوى كل أقل من  $2\varepsilon$  .

٤٣- (أ) لا .

- ٤٣- (ح) إذا كان الإقفال  $I_j$  هو  $[a_{j1}, b_{j1}] \times \dots \times [a_{jp}, b_{jp}]$  عند  $j = 1, \dots, n$  ، وإذا كان  $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_p, b_p]$  ، افرض أن  $P_1$  هو التقسيم للفترة  $[a_1, b_1]$  الذى نحصل عليه باستخدام النقط  $\{a_{j1}, b_{j1} : j = 1, \dots, n\}$  ، وأن  $P_p$  هو تقسيم الفترة  $[a_p, b_p]$  الذى نحصل عليه باستخدام  $\{a_{jp}, b_{jp} : j = 1, \dots, n\}$  . فنتج التقسيمات  $P_1, \dots, P_p$  تقسيما لخلية  $I$  .

- ٤٣- (ط) احصر  $Z$  في الاتحاد لعدد محدود من خلايا مغلفة في  $I$  بمحتوى كل أقل من  $\varepsilon$  استخدم الآن ٤٣. ح .

٤٣- (ى) احصر  $Z$  في الاتحاد لعدد محدود من خلايا مفتوحة في  $I$  بمحتوى كل أقل من  $\varepsilon$ . استخدم الآن ٤٣ ح .

٤٣- (ك) نكون متتابعة تقسيمات من  $I$  إلى مكعبات بطول جانب  $2^{-n}\delta$  بتنصيف متوال لأضلاع  $I$ . بإعطاء مكعب  $K \subseteq I$  بطول جانبي  $r$ ، احصر  $K$  في الاتحاد لكل المكعبات الموجودة في التقسيم النوني الذي تقاطعه مع  $K$  هو فئة غير خالية. إذا كانت  $n$  كبيرة بدرجة أن  $(1 + \delta/2^{n-1}r)^2 < 2$ ، فإن لهذا الاتحاد محتوى كل أقل من  $2c(K)$ .

٤٣- (ل) استخدم (٤٣- ز) ، (٤٣- م) استخدم (٤٣- ل).

٤٣- (ص) أولاً اعتبر الحالة  $f = g$ ، ثم اعتبر  $(f + g)^2$ .

٤٣- (ر) افرض  $M > \|f\|_\infty, \|g\|_\infty$  بما أن  $g, f$  متصلتان بانتظام على  $K$ ، إذا كانت  $P_\varepsilon$  دقيقة بكفاية، حينئذ  $g, f$  تختلفان بمقدار أقل من  $\varepsilon/2M$  على كل  $K_i$  وبحيث أنه لأي  $p_i \in K_i$ ، يكون  $|\int_K f g - \sum f(p_i)g(p_i)c(K_i)| \leq (\varepsilon/2)c(K)$  وإذن نجد أن

$$\left| \int_K f g - \sum f(x_i)g(y_i)c(K_i) \right| \leq \left| \int_K f g - \sum f(x_i)g(x_i)c(K_i) \right| + \left| \sum f(x_i)[g(x_i) - g(y_i)]c(K_i) \right| \leq \varepsilon c(K)$$

٤٣- (ت) (د) إذا كانت  $Z$  مدمجة ومحتوية في اتحاد الخلايا المفتوحة  $J_1, J_2, \dots$  فإنها تكون محتوية في الاتحاد لعدد محدود من هذه الخلايا.

## باب (٤٤):

٤٤- (ب) (أ) إذا كانت  $c \in b(A)$ ، فإنه إما أن تكون  $c$  نقطة داخلية من  $A$  أو تكون نقطة داخلية من  $\mathcal{G}(A)$ . في أى حالة، يوجد جوار للنقطة  $c$  منفصل عن  $b(A)$ ، وإذن  $\mathcal{G}(b(A))$  مفتوحة.

٤٤- (ج) في مثال ٤٣- (ز)، يكون  $S^- = b(S) = I \times I$  لكن  $b(I \times I) = I \times \{0, 1\} \cup \{0, 1\} \times I$

٤٤- (د) بما أن  $(A \cap B)^- \subseteq A^- \cap B^-$ ، فينتج أن

$$\begin{aligned} b(A \cap B) &= (A \cap B)^- \cap (\mathcal{G}(A \cap B))^- \subseteq A^- \cap B^- \cap (\mathcal{G}(A) \cup \mathcal{G}(B))^- \\ &= A^- \cap B^- \cap (\mathcal{G}(A)^- \cup \mathcal{G}(B)^-) \\ &= (B^- \cap b(A)) \cup (A^- \cap b(B)) \subseteq b(A) \cup b(B) \end{aligned}$$

٤٤- (ى) - إذا كانت  $\varepsilon > 0$ ، افرض أن  $P_\varepsilon$  تقسم مثل الذى في تمرين (٤٣- ع) وبحيث أن الاتحاد لخلايا في  $P_\varepsilon$  الذى يحتوى نقطاً في  $b(A)$  محتوى كل أقل من  $\varepsilon/2 \|f\|_\infty$  استخدم الآن تمرين (٤٣- ع) إلى قيد الدالة  $f$  إلى  $A$ .

٤٤ - (ك) بما أن  $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$  عند  $x \in A$ ، فينتج أن :

$\mu = (f_A fg)(f_A g)^{-1}$  نجد  $f_A g \neq 0$  إذا كانت  $m f_A g \leq f_A fg \leq M f_A g$

٤٤- (ن) الفئة  $b(K) = K$  ليس لها محتوى صفر.

$F(x, y) = \int_0^y \{ \int_0^x f(s, t) ds \} dt$       (ص) - 44      لاحظ أن

**باب (۴۵) :**

٤٥ - (أ) افحص البراهين ٤٥ - ٤٥ ، ٤ - ٤٥ .

$$6\pi (1) (2) = 12\pi$$
$$(e-1)^2 (g) = 40$$

٤٥ - (ج) افترض، أن  $u = xy, v = y/x^2$  . المساحة تساوي  $(\log 2)/3$  .

مسیحیوں کے (الوہی)

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة

## مكتبتى الخاصة

**على موقع ارشيف الانترنت**

## الرباط

[https://archive.org/details/@hassan\\_ibrahem](https://archive.org/details/@hassan_ibrahem)



## Glossary

### Introduction

Elements

Set

Theory

Class

Collection

Aggregate

Ensemble

Section

Member

Subset

Proper subset

Integers

Natural numbers

Unit interval

Complex numbers

Intersection

Union

Empty set

Void set

Disjoint

Non-intersecting

Idempotent property

Cummulative property

Associative property

Distributive property

Complement

Cartisian product

## قائمة بالمصطلحات العلمية

### المقدمة

عناصر

فئة

نظرية

درجة أو رتبة

مجموعة

جملة أو مجموع

طقم

باب

عضو

فئة جزئية

فئة جزئية فعلية

أعداد صحيحة

أعداد طبيعية

فترة الوحدة

الأعداد المركبة

تقاطع

إتحاد

فئة خالية

نئة شاغرة

غير مربوطة

غير متقاطعة

خاصية المائلة

خاصية التبديل

خاصية الترافق

خاصية التوزيع

إتمام أو إكمال

حاصل ضرب الكارتيزي

محمّد يوسف اللواتي

Ordered pairs	الأزواج المرتبة ( الثنائيات المرتبة )
Symmetric difference	اختلاف متماثل
Function	دالة
Mapping	رسم
Formula	صيغة
Explicit	صریحة
Graph	رسم بياني
Domain	النطاق
Range	مدى
Into	إلى
Image	صورة
Transformation	تحويل
Restrictions	قيود
Extensions	امتدادات
Composition	تركيب
Order	رتبة
Injective functions	دوال إدخالية أو دوال حقنية
Inverse functions	دوال عكسية
Branch	فرع
Surjective functions	دوال فوقية
Bijjective functions	دوال تناظر أحادية
Onto	فوق
Single	وحيدة
Finite sets	فئات منتهية أو فئات غير محدودة
Infinite sets	فئات غير منتهية أو فئات غير محدودة
Countable	معدودة أو قابلة للعد أو محسوبة
Well-ordered	جيدة الترتيب ( حسنة الترتيب )
Mathematical induction	الاستنتاج الرياضي
Initial segment	القطعة الابتدائية
Denumable (Enumerable)	تنازلية عددية
Countable	معدودة ( قابلة للعد )
Rational number	أعداد منطقية أو أعداد قياسية أو أعداد جبرية



Diagonal procedure	الطريقة القطرية
Digit	رقم من صفر إلى ٩
Axion	بديهية
Axiom of choice	بديهية الاختيار
George-Cantor	ج . كانتود
One-one	راسم أحادي

## الفصل الأول

System	نظام
Algebraic properties	الخواص الجبرية
Order properties	الخواص المرتبة
Completeness property	خاصية الإتمام أو خاصية الإكمال
Nested Cells	خلايا متداخلة
Field	حقول
Binary operation	عملية ثنائية
Irrational numbers	أعداد غير قياسية أو أعداد غير جبرية
Strict	مضبوط أو دقيق
Property of trichotomy	خاصية واحد من ثلاثة
Absolute value	القيمة المطلقة
The triangle inequality	متباينة المثلث
Suprema (Supremum)	الأعلى ( الملو )
Infima	الأدنى
Lemma	مأخوذة أو مفترض
Projects	الإسقاطات
Hint	إرشاد
Exponential function	دالة أسية
Logarithm	اللوغاريتم
Cuts	القواطع ( القص )
Isomorphic	متشاكل
Cells	خلايا
Intervals	فترات

Open rays	شعاعات مفتوحة
Closed rays	شعاعات مغلقة
Open cell	خلية مفتوحة
Closed cell	خلية مغلقة
Nested	متداخلة - متشابكة - وكريية
Bernoullis inequality	متباينة برنولى
Archimedean Property	خاصية أرشميدس
Dedekind cut	قاطع ديدكانيد
Kronecker	رونكر

## الفصل الثانى

Vector space	فراغ المتجه
Normed space	فراغ العمودى
Inner product space	فراغ حاصل الضرب القياسى
Inner product	حاصل الضرب القياسى - حاصل الضرب العددي
Multiple	مضاعف
Tuple	طية - مركبة
P-tuples	من العليات أو المرتبات
Dot product	حاصل الضرب العددي أو ضرب نقطة
Coordinates	أحداثيات
Components	مركبات
Parallelogram identity	متطابقة متوازي الأضلاع
Orthogonal	عمودى
Perpendicular	عمودى
Convex	محدب
Metric	مترى أو قياسى
Discrete metric	المترية المنفصلة
Entire set	قمة شاملة
Neighborhoods	جيرة - جوار - متاخة
Interior point	نقطة داخلية
Boundary point	نقطة حدودية

محمدا يوسف المروسي

Exterior point	نقطة خارجة
Closure	إقفال
Bolzano-Weierstrass Theorem	نظرية بولزانوفير اشتراوس
Schwarz inequality	متباينة شفارتز
Cauchy - Bunyakovskii - Schwarz inequality	متباينة كوشي - بونيا كوفسكي - شفارتز
Lagranges Identity	متطابقة لاجرانج
Cauchys Inequality	متباينة كوشي
Holders Inequality	متباينة هولدر
Minkowski Inequality	متباينة مينكوسكي
Chebyshev Inequality	متباينة شيفش
Rectangle	مستطيل
Parallelepiped	متوازي السطوح
Cluster points	نقطة الحشد أو المجموع أو التجميع أو التراكم أو نقط العنقود أو السباعلة
Point of accumulation	نقط التجميع أو التجمع أو التركيم أو التراكم أو نقط العنقود أو السباعلة
Family	عائلة أو فصيلة
Heine-Boral theorem	نظرية هين بورل
Compact	مدجة - داخجة - محكمة
Compactness	الإدماج - الإحكام
Covering	غطاء
Eduard Heine	إدوارد هين
Emile Borel	أميل بوريل
Hermite	هرمت
Lebesque	لبسج
Contour	كونتور
Translation	نقل
Baire Category Theorem	نظرية طبقة بير
Connected Sets	الفئات المتصلة ( الموصلة - المرتبطة )
René Louis Baire	رينيه لويس بير
Polygonal curve	منحنى مضلع

Complex number system

نظام العدد المركب

Real part

جزء حقيقى

Imaginary part

جزء تخيلى

Identity element

عنصر محايد

Carl Friedrich Gauss

كارل فريدرش جاوس

Geodesy

الجيوديسيا ( المساحة التطبيقية )

Inversion mapping

الرواسم العكسية

Analytic function

الدوال الهولومورفية

### الفصل الثالث

Inductive

حتى أو استقرائى

Convergence

تقارب

Uniqueness

انفرادية - وحدة

Coordinate

متساوى الرتبة ( أو الدرجة )

Subsequences

متتابعات جزئية

Combinations of sequences

مجموعات مؤلفة من المتتابعات

Combination

توافق

Criteria

معايير أو مقاييس

Monotone

رتابة ( وتيرة واحدة ) - باطراد

Cauchy Criterion

معيار كوشى

Cauchy Sequences

متتابعات كوشى

Harmonic series

متسلسلة توافقية

Shuffled sequence

متتابعة مختلطة

Vector sum

جمع متجه

Scalar multiple

ضرب عددى

Supremum norm

العمود الأعلى

The limit function

الدالة النهائية

The limit superior

العلو النهائى

Dual

ثنائى ، مثنى

Unbounded Sequences

متتابعات غير محدودة

Infinite limits

نهايات لانهائية

Order of magnitude	رتبة مقدار
Equivalent	مكافئة
Lower order of magnitude	أقل رتبة مقدار
Dominated	سائدة
Cesaro summation	مجموع سيزارو
Oscillatory sequences	متتابعات تذبذبية
Summability	قابلية الجمع
Sequence of arithmetic means	متتابعة المتوسط الحسابي
Counter-examples	أمثلة مضادة
Iterated sequences	المتتابعات المكررة أو المعادة
Double sequences	المتتابعات المزدوجة
Array	نظام - مجموعة مرتبة

## الفصل الرابع

Class	صنف ( طائفة )
Continuous Functions	دوال متصلة ( مستمرة )
The constant function	الدالة الثابتة
The identity function	الدالة المتطابقة ( التطابقية )
The squaring function	الدالة التربيعية
Dirichlets discontinuous function	دالة درشلت غير المتصلة
Combinations of functions	محصلة دوال
Composition	تركيب أو إنشاء
Polynomial	دالة كثيرة الحدود
Sine function	دالة الجيب
Additive function	دالة جمعية
Jump of	قفزة - وثبة
Exponential function	دالة أسية
Matrix	مصفوفة
Global properties	الخواص الكروية
Bolzanos intermediate value theorem	نظرية القيمة المتوسطة لبولزانو

Family	فصيلة - عائلة
Antipodal points	النقط المقابلة من الكرة الأرضية
Equator	خط الاستواء
Lipschitz condition	شرط لبشتر
Contraction	تقلص - انكماش
Rapidity	الإسراع
Oscillation	تذبذب - ذبذبة
Interchange	تبادل
Approximation	تقريب
Step function	دالة الخطوة
Weight factors	معاملات الترجيح
Theory of inference	نظرية الاستدلال
The deleted limit	النهاية المحذوفة
Semi	شبه - نصف
Classical	طائفي - كلاسيكي
Equicontinuity	متساوى الاتصال
Diagonal process	عملية قطرية

## الفصل الخامس

Several variables	متغيرات متعددة (عديدة)
Improper integrals	تكاملات معتلة
The mean value theorem	نظرية القيمة المتوسطة
Graph	رسم بياني - خط بياني - مخطط بياني
Relative maximum	نهاية عظمى نسبية
Even function	دالة زوجية
Odd function	دالة فردية
Telescopic sum	حاصل جمع تلسكوبي (مقارن - متداخل أوصال)
Multiplicity one	تعدد واحد
Multiplicity n	تعدد n
Sine function	دالة الجيب

Cosine function	دالة جيب التمام
Hyperbolic sine function	دالة جيب الزائدى
Hyperbolic cosine function	دالة جيب التمام الزائدى
Convex	محدبة
Midpoint	نقطة الوسط
Overlapping	تراكيب ، تداخل
Partition	انقسام - تقسيم
Fine	دقيق
Refinement	تكرير
Integrand	تكاملية ( المطلوب تكاملها )
Integrator	المكاملة
Bilinearity	خطية ثنائية
Closure	الإغلاق أو الإغلاق
Indefinite integral	تكامل غير محدود
Anti-derivative	غير مشتقة
Projects	مشروعات
Parameter	بارامتر - كمية متغيرة القيمة
Variable	متغير - يمكن تغييره
Change	تغيير
Iterated integrals	تكاملات مكررة أو تكاملات م دة
Mean-square	متوسط مربع
Transformation	تحويل - تحول
Kind	صنف
Gamma function	دالة جاما
The undulatory theory	النظرية الموجبة
Dominated	سائد - غالب
Iterated	مكرر ( معاد )
Beta function	دالة بيتا
Technique	أسلوب فنى
Addition formulas	قوانين الإضافة
Duplication formulas	قوانين المضاعفة
Chain	سلسلة

## الفصل السادس

Generating function	دالة مولدة
A symptotic series	متسلسلات متقاربة
Harmonic series	متسلسلات توافقية
Condensation test	إختبار تكثيف
Sharp limiting	نهاية حادة
Alternating series	متسلسلات مترددة (أو متناوبة)
Double series	متسلسلات مزدوجة
Power series	متسلسلات قوى
Uniqueness	إنفراد (وحدة)
Abel summable	أبل القابلة للمجموع
Trigonometric polynomial	كثيرة الحدود مثلثية
Kernel	جوهر (قلب)
Orthonormal	عمودي
Weighted means	متوسطات موزونة

## الفصل السابع

Affine	دالة مألوفة (دالة خطية مضاف إليها مقدار ثابت)
Rank	رتبة
Directional derivative	المشتقة الاتجاهية
Argument	إزاحة
Gradient	انحدار
Implicit functions	دوال ضمنية
Nullity	بطلان
Spen	يحتساز
Level plane	مستوى مستو
Critical point	نقطة حرجية
Saddle point	نقطة راكبة
Monkey saddle	راكبة نطاق



## الفصل الثامن

Diamond-shaped

Common refinement

Additive function

Strong density

Polar coordinates

Spherical Coordinates

عل شكل منحرف ( ماسة )

تكرير عام

دالة جمعية أو دالة إضافية

كثافة قوية

إحداثيات قطبية

إحداثيات كروية

هــسـابـوـنـفـالـلـمـوـنـي

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة

مكتبتي الخاصة

على موقع ارشيف الانترنت

الرابط

[https://archive.org/details/@hassan\\_ibrahem](https://archive.org/details/@hassan_ibrahem)



## فهرس أبجدي

( ١ )

٣٨٦ ، ٣٨٥	آبل ، ب
٣٦١	آبل ، ق ج .
٥ ، ٤	اتحاد فئات
١٦٢	اتصال
٢٥٦ ، ٢٥٥	اتصال جانب واحد
١٨٦	اتصال دالة عكسية
١٨٩	اتصال منتظم
٢٥٥	التكاملية
١٨٣	احتفاظ الارتباط
١٨٣	احتفاظ دمج
٥٣٣	احداثيات أسطوانية
٥٢٦	إحداثيات قطبية
٥٢٧	إحداثيات كروية
٦٧	إحداثيات متجه
٣٦٢	اختبار آبل للتقارب
٣٧٤	اختبار آبل للتقارب المنتظم
٣٤٦	اختبار تركيز كوئي
٣٥٣	اختبار تكامل للمتسلسلات
٣٤٨	اختبار جذر
٣٤٨	اختبار جذر لكوئي
٣٦١ ، ٣١٢	اختبار ديرشلت لتقارب
٣٧٤ ، ٣٧٣ ، ٣١٨	اختبار ديرشلت لتقارب منتظم
٣٥١	اختبار راب
٣٦٣	اختبار ليز للمتسلسلات المتناوبة
٣٣٨	اختبار $M$ . فيراشتراس لتكاملات لا نهائية
٣٧٣	اختبار $M$ . فيراشتراس للمتسلسلات

٤٦٧	اختبار مشتقة ثانية
٣٥٠	اختبار نسبة
٣٤٧	اختبار تقارب لتسلسلات
٣٤٧ ، ٣١٢ ، ٣٤٧	اختبارات مقارنة
١٦٩	اختلاف دالتين
١٠٨	اختلاف متتابعين
١١	اختلاف متماثل
١١	اختلاف متماثل للفئة
٢٢٤	أرزلا ، س
٤٦	أرشميدس
٩	أزواج مرتبة
١٢١	أساس فليواتر
٥٢	أسس غير قياسية لعدد حقيقي
٢٢٤	اسكولى ، ج
٢٨٥	اشتلتجز ، ج
٢١٨ ، ٢١٧	اشتون ، م . ح .
٣١	أعداد حقيقية
٣	أعداد طبيعية
٣٦ ، ٣٥ ، ٤	أعداد قياسية
١٠٣ ، ١٠٢ ، ٤	أعداد مركبة
٤٩٦ ، ٨١ ، ٨٠	إتفصال فئة
٤٤	أقل حدودية عليا = ( نهاية عظمى )
٤٧٩	أقل مربعات
١٦ ، ١٥	آلات
٢٨٩ ، ٢٤٤	الباقي في نظرية تايلور
٢٨٩	الباقي لصورة تكامل
٢٤٥	الباقي لصورة كوشي
٢٤٥	الباقي لصورة لاجرانج
١٦	امتداد دالة
٢٢١	امتداد دالة متصلة
٤١٩	الانحدار
٤٣٧	ايلر ، ل .

## (ب)

٢٩	بدھية اختيار
	برنشتين
٤٢	برنول ، ج .
١٩٤	بروور ، ل . ا . ج .
٢٣٩	بسل ، ف . و .
٤٥٣ ، ٤٥٢	بطلان
٨٨	بورل ، ا .
٨٤ ، ٨٣	بولزانو ، ب .
٢٠٦	بوليا ، ج .
٦٦	بونيا كوفسكي ، ف
٢٧٨	بونيت ، ا .
٩٥	بيير ، د .

## (ت)

٤٣٤ ، ٢٨٩ ، ٢٤٤ ، ٢٤٣	تايلور ، ب .
١٥١ ، ١٠٩	تباعده متتايمة
٢٢١	تنز ، ح .
١٥	تحسول
٢٧٩	تحسول تكاملات
٢٦٧	تحسول دالة خطية
٣٣٤	تحسول لابلاس
٣٣٤	تحسول لابلاس لدالة
١٩٢	تخالف
١٩٦	تذبذب دالة
٢٦١ ، ٢٦٠	ترتيب ثان للمتسلسلات
٢	تساوي فئات
٢٦٨	تغير محدود
٥٢٠ ، ٣٨١	تغير متغير
٢٤١	تقارب شرطي
٣٩٥	تقارب عمود للمتسلسلة فورييه
٣٠١	تقارب في متوسط
١٢٣	تقارب في متوسط مربع

١٣٦ ، ١٣٥	تقارب للمتتابعة دوال
١٠٩	تقارب متتابعة
٣٠٢	تقارب متوسط مربع
٣٩٥	تقارب مربع لمتسلسلة فورييه
٣١٥	تقارب مطلق لتكامل
٣٦٦ ، ٣٦٥ ، ٣٤١	تقارب مطلق لمتسلسلة
٣١٧	تقارب منتظم لتكامل لا نهائي
١٤٠ ، ١٣٩	تقارب منتظم لمتتابعة دوال
١٥٩ ، ١٥٨	تقارب منتظم لمتتابعة متتابعات
٣٧٢	تقارب منتظم لمتسلسلة دوال
٣٩٣	تقارب منتظم لمتسلسلة فورييه
٣٩٣	تقارب نقطي لمتسلسلة فورييه
٤	تقاطع فئات
٤٨٦ ، ٢٥٣	تقسيم
٣٠٦	تكاملات مقبلة
٥٠٤ ، ٣٢٥ ، ٢٩٣	تكاملات مكررة
٤٩٥ ، ٤٩٤ ، ٢٦٧	تكامل أدنى
٤٩٥ ، ٤٩٤ ، ٢٦٧	تكامل أسفل
٢٧٧ ، ٢٦٠	تكامل بالتجزئ
٢٥٢	تكامل ريمان - اشتاتجز
٢٥٥	تكامل ريمان لدالة على الفراغ $R$
٤٨٦	تكامل ريمان لدالة على الفراغ $R^p$
٣٠٨	تكامل لا نهائي
٢٥٢	تكامل ليبزج
٨ ، ٧	تكلفة فئة
١٧	تكوين دالة
٢٠	تناظر أحادي
٣٨٢	توبر ، أ .
٨٦ ، ٧٥	توبولوجي

## (ج)

١٠٥	جاوس ، س . ف
٢٤٦ ، ٢٤٥	جسبر بسيط

٤٤٣	جرافس ، ل . م .
١٠٣ ، ١٠٢	جزء تخيلي
١٠٣	جزء حقيق
٧٧	جيرة

## (ح)

٣٣٩ ، ٣٣٨	حاصل جمع جزئي
١٦٩ ، ٦٢	حاصل جمع دالتين
٤٨٦ ، ٢٥٤	حاصل جمع ريمان
٢٥٣	حاصل جمع ريمان - اشتلتجز
١١٩ ، ١١٨ ، ١٠٨	حاصل جمع متتابعات
١٠٨	حاصل جمع متتابعتين
٦١	حاصل جمع متجهين
٣٦٥ ، ٣٦٠ ، ٣٣٩	حاصل جمع مشتقة جزئية
١٦٩	حاصل ضرب دوال
٦٢	حاصل ضرب عدد حقيق ومتجه
٦٣	حاصل ضرب فراغ داخلي
٣٠٢ ، ٦٣	حاصل ضرب قياسي
٩	حاصل ضرب كارتيزي لفظة
٣٥٩ ، ٣٦٠	حاصل ضرب لا نهائي
٣٦٩ ، ٣٦٨	حاصل ضرب لكوثي
٣٤٣ ، ١١٩ ، ١٠٨	حاصل ضرب متتابعات
٣٧٩	حاصل ضرب متسلسلات قوى
٣٥٩	حاصل ضرب مشتقة جزئية
٢٨٥	حاصل ضرب والزر
٤٣	حدودية أدنى

## (خ)

١٦٩	خارج قسمة دوال
١١٩ ، ١٠٩	خارج قسمة متتابعات
٥٤	خاصية
٤٦	خاصية أرشيمدس
٢٦	خاصية ترتيب حسن
٥٦	خاصية خلايا متشابكة في الفراغ R

٨٢	خاصية خلايا متشابكة في الفراغ $R^p$
٤٦	خاصية نهاية صفري
٤٤	خاصية نهاية عظمى
٤٢٠	خسط مماسي
٥٤	خلية في الفراغ $R$
٤٨٤ ، ٨٢	خلية في الفراغ $R^p$
٥٥	خلية نصف مغلقة (أو فترة)
٥٥	خلية نصف مفتوحة (أو فترة)
٣٧	خواص أساسية للمتباينات
٣٢	خواص جبرية للفراغ $R$
٣٧	خواص مرتبة للفراغ $R$

( د )

٣٤٩	د. البرت ، ج.
٢٣٤	دار بوكسي ، ج.
٤٩٦ ، ٨٠	داخل فئة
٣٧٦ ، ٢٤٧ ، ١٧٣ ، ٥٣	دالة أسية
٥١٤ ، ١٧٢	دالة إضافية
٢٦٢ ، ١٧٣	دالة أكبر عدد
٣٣٣ ، ٢٨٤	دالة بيتسا
١٧٣	دالة ترايدية
٤٠٩	دالة تفاضلية
٢١	دالة تناظرية أحادية
١٧٣	دالة تناقصية
٤٨١	دالة توافقية .
٤٣٧	دالة ثنائية
٣٣٣ ، ٣١٤	دالة جاما
٢١	دالة جيب عكسية
١٩٩	دالة خطوة
١٧٥	دالة خطية
٢٩٤	دالة خطية دالية
٢٠٠	دالة خطية قطعية
٣٨٨ ، ٣٨٧ ، ١٩٥	دالة دورية



١٦٧	دالة دبر شلت غير متصلة
١٧٣	دالة رتيبة
٢٥١	دالة زائدية
٣٨٩ ، ٢٣٧	دالة زوجية
٤٣٨ ، ٤٣٧	دالة زوجية خطية
٢١٤ ، ٢١٣	دالة شبه متصلة
٢١ ، ٢٠	دالة عكس جاما
١٩ ، ١٨	دالة عكسية
٢٣١	دالة غير قابلة للتفاضل
٢٧٦ ، ٢٣٧	دالة فردية
٢١	دالة فوقية
٤٠٩	دالة قابلة للتفاضل
١٧١	دالة كثيرة الحدود
٤١٠	دالة مألوفة
١٦٣	دالة متصلة
٣٨٨	دالة متصلة قطعية
٢٦٨	دالة متغير محدود
٢٤٨ ، ٢٨٤ ، ٣٨٦	دالة مثلثية
٢٥١	دالة محدبة
١٤١	دالة محدودة
٢٠ ، ١٨٧	دالة مربع جذر
٥٣	ديد كيند ، د
٩	ديكارتر ، د.
٢٨٤	دى موافر ، أ .
٨	دى مورجان ، أ .
١٦٣	دميى . ي .

## ( ر )

٣٥١	راب ، ج . ل .
١٣	راسم
٤٢٢	راسم جزئى
١٠٦	راسم عكسى فى C
٢١	راسم فوقى

رتبة	٤٥٣
روتا ، ج ، س .	٥٧
روزينبرج ، أ .	٦٧ ، ٥٩
رول ، م .	٢٣٢
ريزرز ، ف .	٢٩٥
ريمان ، ب .	٢٥٢

## ( ز )

زوجية خطية لتكامل ريمان - اشتلتجز	٢٥٨
-----------------------------------	-----

## (س)

سيزارو	٣٩٧ ، ١٥٤
سيزارو ، أ .	١٥٤

## (ش)

شرط لبشتز	١٩٢
شرط جانبي	٤٧٠
شماع	٥٥ ، ٥٤
شوينبرج ، أ . ج .	٥٢١
شيبش ، ب ، ل .	٧٣

## (ص)

صنف أو فصيلة	١
صنف C <sup>1</sup>	٤٤٠ ، ٤٤١
صنف موجب	٣٧
صورة	٢٣ ، ٢١ ، ١٥
صورة مباشرة لدالة	٢٢ ، ٢١
صورة عكسية	٢٣
صيغة اشتلتجز	٢٨٦ ، ٢٨٥
صيغة ليبز	٢٩٢

## (ع)

عدد قياسي	٣٥
عدد ليبزج	٩٢
عكس صورة لدالة	٢١
عملية ثنائية	٣٢

٧٠ ، ٦٣	عمود
٢٦٥	عمود تقسيم
٣٠٢ ، ٣٠١ ، ١٤٢	عمود دالة
١٧٨	عمود مصفوفة
١٤١	عمود منتظم
٢٦	عناصر غير قياسية في حقل
٢ ، ١	عنصر من فئة

## ( غ )

٨٨	غطاء
----	------

## ( ف )

٢٧	فئة تنازلية عديدة
٢	فئة جزئية
٨٨ ، ٧٧	فئة داخجة
٥٠٨	فئة رأسية
٤٠٣	فئة عمودية لدوال
٩٧ ، ٩٦	فئة غير مرتبطة
٢٦ ، ٢٥	فئة لا نهائية
٧٠ ، ٦٩	فئة محدبة
٨٢ ، ٢٧	فئة محدودة
٩٦	فئة مرتبطة
٢٧ ، ٢٦	فئة قابلة للعدد
٥٧ ، ٥٦	فئة كانتور
٧٣	فئة مفتوحة
٢٦ ، ٢٥	فئة نهائية
٤	فئات غير متصلة
٧٦ ، ٧٥	فئات مغلقة
٣٧٦	فترة تقارب
٥٥	فترة في فراغ R
٨٦	فراغ توبولوجي
٦٣	فراغ حاصل ضرب داخلى
٦٤	فراغ عمودى
٦٦	فراغ كارتيزى

٨٦ ، ٧٠	فراغ متری
٤١٠ ، ٤٢٠ ، ٤٣١ ، ٤٦١	فراغ ممانی
٣١٣	فریزنل ، أ .
٣٨٦	فروبینیس ، ج .
٣٩٦	فیجر ، ل .
٨٤	فیراشتراس ، ك .

## ( ق )

٣٨٢ ، ٣٨١	قابلیة الجمع لابل
٥٤	قاطع
٤٢٣	قاعدة المتسلسلة
١٧٣	قفزة دالة
٨	قوانین دی مورجان
٥٢ ، ٥١ ، ٣٥	قوة عدد حقیقی
٤٧٠	قیسد
١٦	قیسد دالة
٣١٩ ، ٣٠٨	قيمة أساسية لكوشی
١٧٠	قيمة مطلقة لدالة
٤١	قيمة مطلقة لعدد حقیقی
١٠٥	قيمة مطلقة لعدد مرکب

## ( ك )

٢٨	كانتسور ، ج .
٤٥٠ ، ٤٢٢	كتلة تفاضلية جزئية
٤٨	كثافة - أعداد قياسية
٥١٣	كثافة دالة مجموعة
٣٩٠	كثيرة حدود مثلثية
٨١	كنتسور
٦٦	كوشی ، أ . ل .
٦٧	كرة في فراغ كارتیزی

## ( ل )

٣٣٤	لابلاس ، ب . س
١٥٣	لاندو ، أ .
٢٤١	لأوتبال ، ج . ف

١٩٢  
٢٨٣ ، ٢٤٨ ، ١٤٧ ، ٥٣  
٩٢  
٤١٣

(م)

٣٥٣  
٤٧٧  
٦٦  
٤٢  
٣٩٢ ، ٣٩١  
٤٨٢ ، ٤٨١ ، ٧١  
٧٣  
٧١  
٤٨٢ ، ٧٣ ، ٧٢  
٥١١ ، ٤٨٢ ، ٢٤٠ ، ٧٢  
١٥٢ ، ١٥١ ، ١٠٨  
١٥١  
١٠٨  
١٩٧ ، ١٣٥  
١٥٣  
١٥٤  
١١٠  
١٢٤  
١٠٨  
١٢٣  
١٣٥ ، ١٢٩  
١٧٣ ، ١٢٥  
١١١ ، ١١٠  
١٥٦  
١٣٣  
٦١  
٧٠  
٧٠  
٢٢٤

لبشتر ، د .  
لوغاريسم  
ليبرز ، ح .  
ليبرز ، ج ، و .  
ماكورين ، س .  
ماكشان أ . ج  
متباينة اشفارتز  
متباينة برنولي  
متباينة بسل  
متباينة حسابية - هندسية  
متباينة شيبشيف  
متباينة كوشي  
متباينة مفكوفسكي  
متباينة هولدر  
متتابعات تباعدية  
متتابعات غير محدودة  
متتابعات في فراغ كارنيزي  
متتابعات لدوال  
متتابعات متكافئة  
متتابعات لمتوسطات حسابية  
متتابعات محدودة  
متتابعة رتيبة  
متتابعة تقاربية  
متتابعة في فراغ مري  
متتابعة كوشي  
متتابعة تناقصية  
متتابعة محدودة  
متتابعة مزدوجة  
متتابعة شفلد  
متجه فراغ  
مستري  
مترية منفصلة  
متساوية الاتصال

٣٩٦	متساوية بارسيغال
٣٣٨	متسلسلات
٣٤٣	متسلسلات . أ .
٣٨٥	متسلسلات جيب
٣٤١	متسلسلات تقاربية شرطية
٣٤١	متسلسلات تقاربية مطلقة
٣٤٢	متسلسلات توافقية
٣٣٨	متسلسلات لانهائية
٣٤١	متسلسلات هندسية
٣٥٨	متسلسلات هندسية زائدية
٣٨٦	متسلسلات جيب التمام
٤٠١	متسلسلة جيب فورييه
٣٦٥	متسلسلة مزدوجة
٣٨٨ ، ٣٨٧	متسلسلة فورييه
٣٧٥	متسلسلة قوى
٨٢	متوازي مستطيلات
٤٨٢ ، ١٥٥ ، ١٥٤	متوسط حسابي
٤٨٢ ، ٤٧	متوسط هندسي
٢٢٨	متوسطات حسابية
٣١	مجال أو حقل
٥٣١	مجسم دوران
١	مجموعة
٥٠٧	محتوى خارجي
٤٨٤	محتوى خلوية
٥٠٧	محتوى داخلي
٤٩٩ ، ٤٩٦	محتوى دالة
٤٨٤	محتوى صفر
٥٣٤ ، ٥٣٣	محتوى وحدة كرة خلوية
٤٥٣ ، ٤٥٢ ، ١٣	مدى دالة
١٠٣ ، ١٠٢	مرافق عسدد مركب
٣٦٩	مرتس ، ف .
٦٧	مركبة متجه
٤٦١ ، ٤٢٠ ، ٤١٠	مستوى مماسي
٢٣٠	مشتقة

٤٦١	مشتقة متجهة
٤٠٨	مشتقة جزئية
٤٠٩ ، ٢٣٠	مشتقة دالة
٢٩٢ ، ٢٣٧	مشتقة طرف واحد
١٧٧ ، ١٧٦	مصفوفة
٢٥٧ ، ١٤٤ ، ١٣٠ ، ١٢٩	معادلات تقارب كوشي
٣٧٣ ، ٣٤١ ، ٣٠٧ ، ٣١٠	
٤٨٧	
٣٨٨	معاملات فورييه
٣٠٥	معاملات تفاضلية
٤٩٢ ، ٢٧١	مقياس ريمان لقابلية التكامل
١٦٤	مقياس عدم اتصال
٥١٢	مقياس ليبيج لقابلية التكامل
٣٦١	مفترض أبيل على جمع جزئي
٤٤١	مفترض تقريب
٣٩٢	مفترض ريمان - لبسج
٣٤٨ ، ٢٤٧	مشكوك ذات الحدين
٤٩٤	مقياس صفر
٤٧٧	ماكشيان ، أ . ج .
٤٨٢	مكعب
٧	مكملات نسبية للفترة
٨	مكلمة فنتس
٢٦	مناظرة
٤٨٥	منحنى بينو
٥٣١	منحنى قطبي
٩٨	منحنى كثير الأضلاع أو الزوايا
٤٨٦	منحنى للافراغ

## ( ن )

٣٧٦	نصف قطر تقارب
١٣	نطاق دالة
١٠٢	نظام عدد مركب
٣٧٢ ، ٢٩٠ ، ١٩٨	نظريات تغيير مرتبطة بالاتصال
٣٢١ ، ٢٤٢ ، ٢٩١ ، ٣٢١	نظريات تغيير مرتبطة للتفاضل
٣٧٨ ، ٣٧٣	

٢٨٧ ، ٢٩١ ، ٣٧٧ ، ٣٧٧	نظريات تغيير مرتبطة لتكامل
٥٠٤	
٣٢٠	نظريات تغيير مرتبطة لتكاملات لانهائية
٣٧٢	نظريات تغيير مرتبطة لمتسلسلات
٢٥٧ ، ٢٧٢ ، ٢٧٣ ، ٤٨٩	نظريات قابلية التكامل
٤٩٢ ، ٥١٢	
٣٨١	نظرية أبل
٢٧١	نظرية اختيار هيل
٢٢٤	نظرية أرزلا - اسكول
١٠٥	نظرية أساسية في الجبر
٢٧٥ ، ٢٧٦	نظرية أساسية لتكامل حساب التفاضل والتكامل
٢١٩	نظرية اشتون - فيراشتراس
٩٢	نظرية أقرب نقطة
٤٥٣	نظرية البارامترية
١٨٠	نظرية الاتصال الكروي
٢٣٤	نظرية القيمة المتوسطة لكوثي
٣٧٩	نظرية الحدودية لمتسلسلات قوى
٣٨٠	نظرية برنشتين
٨٤	نظرية بولزانو - فيراشتراس لفئات لانهائية
١٢٨	نظرية بولزانو - فيراشتراس لمتتابعات
١٨٣	نظرية بولزانو ، للقيمة المتوسطة
٢٢١	نظرية امتداد تتر
٩٥	نظرية بير
٣٤٤	نظرية ترتيب ثانيا
٢٧٥	نظرية تفاضل لتكاملات
٣٧٨	نظرية تفاضلية لمتسلسلات قوى
٢٨٩	نظرية تفاضلية لمتسلسلات
٢١٨	نظرية تقارب لاشتون
٣٢٤	نظرية تقارب رتبة لتكاملات لانهائية
١٢٤	نظرية تقارب رتبة لمتتابعات
٢٨٨	نظرية تقارب محدودة
٣٢٣	نظرية تقارب سائدة
٩٤ ، ٩١	نظرية تقاطع كانتور
٢١٨ ، ١٩٩	نظرية تقريب
١٧٢ ، ٢٢١ ، ٢٩٨	نظرية تقريب فيراشتراس



٢٠٣	نظرية تقريب لبرنشتين
٢٩٥	نظرية تمثيل ريزر
٥١٩	نظرية چاكويان
٢٣٤	نظرية دار بوكس
٤٤٢	نظرية راسم أو خالية
٤٤٣	نظرية راسم فوق
٤٤٥	نظرية راسم مفتوح
٤٥٦	نظرية رتبة
٩٢	نظرية غطاء ليبرج
٤٤٦ ، ٤٦٣	نظرية عكسية
٣٩٧	نظرية فيجر
١٨٤	نظرية قيمة صفري
١٨٤	نظرية قيمة عظمى
١٨٣	نظرية قيمة متوسطة
٢٧٧	نظرية قيمة متوسطة ثانية
٢٧٦ ، ٢٧٤	نظرية قيمة متوسطة أولى
٢٧٧ ، ٢٧٦ ، ٢٧٤	نظرية قيمة متوسطة لتكاملات في $R$
٥٠٣	نظرية قيمة متوسطة لتكاملات في $R^p$
٢٣٣	نظرية قيمة متوسطة لمشتقات في الفراغ $P$
٤٢٧	نظرية قيمة متوسطة لمشتقات في $R^p$
٩٥	نظرية كاتجورى ( طابقة )
٣٧٦	نظرية كوشي ، هادامارد
٨٨	نظرية هاین - بورل
٨٣	نقطة تجميع لفئة
١٩٢	نقطة ثابتة
٤٩٥ ، ٧٧	نقطة حدود
٤٩٥ ، ٧٧	نقطة حدودية لفئة
٤٦٦	نقطة حرجة
٨٣	نقطة حشد
٧٧	نقطة خارجة
٧٧	نقطة خارجية لفئة
٧٨ ، ٧٧	نقطة داخلية
٤٦٦	نقطة راکبة

٩٦	نقطة فئة
٥٨	نماذج للفراغ R
٤٩	نهايات عظمى مكررة
١٥٢ ، ١٥١	نهايات لا نهائية
١٥٧	نهاية مكررة
١٤٧	نهايات أدنى
٢١١ ، ١٤٧	نهاية أعلا
٢٠٨	نهاية دالة
٤٤	نهاية صفري
٤٦٥ ، ٢٣٢ ، ٢٣١	نهاية صفري نسبية
٢١٥	نهاية طرف أيمن
٤٤	نهاية عظمى
٢٣٢	نهاية عظمى داخلية
١٤٢	نهاية عظمى عمودية
٥٠ ، ٤٩	نهاية عظمى مكررة
٤٦٥ ، ٢٣٢ ، ٢٣١	نهاية عظمى نسبية
٢٠٨	نهاية غير محدوفة
٤٦٥	نهاية قصوى
١١٠ ، ١٠٩	نهاية متتابعة
١٥٥	نهاية متتابعة مزدوجة
٢٠٨	نهاية محدوفة

## ( ه )

٣٧٦	هادامارد ، ج .
٣٠٩	هاردى ، ج ، ح .
٨٨	هاين ، أ .
٧٢	هولدر ، أ .

## ( و )

٢٨٥	والاس ، ج .
٨٨	وحدة فترة
٥٥	وحدة كرة ، خلية



هنا يوسف اللواتي

---

رقم الإيداع ٨٢/٢٤٧٠

---

ترقيم دولي ٩٧٧-٧٢٤٤-٢٠-١-١ ISBN

---

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة

مكتبتي الخاصة

على موقع ارشيف الانترنت

الرابط

[https://archive.org/details/@hassan\\_ibrahem](https://archive.org/details/@hassan_ibrahem)



هذا الكتاب هو أحد كتب برنامج Wiley ARAbooks الذي وضع  
لتلبية الحاجة الماسة لتوفير كتب دراسية علمية باللغة العربية  
البرنامج ترجمات عربية لبعض الكتب القيمة التي تصدرها دار جون وايلي،  
بالإضافة إلى كتب جيدة مؤلفة أصلاً باللغة العربية

هــسـبـى ابراهيم



متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة

مكتبتي الخاصة

على موقع ارشيف الانترنت

الرابط

[https://archive.org/details/@hassan\\_ibrahem](https://archive.org/details/@hassan_ibrahem)

JOHN WILEY & SONS, INC.  
605 Third Avenue  
New York, N.Y. 10158  
U.S.A.

Bartle,  
THE ELEMENTS OF  
REAL ANALYSIS  
Second Edition

مطابع الامستردام الهولندية

ISBN 0-471-06391-6